

# Topologische Ableitung zur Optimierung crashbelasteter Strukturen

Bergische Universität Wuppertal  
Lehrstuhl für Optimierung mechanischer Strukturen

Katrin Weider

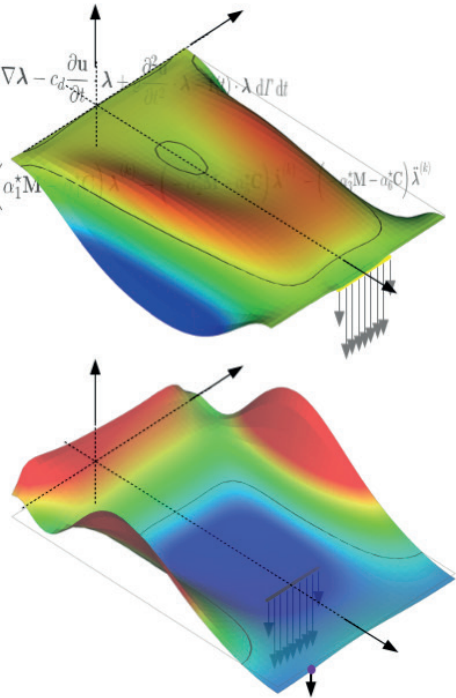
$$\mathcal{TJ}(\mathbf{X}_0) = \lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{d|c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr} \right)^{-1} \left( \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r} \right)_E - \int_0^T \int_{\Gamma_r} \mathbf{FS} \cdot \nabla \lambda - c_d \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \lambda + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \lambda \, d\Gamma \, dt \right)$$

$$w^{(k-1)} \left( -\alpha_1^* \mathbf{M} + \alpha_4^* \mathbf{C} + \mathbf{K}_T^{(k-1)} \right) \lambda^{(k-1)} = - \left[ P^{(k-1)} \right]_{(h)} - \left( \alpha_1^* \mathbf{M} - \alpha_4^* \mathbf{C} \right) \dot{\lambda}^{(k)}$$

$$\lambda^{(m)} = -\mathbf{M}^{-1} \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \Big|_{t=T} \, d\Omega \right]_{(h)}$$

$$\dot{\lambda}^{(m)} = \mathbf{M}^{-1} \left( \mathbf{C} \lambda^{(m)} + \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \Big|_{t=T} \, d\Omega \right]_{(h)} \right)$$

$$\ddot{\lambda}^{(m)} = \mathbf{M}^{-1} \left( \mathbf{C} \dot{\lambda}^{(m)} - \mathbf{K}_T^{(m)} \lambda^{(m)} - \left[ P^{(m)} \right]_{(h)} \right)$$



# Topologische Ableitung zur Optimierung crashbelasteter Strukturen

**Dissertation**  
zur Erlangung eines Doktorgrades

in der  
**Fakultät für Maschinenbau und Sicherheitstechnik**  
der  
**Bergischen Universität Wuppertal**



vorgelegt von  
**Katrin Weider**  
aus Bad Nauheim

Wuppertal 2021

Tag der mündlichen Prüfung: 21.07.2021



Berichte aus dem Maschinenbau

**Katrin Weider**

**Topologische Ableitung zur Optimierung  
crashbelasteter Strukturen**

Shaker Verlag  
Düren 2021

### **Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: Wuppertal, Univ., Diss., 2021

Copyright Shaker Verlag 2021

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-8248-7

ISSN 0945-0874

Shaker Verlag GmbH • Am Langen Graben 15a • 52353 Düren

Telefon: 02421 / 99 0 11 - 0 • Telefax: 02421 / 99 0 11 - 9

Internet: [www.shaker.de](http://www.shaker.de) • E-Mail: [info@shaker.de](mailto:info@shaker.de)

**Katrin Weider**

## **Topologische Ableitung zur Optimierung crashbelasteter Strukturen**

Dissertation, Bergische Universität Wuppertal,

Fakultät für Maschinenbau und Sicherheitstechnik,

Lehrstuhl für Optimierung mechanischer Strukturen, September 2021

### **Kurzfassung**

Die Optimierung der strukturellen Crashesicherheit ist ein wichtiges Forschungsfeld der Fahrzeugsicherheit. Auf Basis der Crashsimulation kann der Einsatz von Methoden zur Dimensionierung, Form- und Topologieoptimierung sinnvoll sein. Jedoch ist ein Crash ein hochdynamischer Prozess und durch starke Nichtlinearitäten charakterisiert. Dies erschwert die Ermittlung von für viele Optimierungsverfahren wichtigen analytischen Sensitivitäten der Ziel- und Restriktionsfunktionen bezüglich der Entwurfsvariablen.

In dieser Dissertation wird die Topologische Ableitung unter Materialnichtlinearität, großer Verformung und Zeitabhängigkeit vorgestellt. Hierbei gibt die Topologische Ableitung an, wie sich ein Funktional durch Einbringen einer Ausparung verändert. Mithilfe der adjungierten Methode und einer Interpolation des elasto-plastischen Materialverhaltens wird ein Berechnungsverfahren zur Bestimmung dieser Sensitivität entwickelt.

Die Funktionale werden um die mechanischen nichtlinear transienten Gleichgewichtsbedingungen mit einem Lagrange-Multiplikator (der Adjungierten) erweitert. Dieser wird so gewählt, dass implizite Ableitungsterme, wie beispielsweise die Ableitung der Verschiebung nach der Entwurfsvariable, nicht mehr berechnet werden müssen, sondern nur die expliziten Ableitungsterme, wie beispielsweise die Ableitung des Funktionals nach der Entwurfsvariable. Für die Berechnung der Adjungierten ist ein Endwertproblem zu lösen. Je nachdem, ob zuerst differenziert wird und anschließend die zeitliche Diskretisierung erfolgt oder umgekehrt, entsteht ein eigenes Lösungsschema für die Adjungierte. Die Entwicklung ist zunächst allgemein gehalten, so dass das adjungierte Lösungsschema auch für Funktionale, die Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen beinhalten, gültig ist. Für die innere Energie einer Struktur und die Verschiebung eines Einzelpunktes wird die Topologische Ableitung in analytischer Form konkretisiert.

Es verbleiben für die Berechnung der Topologischen Ableitung Integralterme, deren Auflösung analytisch nicht mehr möglich ist. Diese Integration wird durch eine Materialinterpolation ersetzt, die das durch plastische Dehnung und isotrope Verfestigung entstandene Materialverhalten temporär linearisiert wiedergibt.

**Stichworte:** Topologische Ableitung, nichtlinear dynamische Probleme, adjungierte Methode

**Katrin Weider**

## **Topological derivatives for the optimization of crashloaded structures**

PhD thesis, University of Wuppertal, School of Mechanical Engineering and Safety Engineering, Chair for Optimization of Mechanical Structures, September 2021

### **Abstract**

Optimizing structural crash safety is an important field of research in vehicle safety. Based on crash simulation, it can be useful to apply methods for dimensioning, shape and topology optimization. However, a crash is a highly dynamic process and characterized by strong nonlinearities. This makes it difficult to determine analytical sensitivities of the objective and the constraints with respect to the design variables, which are important for many optimization procedures.

In this thesis, the Topological Derivative considering material nonlinearity, large deformation and time dependency is presented. Here, the Topological Derivative indicates how a functional would be affected by introducing a cut-out. Using the adjoint method and an interpolation of the elasto-plastic material behavior, a method for the determination of this sensitivity is developed.

The functionals are extended by the mechanical nonlinear transient equilibrium equations with a Lagrange multiplier (the adjoint). This is chosen in a way that the implicit derivatives, such as the derivative of the displacement with respect to the design variable, are circumvented and only the explicit derivation terms, as for example the derivation of the functional with respect to the design variable, are required. For the calculation of the adjoint, a terminal value problem has to be solved. Depending on whether first differentiation and then discretization in the time domain is performed or vice versa, a separate solution scheme for the adjoint is derived. The general development allows also the usage of the adjoint solution scheme for functionals, which contain velocities or accelerations. For the internal energy of a structure and the displacement of a single point, the Topological Derivative is specified in the analytical form.

For the calculation of the Topological Derivative, integration terms remain, whose analytical resolution is no longer possible. This integration is replaced by a material interpolation, which represents the material behavior resulting from plastic strain and isotropic hardening in the temporarily linearized form.

**Keywords:** Topological Derivatives, nonlinear dynamic problems, adjoint method

# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>V</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Problemstellung und Motivation . . . . .	1
1.2 Aufbau der Dissertation . . . . .	3
<b>2 Stand der Forschung</b>	<b>5</b>
2.1 Topologieoptimierung crashbelasteter Strukturen mit Ersatz-Sensitivitäten . . . . .	5
2.2 Sensitivitätenbasierte nichtlineare Topologieoptimierung . . . . .	9
2.3 Anforderungen an eine belastbare Crashsimulation . . . . .	11
2.4 Topologische Ableitung . . . . .	13
2.4.1 Zielfunktionale und Anwendungsgebiete . . . . .	14
2.4.2 Optimierungsverfahren unter Verwendung der Topologischen Ableitung . . . . .	15
2.4.3 Anwendungspotenzial der Topologischen Ableitung bei der Crash-Optimierung . . . . .	18
<b>3 Grundlagen der nichtlinearen Struktursimulation</b>	<b>21</b>
3.1 Kontinuumsmechanische Grundbegriffe . . . . .	21
3.1.1 Bewegung und Deformation eines Körpers im Raum . . . . .	21
3.1.2 Symbolische Schreibweisen der Differentialoperatoren . . . . .	23
3.1.3 Definition der ko- und kontravarianten Basisvektoren . . . . .	26
3.1.4 Deformationsgradient und Verzerrungsmaße . . . . .	29
3.1.5 Transformation zwischen Bezugs- und Momentankonfiguration . . . . .	32
3.1.6 Zeitableitungen der Verzerrungstensoren . . . . .	33
3.1.7 Spannungsmaße . . . . .	34
3.1.8 Materialmodellierung – konstitutives Gesetz . . . . .	36
3.2 Anfangsrandwertproblem der nichtlinearen Kontinuumsmechanik . . . . .	37
3.2.1 Lokale Bewegungsgleichung . . . . .	37
3.2.2 Formulierung des Anfangsrandwertproblems . . . . .	39
3.2.3 Schwache Form des Anfangsrandwertproblems . . . . .	41
3.2.4 Linearisierung der schwachen Form . . . . .	44
3.3 Schalenformulierung . . . . .	46
3.4 Methode der finiten Elemente . . . . .	53
3.4.1 Räumliche Diskretisierung . . . . .	54



3.4.2	Isoparametrisches Konzept . . . . .	55
3.4.3	Räumliche Integration mit Quadraturformeln . . . . .	58
3.4.4	Assemblierung des räumlich diskretisierten Gleichgewichts	62
3.5	Lösung des diskreten Anfangsrandwertproblems . . . . .	66
3.5.1	Zeitintegration mit dem Newmark-Verfahren . . . . .	68
3.5.2	Newton-Verfahren zur Bestimmung des Gleichgewichts . .	69
<b>4</b>	<b>Entwicklung der nichtlinear transienten Topologischen Ableitung</b>	<b>73</b>
4.1	Sensitivität eines Punktes durch Topologische Variation . . . . .	73
4.1.1	Zusammenhang zwischen Topologischer Ableitung und Formableitung . . . . .	76
4.1.2	Formableitung und materielle Ableitung . . . . .	77
4.2	Allgemeine Sensitivitätenbestimmung mit der adjungierten Methode	82
4.3	Erst differenzieren – dann diskretisieren . . . . .	83
4.3.1	Analytisch kontinuierliche Herleitung . . . . .	83
4.3.2	Diskretisierung mit impliziter Zeitintegration . . . . .	93
4.4	Erst diskretisieren – dann differenzieren . . . . .	99
4.5	Explizite Ableitungen und Pseudolasten spezieller Funktionale . .	106
4.5.1	Innere Energie eines Körpers . . . . .	107
4.5.2	Verschiebung eines Einzelpunktes . . . . .	115
4.5.3	Volumen des Körpers . . . . .	122
4.6	Zusammenfassung der analytischen Herleitung . . . . .	123
<b>5</b>	<b>Numerischer Lösungsansatz für die Randintegrale der Topologischen Variation</b>	<b>127</b>
5.1	Randintegrale unter linear elastischem Materialverhalten und kleinen Verschiebungen . . . . .	128
5.1.1	Schnittgrößen der Schalenformulierung . . . . .	128
5.1.2	Analytische Lösungen der Spannungen am Lochrand . . .	129
5.1.3	Linear elastisches Materialverhalten . . . . .	135
5.1.4	Erweiterung auf nichtlineare Problemstellungen . . . . .	140
5.2	Materialinterpolation bei plastischer Dehnung . . . . .	144
5.3	Berechnungsmodell der Ableitung der gemischt adjungierten Energie	148
5.3.1	Konstruktion der Koordinatensysteme in den Momentan- konfigurationen der Verschiebung und der Adjungierten . .	149
5.3.2	Spannungstensor auf dem Aussparungsrand . . . . .	152
5.3.3	Adjungierter linearisierter Verzerrungstensor am Lochrand	154
5.3.4	Zusammenführung von Spannung und adjungierter Dehnung	158
5.4	Berechnungsmodell der expliziten Ableitung der inneren Energie .	161

---

5.5	Berechnungsmodell der Ableitungen des Trägheits- und Dämpfungs- terms und der Volumenkräfte . . . . .	167
5.6	Zusammenführung und Visualisierung . . . . .	171
5.7	Zusammenfassung des numerischen Lösungsansatzes . . . . .	172
5.8	Zusammenfassung der Annahmen und Verbesserungspotenziale . .	174
<b>6</b>	<b>Plausibilitätsprüfung anhand praktischer Beispiele</b>	<b>177</b>
6.1	Biegebalken . . . . .	178
6.1.1	Quasistatische Belastung ohne Trägheitseffekte . . . . .	181
6.1.2	Balkenbelastung unter Berücksichtigung der Trägheitseffekte	197
6.1.3	Biegebalken mit „erst differenzieren – dann diskretisieren“	207
6.1.4	Biegebalken mit „erst diskretisieren – dann differenzieren“	209
6.1.5	Balken nichtlinear . . . . .	213
6.2	Kragträger unter hochdynamischer Belastung . . . . .	217
6.2.1	Auswertung des 1. Lastfalls . . . . .	217
6.2.2	Auswertung des 2. Lastfalls . . . . .	223
6.3	Ergebniszusammenfassung . . . . .	227
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>229</b>
7.1	Ergebnisübersicht . . . . .	229
7.2	Diskussion und Verbesserungspotenzial der vereinfachenden An- nahmen . . . . .	231
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>233</b>

## Anhang

<b>A</b>	<b>Softwarenachweis</b>	<b>242</b>
<b>B</b>	<b>Integralrechnung im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>243</b>
B.1	Mehrfachintegration . . . . .	243
B.1.1	Die Transformationsformel . . . . .	243
B.1.2	Integration über Untermannigfaltigkeiten . . . . .	244
B.2	Gaußscher Integralsatz . . . . .	245
B.3	Satz über die differenzierbare Abhängigkeit vom Parameter . . . . .	245
B.4	Integrale über Nullmengen . . . . .	246

# Symbolverzeichnis

## Einheitensystem

Dimensionsname	Dimensionssymbol	Einheit
Zeit	T	ms
Länge	L	mm
Masse	M	kg
Kraft	$ML \cdot T^{-2}$	kN
Energie	$ML^2 \cdot T^{-2}$	J
Spannung	$M \cdot L^{-1}T^{-2}$	GPa
Frequenz	$T^{-1}$	kHz

## Schreibweisen

Symbol	Bedeutung
$x$	(Kursivdruck) Skalar
$\mathbf{X}$	(Fettdruck) Spaltenvektor, $\mathbf{X}^T$ ist der zugehörige Zeilenvektor Großbuchstaben $\mathbf{X}$ stehen für Vektoren in der Bezugskonfiguration Kleinbuchstaben $\mathbf{x}$ stehen für Vektoren in der Momentan-konfiguration
$X_i$	$i$ -te Komponente des Vektors $\mathbf{X}$
$\alpha, \beta$	griechische Indizes gelten für 1, 2
$i, j$	lateinische Indizes gelten für 1, 2, 3
$\mathbf{M}$	(Fettdruck) Matrix

Symbol	Bedeutung
$\mathbf{T}$	(Fettdruck kursiv) Tensor 2. Stufe
$\mathbf{M}^{-1}, \mathbf{T}^{-1}$	Inverse der Matrix $\mathbf{M}$ , bzw. des Tensors $\mathbf{T}$
$\mathbf{M}^T, \mathbf{T}^T$	transponierte Matrix $\mathbf{M}$ , bzw. transponierter Tensor $\mathbf{T}$
$\mathbf{1}$	Identitätstensor 2. Stufe, bzw. Einheitsmatrix
	$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{T}$	(Doppelstrich) Tensor 4. Stufe
$\mathbb{1}$	Identitätstensor 4. Stufe
$T_{ij}$	Komponente $ij$ des Tensors $\mathbf{T}$
	$\mathbf{T} = \sum_{i,j=1}^d T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$
${}^u\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{u})$	Tensor in Abhängigkeit der Lösung $\mathbf{u}$
$\mathcal{B}$	(kalligrafisch) Basis eines Vektorraums
${}_B\mathbf{T}$	Darstellung des Tensors $\mathbf{T}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$
$T_{r\varphi}$	Komponenten des Tensors $\mathbf{T}$ im Zylinderkoordinatensystem
	${}_z\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{rr} & T_{r\varphi} & T_{rz} \\ T_{\varphi r} & T_{\varphi\varphi} & T_{\varphi z} \\ T_{zr} & T_{z\varphi} & T_{zz} \end{pmatrix}$
$A \cup B$	Vereinigung von Mengen $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$
$A \setminus B$	Differenz von Mengen $A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$
$A \subset B$	$A$ ist Teilmenge von $B$ : Jedes Element von $A$ ist auch in $B$ enthalten
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$[a, b)$	halboffenes Intervall $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$	Skalarprodukt
	$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ für Vektoren } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$
	$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \text{tr}(\mathbf{S}^T \mathbf{T}) \text{ für Tensoren 2. Stufe und Matrizen}$
	$\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{T} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$	dyadisches Produkt $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^T$

Symbol	Bedeutung
$\mathbf{x} \times \mathbf{y}$	Kreuzprodukt $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$
$[\mathbf{x}]_{\mathbf{x}}$	schiefsymmetrische Matrix des Kreuzproduktes $[\mathbf{x}]_{\mathbf{x}} \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$
$\Delta$	Differenz einer Größe zwischen zwei Zeitpunkten $\Delta \square^{(k)} = \square^{(k)} - \square^{(k-1)}$
$\det$	Determinante
$\text{diag}(x_1, x_2, \dots)$	Diagonalmatrix mit den Einträgen $x_1, x_2, \dots$ auf der Diagonalen, ansonsten null $\text{diag}(x_1, x_2, \dots) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & x_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & x_3 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$
$\dim$	Dimension
$\text{Div } \mathbf{T}$	materielle Divergenzbildung eines Tensorfeldes $\text{Div } \mathbf{T} = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} \mathbf{e}_i$
$\text{div } \mathbf{t}$	räumliche Divergenzbildung eines Tensorfeldes $\text{div } \mathbf{t} = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i$
$\text{Grad}$	materielle Gradientenbildung $\text{Grad} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial X_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial X_3} \mathbf{e}_3$
$\text{grad}$	räumliche Gradientenbildung $\text{grad} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{e}_3$
$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}}$	materielle Gradientenbildung eines Vektorfeldes

Symbol	Bedeutung
	$\text{Grad } \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial X_1} & \frac{\partial v_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial X_d} \\ \frac{\partial v_2}{\partial X_1} & \frac{\partial v_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial v_2}{\partial X_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v_m}{\partial X_1} & \frac{\partial v_m}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial v_m}{\partial X_d} \end{pmatrix}$
$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}$	räumliche Gradientenbildung eines Vektorfeldes
	$\text{grad } \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_d} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_2}{\partial x_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v_m}{\partial x_1} & \frac{\partial v_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v_m}{\partial x_d} \end{pmatrix}$
tr	Spur, Summe der Hauptdiagonalelemente einer Matrix oder eines Tensors $\text{tr } \mathbf{M} = \sum_{i=1}^d M_{ii}$
$\langle z, x \rangle$	Anwendung von $z$ auf $x$
$\partial \Omega$	Rand des Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^d$
$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial \Omega$	Abschluss des Gebiets $\Omega$
$[Z(x)]_{x=a}^{x=b}$	Auswertung der Stammfunktion eines bestimmten Integrals in den Grenzen von $a$ bis $b$ : $\int_a^b z(x) \, dx = [Z(x)]_{x=a}^{x=b} := Z(b) - Z(a)$
$z(x) _{\Gamma_r}$	Funktion ausgewertet auf der Menge $x \in \Gamma_r$
$[z]_{(h)}$	räumliche Diskretisierung des Skalars $z$
$[z]^{(t)}$	zeitliche Diskretisierung des Skalars $z$
$\int_{\Omega} z \, d\Omega$	Integration der Funktion $z$ auf dem Gebiet $\Omega$ bzgl. des $d$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes
$\int_{\Gamma} z \, d\Gamma$	Integration der Funktion $z$ auf dem Rand des Gebiets $\Gamma = \partial \Omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$ bzgl. des Oberflächenmaßes
$ \Omega $	$d$ -dimensionales Volumen des Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $ \Omega  = \int_{\Omega} 1 \, d\Omega$
$\ \mathbf{x}\ _2$	euklidische Vektornorm $\ \mathbf{x}\ _2 = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$
$\frac{\partial z}{\partial x_i} = z_{,i}$	partielle Ableitung von $z$ nach der $i$ -ten Komponente des Vektors $\mathbf{x}$
$(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r})_E$	explizite Ableitung des Funktionals $\mathcal{J}$ nach $r$

<b>Symbol</b>	<b>Bedeutung</b>
$\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r}\right)_I$	implizite Ableitung des Functionals $\mathcal{J}$ nach $r$
$\cup$	Assemblierung der elementweisen Integrale zu einer globalen System-Matrix, bzw. einem globalen System-Vektor
$z_I, z_{IK}$	Größe $z$ in Abhängigkeit der Ansatzfunktionen des Knotens $I$ , bzw. der Knoten $I$ und $K$
$\dot{\mathbf{y}}$	Zeitableitung (Geschwindigkeit) $\dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{y}$
$\ddot{\mathbf{y}}$	zweifache Zeitableitung (Beschleunigung) $\ddot{\mathbf{y}} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{y}$
$^{(i)}\mathbf{y}$	Index der Newton-Iteration zu einem festen Zeischritt
$\mathbf{y}^{(k)}$	Index des diskreten Zeitpunkts der Zeitintegration
$\mathbf{y}^{(e)}$	Größe in einem finiten Element
$\mathbf{y}^{\text{lin}}$	Größe bei linearen Randbedingungen, linear elastischem Materialverhalten und kleinen Verschiebungen, ohne Zeitabhängigkeit
$\bar{\mathbf{y}}$	Anfangswert $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}(0)$
$\hat{\mathbf{y}}$	Amplitude einer Schwingung
$\mathbf{y}_h$	Lösung eines homogenen Differentialgleichungssystems
$\mathbf{y}_p$	partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems
$^u\mathbf{y}$	Größe abhängig von der Verschiebungslösung
$^\lambda\mathbf{y}$	Größe abhängig von der adjungierten Lösung
$\square_{(\text{ESZ})}$	Größe speziell für den ebenen Spannungszustand
$\square_{(\text{EVZ})}$	Größe speziell für den ebenen Verzerrungszustand

## Lateinische Zeichen

<b>Symbol</b>	<b>Bedeutung</b>	<b>Dimension</b>
$A$	Balkenquerschnitt	$\text{L}^2$
$\mathbf{A}_\alpha$	Tangentenvektor der Mittelfläche in der Bezugskonfiguration	$\text{L}$
$\mathbf{a}_\alpha$	Tangentenvektor der Mittelfläche in der Momentankonfiguration	$\text{L}$



Symbol	Bedeutung	Dimension
$\mathbf{a}_\alpha^{(e)}$	Tangentenvektor der Mittelfläche im Element $e$ in der Bezugskonfiguration	L
$\mathbf{a}_\alpha^{(e)}$	Tangentenvektor der Mittelfläche im Element $e$ in der Momentankonfiguration	L
$\mathbf{a}_p$	Koeffizientenvektor der partikulären Ansatzfunktion	$\text{L} \cdot \text{T}^{-1}$
$b$	Breite des Balkens	L
$B_r(\mathbf{X}_0)$	virtuelle Kugel mit Radius $r$ um den Punkt $\mathbf{X}_0$	-
$C_{rh}(\mathbf{X}_0)$	virtueller Zylinder mit Radius $r$ und Höhe $h$ um den Punkt $\mathbf{X}_0$ auf der Mittelfläche	-
$c_r(\mathbf{X}_0)$	allgemeine Ausscheidfunktion um den Punkt $\mathbf{X}_0$ mit Parameter $r$	-
$c_d$	spezifischer Dämpfungskoeffizient	$\text{M} \cdot \text{T}^{-1} \text{L}^{-3}$
$\mathbf{C}$	Dämpfungsmatrix	$\text{M} \cdot \text{T}^{-1}$
$\mathbf{C}$	Elastizitätstensor (4. Stufe)	$\text{M} \cdot \text{L}^{-1} \text{T}^{-2}$
$\mathbf{C}_{(\text{ESZ})}$	Elastizitätstensor des ebenen Spannungszustands	$\text{M} \cdot \text{L}^{-1} \text{T}^{-2}$
$d$	Dimension des stukturmechanischen Problems, $d \in \{2, 3\}$	-
$\mathbf{d}$	Deformationsrate, Verzerrungsgeschwindigkeitstensor	$\text{T}^{-1}$
$\mathbf{d}$	Schalendirektor in der Momentankonfiguration	-
$\mathbf{d}^{(e)}$	Schalendirektor im Element $e$ in der Momentankonfiguration	-
$\mathbf{D}$	Elastizitätmatrix in Voigtscher Notation	$\text{M} \cdot \text{L}^{-1} \text{T}^{-2}$
$\mathbf{D}_{(\text{ESZ})}$	Elastizitätmatrix des ebenen Spannungszustands in Voigtscher Notation	$\text{M} \cdot \text{L}^{-1} \text{T}^{-2}$
$\mathbf{e}_i$	globaler Einheitsvektor mit 1 an der $i$ -ten Stelle, und 0 sonst	-
$\mathbf{e}_r$	Einheitsvektor in radialer Richtung des lokalen Zylinderkoordinatensystems	-

Symbol	Bedeutung	Dimension
$\mathbf{e}_\varphi$	Einheitsvektor in Umfangsrichtung des lokalen Zylinderkoordinatensystems	-
$\mathbf{e}_\alpha^{\text{loc}}$	schalentangentialer Einheitsvektor	-
$\mathcal{E}^{\text{glob}}$	globale kartesische Basis des $\mathbb{R}^3$	-
$\mathcal{E}^{\text{loc}}$	lokale schalentangentiale Koordinatenbasis	-
${}^u\mathbf{E}^{\text{loc}}$	Transformationsmatrix für das schalentangentiale Koordinatensystem in der Momentankonfiguration ${}^u\mathcal{E}^{\text{loc}}$	-
${}^\lambda\mathbf{E}^{\text{loc}}$	Transformationsmatrix für das schalentangentiale Koordinatensystem in der adjungierten Momentankonfiguration ${}^\lambda\mathcal{E}^{\text{loc}}$	-
$E$	Elastizitätsmodul	$\text{M} \cdot \text{L}^{-1}\text{T}^{-2}$
$E_{(\text{EVZ})}$	Ersatz-Elastizitätsmodul des ebenen Verzerrungszustands	$\text{M} \cdot \text{L}^{-1}\text{T}^{-2}$
$E_p$	plastischer Modul, Steigung der Fließkurve	$\text{M} \cdot \text{L}^{-1}\text{T}^{-2}$
$E_T$	Tangente der Spannungs-Dehnungskurve, Tangentenmodul	$\text{M} \cdot \text{L}^{-1}\text{T}^{-2}$
$\bar{E}_T$	durchschnittlicher effektiver Elastizitätsmodul	$\text{M} \cdot \text{L}^{-1}\text{T}^{-2}$
$\mathbf{E}$	Green-Lagrangescher Verzerrungstensor	-
$\mathbf{f}$	Volumenkraft	$\text{M} \cdot \text{T}^{-2}\text{L}^{-2}$
$f$	Korrekturfunktion der topologischen asymptotischen Entwicklung	$\text{L}^3$
$f_{\alpha\beta}$	Schnittkraft (pro Längeneinheit)	$\text{M} \cdot \text{T}^{-2}$
${}^\lambda f_{\alpha\beta}$	adjungierte Schnittkraft (pro Längeneinheit)	$\dim(\mathcal{J}) \cdot \text{L}^{-2}\text{T}^{-1}$
$F$	Einzelkraft	$\text{ML} \cdot \text{T}^{-2}$
$\mathbf{F}$	Deformationsgradient	-
${}^u\mathbf{F}$	Deformationsgradient der Zustandslösung $\mathbf{F}(\mathbf{u})$	-
${}^\lambda\mathbf{F}$	Deformationsgradient der adjungierten Zustandslösung $\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda})$	$\dim(\mathcal{J}) \text{T} \cdot \text{M}^{-1}\text{L}^{-2}$
$\mathbf{F}_{[C]}$	über die Schalendicke konstanter Anteil des Deformationsgradienten	-

Symbol	Bedeutung	Dimension
$F_{[L]}$	über die Schalendicke linearer Anteil des Deformationsgradienten	-
$F^{(e)}$	Deformationsgradient im Element $e$	-
$\mathbf{G}_i$	kovarianter Basisvektor der Bezugskonfiguration	L
$\mathbf{G}^i$	kontravarianter Basisvektor der Bezugskonfiguration	L <sup>-1</sup>
$\mathbf{g}_i$	kovarianter Basisvektor der Momentankonfiguration	L
$\mathbf{g}^i$	kontravarianter Basisvektor der Momentankonfiguration	L <sup>-1</sup>
$\mathbf{g}^{(k)}$	Gleichgewicht zu einem diskreten Zeitpunkt $k$ $\mathbf{g}^{(k)} = \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)})$	ML · T <sup>-2</sup>
$\mathbf{g}^{*(k)}$	adjungiertes Gleichgewicht zu einem diskreten Zeitpunkt $k$ $\mathbf{g}^{*(k)} = \mathbf{g}^*(\boldsymbol{\lambda}^{(k)})$	dim( $\mathcal{J}$ ) · L <sup>-1</sup>
$G$	Gleichgewichtsfunktional	ML · T <sup>-2</sup>
$G^{\text{lin}}$	lineares Gleichgewichtsfunktional	ML · T <sup>-2</sup>
$G^*$	adjungiertes Gleichgewichtsfunktional	dim( $\mathcal{J}$ ) · L <sup>-1</sup>
$G^{*\text{lin}}$	lineares adjungiertes Gleichgewichtsfunktional	dim( $\mathcal{J}^{\text{lin}}$ ) · L <sup>-1</sup>
$h$	Schalendicke	L
$\mathbf{H}$	Verschiebungsgradient	-
$I_2$	Flächenträgheitsmoment bezüglich der globalen $\mathbf{e}_2$ -Achse	L <sup>4</sup>
$\mathbf{J}_\xi^{(e)}$	Jacobi-Matrix des Elements $e$ bezüglich der Iso-Koordinaten des Referenzelements	L
$J_G$	Gramsche Determinante	L <sup>4</sup>
$j$	diskretes Funktional	dim( $\mathcal{J}$ )
$\mathcal{J}$	stetiges Funktional	
$\mathcal{J}_u$	Verschiebungsfunktional	L
$\mathcal{J}_u^{\text{lin}}$	lineares Verschiebungsfunktional	L
$j_u$	diskretes Verschiebungsfunktional	L
$\mathcal{J}_\sigma$	innere Energie	ML <sup>2</sup> · T <sup>-2</sup>

Symbol	Bedeutung	Dimension
$\mathcal{J}_\sigma^{\text{lin}}$	Formänderungsenergie	$\text{ML}^2 \cdot \text{T}^{-2}$
$j_\sigma$	diskrete innere Energie	$\text{ML}^2 \cdot \text{T}^{-2}$
$\hat{\mathcal{J}}$	erweitertes stetiges Funktional	$\text{dim}(\mathcal{J})$
$\hat{j}$	erweitertes diskretes Funktional	$\text{dim}(\mathcal{J})$
$k$	Spannungskonzentrationsfaktor	-
$\mathbf{K}$	Steifigkeitsmatrix	$\text{M} \cdot \text{T}^{-2}$
$\mathbf{K}_\mathbf{T}$	Tangentensteifigkeitsmatrix	$\text{M} \cdot \text{T}^{-2}$
$\hat{\mathbf{K}}$	effektive Steifigkeitsmatrix	$\text{M} \cdot \text{T}^{-2}$
$l$	Länge des Balkens	L
$\mathbf{l}$	räumlicher Geschwindigkeitsgradient	$\text{T}^{-1}$
$\mathbf{l}$	Einheitsvektor der den Richtungseinheitsvektor $\mathbf{v}$ an einem Punkt $\mathbf{X}_\star$ den Systemfreiheitsgraden des FE-Modells zuordnet	-
$m_{\alpha\beta}$	Schnittmoment (pro Längeneinheit)	$\text{ML} \cdot \text{T}^{-2}$
$\lambda m_{\alpha\beta}$	adjungiertes Schnittmoment (pro Längeneinheit)	$\text{dim}(\mathcal{J}) \cdot \text{L}^{-1} \text{T}^{-1}$
$\mathbf{M}$	globale Massenmatrix	M
$\mathbf{M}^{(e)}$	Massenmatrix des Elements $e$	M
$\mathcal{M}$	Mittelfläche einer Schale	-
$\mathcal{M}^{(e)}$	Mittelfläche des finiten Elements $e$	-
$m$	Anzahl der diskreten Zeitschritte bei der Zeitintegration	-
$m_i^*$	modale Masse der $i$ -ten Eigenschwingungsform	M
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	-
$N_I$	diskrete Ansatzfunktion des Knotens $I$ des Referenzelements	-
$n_e$	Anzahl der finiten Elemente zur Diskretisierung des Körpers $\Omega$	-
$n_f$	Anzahl der Freiheitsgrade des diskretisierten mechanischen Systems	-

Symbol	Bedeutung	Dimension
$n_{\mathcal{M}}$	Anzahl der Flächenintegrationspunkte im finiten Element	-
$n_p$	Anzahl der Integrationspunkte im finiten Element	-
$n_r$	Anzahl der am Rand des Körpers liegenden finiten Elemente	-
$n_z$	Anzahl der Dickenintegrationspunkte im finiten Element	-
$\mathbf{n}$	äußerer Normalenvektor in der räumlichen Beschreibung	-
$\mathbf{n}_t$	äußerer Normalenvektor des formvariierten Gebiets	-
$\mathbf{N}$	äußerer Normalenvektor in der materiellen Beschreibung	-
$\mathbf{n}$	Schalennormale in der Momentankonfiguration	-
$\mathbf{N}$	Schalennormale in der Bezugskonfiguration	-
$\mathbf{N}^{(e)}$	Normalenvektor der Schale im Element $e$	-
$\mathbf{N}_r$	Normalenvektor auf dem Aussparungsrand	-
$\mathcal{P}$	Pseudolast	$\dim \mathcal{J} \cdot \mathbf{L}$
$P^{(k)}$	Summand der zeitlich diskretisierten Pseudolast zugeordnet zum Zeitpunkt $t^{(k)}$	$\dim \mathcal{J} \cdot \mathbf{L}$
$P_u^{(k)}$	Summand der zeitlich diskretisierten Pseudolast des Verschiebungsfunktional zugeordnet zum Zeitpunkt $t^{(k)}$	$\dim \mathcal{J}_u \cdot \mathbf{L}$
$P_\sigma^{(k)}$	Summand der zeitlich diskretisierten Pseudolast der inneren Energie zugeordnet zum Zeitpunkt $t^{(k)}$	$\dim \mathcal{J}_\sigma \cdot \mathbf{L}$
$p$	Exponent der Verschiebung im Verschiebungsfunktional	-
$\mathbf{q}$	Vektor aller auf die Struktur wirkenden Lasten	$\mathbf{ML} \cdot \mathbf{T}^{-2}$
$\mathbf{q}^{(e)}$	Vektor aller auf das Element $e$ wirkenden Lasten	$\mathbf{ML} \cdot \mathbf{T}^{-2}$
$r$	Dimensionierungsparameter des virtuellen Ausschnitts	$\mathbf{L}$

Symbol	Bedeutung	Dimension
$\mathbf{r}(\mathbf{u})$	zur virtuellen inneren Energie gehörende Kraft	$\text{ML} \cdot \text{T}^{-2}$
$\mathbf{r}(\mathbf{u}^{(k)})$	zur virtuellen inneren Energie gehörende Kraft zum Zeitpunkt $k$	$\text{ML} \cdot \text{T}^{-2}$
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen	-
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen ( $\geq 0$ )	-
$\mathbb{R}^d$	$d$ -dimensionaler euklidischer Vektorraum	-
$R$	Restglied bei der Reihenentwicklung des Gleichgewichtsfunktional	$\text{ML} \cdot \text{T}^{-2}$
$\mathbf{R}$	Restgliedvektor bei der Reihenentwicklung des diskretisierten Gleichgewichts	$\text{ML} \cdot \text{T}^{-2}$
$\mathcal{R}$	Restglied bei der Potenzreihenentwicklung des Funktional $\mathcal{J}$	$\dim(\mathcal{J})$
$\mathbf{R}$	Rodrigues-Rotationsmatrix	-
$\mathbf{R}^{(e)}$	Rodrigues-Rotation im Element $e$	-
$s$	Steilheit der effektiven Querkontraktionsfunktion	-
$s$	Substitutionsintegral der Rückwärtsintegration	T
$\mathbf{S}$	2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor	$\text{M} \cdot \text{L}^{-1} \text{T}^{-2}$
${}^u\mathbf{S}$	2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor in Abhängigkeit der Zustandslösung	$\text{M} \cdot \text{L}^{-1} \text{T}^{-2}$
$\mathbf{S}^{(e)}$	2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor im Element $e$	$\text{M} \cdot \text{L}^{-1} \text{T}^{-2}$
$t$	Zeit	T
$T$	Endzeitpunkt, Gültigkeitsende des mechanischen Systems	T
$T_\omega$	Schwingungsdauer der Eigenschwingung mit der Eigenkreisfrequenz $\omega$	T
$t$	Parameter der Formvariation	L
$T_t$	parametrisierte Formvariation	L
$\mathcal{T}\mathcal{J}$	Topologische Ableitung des stetigen Funktional $\mathcal{J}$	$\dim(\mathcal{J}) \cdot \text{L}^{-3}$

Symbol	Bedeutung	Dimension
$\mathcal{T}_j$	Topologische Ableitung des diskreten Funktionals $j$	$\dim(\mathcal{J}) \cdot \text{L}^{-3}$
$\mathbf{u}$	Verschiebung	L
$\mathbf{u}_h$	Lösung der homogenen Verschiebungsdifferentialgleichung	L
$\mathbf{u}_p$	Partikulärlösung der inhomogenen Verschiebungsdifferentialgleichung	L
$\hat{\mathbf{u}}$	Darstellung der Verschiebung im Basissystem der Eigenvektoren	L
$\hat{u}_{k_c}$	Amplitude des Kosinusteils der Eigenschwingung	L
$\hat{u}_{k_s}$	Amplitude des Sinusteils der Eigenschwingung	L
$\hat{\mathbf{u}}_{\text{Statik}}$	Verschiebung bei rein statischer Belastung ohne Berücksichtigung der Massenträgheit	L
$\mathbf{u}^{(e)}$	Beschreibung der Verschiebung im Element $e$	L
$\mathbf{v}$	Richtungsvektor zur Messung der Verschiebung	-
$\mathbf{v}_t$	Richtung der Formvariation	-
$\mathbf{v}$	Eigenvektor des Masse-Steifigkeitssystems $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$	-
$\mathbf{V}$	Modalmatrix aus Eigenvektoren	-
$w_i^{(p)}$	Integrationsgewicht $i$ der Quadratur der Elementansatzfunktionen	-
$w^{(k)}$	Integrationsgewicht der zeitlichen Integration für den $k$ -ten Zeitschritt	T
$\mathbf{w}$	Spintensor	$\text{T}^{-1}$
$\mathbf{X}, \mathbf{x}$	Ortsvektoren in der Bezugs- und Momentankonfiguration	L
$\mathbf{X}^{(e)}, \mathbf{x}^{(e)}$	Beschreibung der Elementgeometrie des Elements $e$ in der Bezugs- und Momentankonfiguration	L
$\mathbf{X}_{\mathcal{M}}$	Ortsvektor auf der Schalenmittelfläche	L
$\mathbf{X}_0$	Ortsvektor der Aussparung	L

Symbol	Bedeutung	Dimension
$\mathbf{X}_*$	Ortskoordinate des Messpunktes der Einzelpunktverschiebung	L
$\mathbf{Y}$	Ortsvektor in der Bezugskonfiguration	L
$\mathcal{Z}^{\text{loc}}$	lokales Zylinderkoordinatensystem	-
$z$	allg. Bezeichnung einer Funktion zur Erklärung der Schreibweisen	
$z$	innere Funktion des Funktionals $\mathcal{J}$	$\dim \mathcal{J} \cdot \text{L}^{-3} \text{T}^{-1}$
$z$	Dickenkoordinate der Schale	L
$z$	Höhenkoordinate des Zylinder-Koordinatensystems	L

## Griechische Zeichen

Symbol	Bedeutung	Dimension
$\alpha_1$	Konstante des Newmarkverfahrens	$\text{T}^{-2}$
$\alpha_1^*$	Konstante des Newmarkverfahrens zur Lösung des adjungierten Endwertproblems	$\text{T}^{-2}$
$\alpha_2$	Konstante des Newmarkverfahrens	$\text{T}^{-1}$
$\alpha_2^*$	Konstante des Newmarkverfahrens zur Lösung des adjungierten Endwertproblems	$\text{T}^{-1}$
$\alpha_3$	Konstante des Newmarkverfahrens	-
$\alpha_3^*$	Konstante des Newmarkverfahrens zur Lösung des adjungierten Endwertproblems	-
$\alpha_4$	Konstante des Newmarkverfahrens	$\text{T}^{-1}$
$\alpha_4^*$	Konstante des Newmarkverfahrens zur Lösung des adjungierten Endwertproblems	$\text{T}^{-1}$
$\alpha_5$	Konstante des Newmarkverfahrens	-
$\alpha_5^*$	Konstante des Newmarkverfahrens zur Lösung des adjungierten Endwertproblems	-
$\alpha_6$	Konstante des Newmarkverfahrens	T
$\alpha_6^*$	Konstante des Newmarkverfahrens zur Lösung des adjungierten Endwertproblems	T



Symbol	Bedeutung	Dimension
$\beta$	Newmarkparameter der Verschiebung	-
$\gamma$	Newmarkparameter der Geschwindigkeit	-
$\gamma_k$	Abkürzung in der Balkeneigenform	-
$\Gamma$	Rand des Körpers $\Omega$ (Dimension $d - 1$ )	-
$\Gamma_N$	Rand des Körpers mit aufgebrachten Spannungen (Neumannsche Randbedingung)	-
$\Gamma_D$	Rand des Körpers mit aufgebrachten Verschiebungen (Dirichletsche Randbedingung)	-
$\Gamma_r$	Rand des Ausschnitts $\Gamma_r = \partial c_r(\mathbf{X}_0)$	-
$\Gamma_t$	Rand des formvariierten Gebiets $\Omega_t$	-
$\delta$	Intervallgrenze für Formvariationsparameter $t$	L
$\delta_i^k$	Kronecker-Delta	-
$\epsilon$	Störung des Dimensionierungsparameters der Ausparung zur Bildung des Differenzenquotienten	L
$\epsilon_g$	Toleranz des Kraftresiduums bei impliziter Zeitintegration	ML · T <sup>-2</sup>
$\boldsymbol{\varepsilon}$	linearer Verzerrungstensor	-
$\varepsilon_{\text{eff}}^e$	Fließverzerrung	-
$\varepsilon_{\text{eff}}^{pl}$	effektive plastische Dehnung	-
$\lambda \boldsymbol{\varepsilon}$	linearisierter Verzerrungstensor der adjungierten Lösung	dim ( $\mathcal{J}$ ) T · M <sup>-1</sup> L <sup>-2</sup>
$\Theta_i$	konvektive Koordinate	-
$\theta$	Rotationswinkel des Schalendirektors $\mathbf{d}$ um die Rotationsachse $\frac{\boldsymbol{\theta}}{\ \boldsymbol{\theta}\ _2}$	-
$\theta_i$	Rotationswinkel um die Achse $\mathbf{e}_i$	-
$\kappa$	räumliche „Eigenfrequenz“ des Balkens	L <sup>-1</sup>
$\lambda$	Eigenwert des Masse-Steifigkeitssystems $(\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{v} = \mathbf{0}$	T <sup>-1</sup>
$\hat{\lambda}_c$	Amplitude des Kosinusteils der Eigenschwingung	L · T <sup>-1</sup>

Symbol	Bedeutung	Dimension
$\hat{\lambda}_k$	Amplitude der $k$ -ten adjungierten Eigenschwingung	$\text{L} \cdot \text{T}^{-1}$
$\hat{\lambda}_s$	Amplitude des Sinusteils der Eigenschwingung	$\text{L} \cdot \text{T}^{-1}$
$\lambda$	Lösung der adjungierten Zustandsgleichung	$\dim(\mathcal{J}) \text{T} \cdot \text{M}^{-1} \text{L}^{-1}$
$\lambda^{(e)}$	Beschreibung der adjungierten Lösung im Element $e$	$\dim(\mathcal{J}) \text{T} \cdot \text{M}^{-1} \text{L}^{-1}$
$\Lambda$	Eigenform des Balkens	-
$\lambda_u$	Adjungierte des Verschiebungsfunktionals	$\text{T} \cdot \text{M}^{-1}$
$\lambda_u^{\text{lin}}$	Adjungierte des linearen Verschiebungsfunktionals	$\text{T}^2 \cdot \text{M}^{-1}$
$\lambda_\sigma$	Adjungierte der inneren Energie	$\text{L} \cdot \text{T}^{-1}$
$\lambda_\sigma^{\text{lin}}$	Adjungierte der Formänderungsenergie	$\text{L}$
$\lambda_u$	Lagrange-Multiplikator der Verschiebungsapproximation	$\dim(\mathcal{J}) \cdot \text{L}^{-1}$
$\lambda_v$	Lagrange-Multiplikator der Geschwindigkeitsapproximation	$\dim(\mathcal{J}) \text{T} \cdot \text{L}^{-1}$
$\tilde{\lambda}$	rückwärts geordnete adjungierte Lösung	$\dim(\mathcal{J}) \text{T} \cdot \text{M}^{-1} \text{L}^{-1}$
$\mu$	Lamésche Konstante	$\text{M} \cdot \text{L}^{-1} \text{T}^{-2}$
$\nu$	Querkontraktionszahl	-
$\nu_{(\text{EVZ})}$	Ersatz-Querkontraktionszahl des ebenen Verzerrungszustands	-
$\nu_{\text{eff}}$	effektive Querkontraktion	-
$\nu_{\text{eff}(\text{ESZ})}$	interpolierte effektive Querkontraktion des ebenen Spannungszustands beim Übergang auf plastische Dehnung	-
$\nu_{\text{eff}(\text{EVZ})}$	interpolierte effektive Querkontraktion des ebenen Verzerrungszustands beim Übergang auf plastische Dehnung	-
$\nu'_{(\text{ESZ})}$	Platten-Faktor	-
$\bar{\nu}_{\text{eff}}$	durchschnittliche effektive Querkontraktion	-
$\bar{\nu}'$	durchschnittlicher Platten-Faktor	-
$\xi_\alpha$	Flächenparameter der Schale	-

Symbol	Bedeutung	Dimension
$\xi_3$	Dickenparameter der Schale	-
$\varrho$	Dichte	$M \cdot L^{-3}$
$\sigma$	Cauchyscher Spannungstensor in der Momentankonfiguration	$M \cdot L^{-1}T^{-2}$
$\lambda\sigma$	Cauchyscher Spannungstensor der adjungierten Lösung	$\dim(\mathcal{J}) \cdot L^{-3}T$
$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta(P)}$	Plattenspannungsanteil der Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors	$M \cdot L^{-1}T^{-2}$
$\sigma_{\alpha\beta(S)}$	Scheibenspannungsanteil der Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors	$M \cdot L^{-1}T^{-2}$
$\sigma_0$	einachsige außen angelegte Spannung	$M \cdot L^{-1}T^{-2}$
$\sigma^*$	maximale Umfangsspannung am Rand der Aussparung	$M \cdot L^{-1}T^{-2}$
$\sigma_y$	Fließgrenze	$M \cdot L^{-1}T^{-2}$
$\tilde{\sigma}_y$	zeitlich lokale Fließspannung	$M \cdot L^{-1}T^{-2}$
$\sigma_H$	Nennspannung	$M \cdot L^{-1}T^{-2}$
$\tau$	äußere Spannungen in der Momentankonfiguration	$M \cdot L^{-1}T^{-2}$
$\tau$	äußere Spannungen in der Bezugskonfiguration	$M \cdot L^{-1}T^{-2}$
$\varphi$	Umfangskordinate des Zylinder-Koordinatensystems	-
$\varphi$	Abbildung zwischen Bezugskonfiguration und Momentankonfiguration	L
$\varphi_M$	Konfigurationsabbildung der Schalenmittelfläche	L
$\phi_k$	Phasenverschiebung der $k$ -ten Eigenschwingung	-
$\phi$	Testfunktion, bzw. virtuelle Verrückung	
$\phi^{(e)}$	Testfunktion im Element $e$	
$\psi$	Lamésche Konstante	$M \cdot L^{-1}T^{-2}$
$\psi_{(ESZ)}$	Lamésche Konstante des ebenen Spannungszustands	$M \cdot L^{-1}T^{-2}$
$\omega_k$	$k$ -te Eigenkreisfrequenz eines schwingenden Systems	$T^{-1}$

---

Symbol	Bedeutung	Dimension
$\boldsymbol{\omega}$	Vektor der Winkelgeschwindigkeiten der Rotation	$\text{T}^{-1}$
$\Omega$	mechanischer Körper	-
$\Omega_r$	mechanischer Körper mit Aussparung $\Omega_r = \Omega \setminus \overline{c_r(\mathbf{X}_0)}$	-
$\Omega_t$	durch Formvariation variiertes Gebiet	-
$\Omega_{\square}$	isoparametrisches Referenzelement	-
$\Omega^{(e)}$	finites Element $e$	-
$\partial\Omega^{(e)}$	Rand (Kante, bzw. Fläche) des finites Elements $e$	-
$\Omega^{(h)}$	Diskretisierung des Körpers $\Omega$	-
$\partial\Omega^{(h)}$	Rand des diskretisierten Körpers	-



# 1 Einleitung

Die crashgerechte Karosserieentwicklung dient der Verbesserung der passiven Fahrzeugsicherheit. Bei einem nicht mehr vermeidbaren Unfall soll das Verletzungsrisiko der Insassen der Fahrzeuge und Fußgänger reduziert werden. Außerdem ist die Kraftstoffdichtigkeit der Tankanlage und in neuen Technologien auch der Hochvolt-batterieschutz ein wichtiges Entwicklungskriterium. Weitere Anwendungsgebiete für crashsichere Auslegung sind Bahnverkehr, Schutz von Transportgütern und mittlerweile auch die Auslegung von Kabinensystemen von Großraumflugzeugen. Die passive Sicherheit kann durch eine stabile Fahrgastzelle und durch Energieumwandlung der kinetischen Energie in Dehnungsenergie im Knautschzonenbereich zum Beispiel durch Faltenbeulen erreicht werden.

Als Berechnungsmethode wird in der crashsicheren Entwicklung zur Auslegung von Teilen der Karosserie die Methode der finiten Elemente zur Approximation der analytischen Lösung verwendet. Das kinematische Verhalten des Fahrzeugs wird dabei rechnerisch erfasst. Das Verletzungsrisiko von Insassen und Fußgängern wird mit Dummys bewertet, bei denen Beschleunigungen, Deformationen und Kräfte gemessen werden. Die Simulation erlaubt detaillierte Einblicke in den zeitlichen Ablauf der Deformationen, so dass Schnittkräfte ausgewertet werden können, ein zielgerichteter Kraftfluss innerhalb der Karosserie gewährleistet wird und Deformationen in schützenswerten Bereichen vermieden werden.

## 1.1 Problemstellung und Motivation

Auf Basis der Crashsimulation kann der Einsatz von Optimierungsmethoden zur Dimensionierung, Form und Topologie von Komponenten der Karosserie sinnvoll sein. Insbesondere die Topologieoptimierung, bei der die Lage und Anordnung von Strukturelementen bestimmt wird, kann hier einen wertvollen Beitrag leisten. Sie ist die flexibelste Form der Optimierung, da nicht nur eine Änderung der Dimension und Form, sondern auch Aussparungen innerhalb der Struktur zugelassen werden. Bei der Topologieoptimierung wird für jeden Punkt des Bauraums

entschieden, ob dort Material ist oder nicht. Damit entsteht eine sehr hohe Anzahl an Entwurfsvariablen, welche die zu optimierenden Parameter der Struktur sind. Analytische Sensitivitäten der Ziel- und Restriktionsfunktionen bezüglich der Entwurfsvariablen ermöglichen eine effiziente Optimierung. Jedoch ist ein Crash hochgradig nichtlinear und dies erschwert die Ermittlung von analytischen Sensitivitäten für die Optimierung. Die Nichtlinearitäten werden in drei wesentlichen Gruppen kategorisiert:

1. Geometrische Nichtlinearität

Große Deformationen und Rotationen genauso wie große Verzerrungen erfordern die Betrachtung mittels nichtlinearer Verzerrungsmaße, die die Geometrie exakt erfassen. Stabilitätsphänomene wie Durchschlags- und Verzweigungsprobleme (beispielsweise Knicken und Beulen) gehören ebenfalls in die Kategorie der geometrisch nichtlinearen Phänomene.

2. Nichtlineares Materialverhalten

Typischerweise tritt bei metallischen Werkstoffen ein elasto-plastisches oder ein viskoplastisches Materialverhalten auf. Das bedeutet, es entstehen bleibende Verformungen durch plastisches Fließen. Bei *isotroper Verfestigung* ist die Fließgrenze nach einer Entlastung und erneuter Belastung richtungsunabhängig größer. Erhöht sich die Fließgrenze bei schnellerer Belastung, dann wird von *kinematischer Verfestigung* gesprochen. Bei hinreichend großen Deformationen versagt der Werkstoff schließlich.

3. Nichtlineare Randbedingungen

Ändern sich während der Deformation die Randbedingungen wie zum Beispiel durch Kontakt zu umgebenden Bauteilen wird von nichtlinearen Randbedingungen gesprochen. Beim Crash sind Kontaktphänomene als Abstützungseffekte explizit erwünscht.

Gerade Durchschlags- und Verzweigungsprobleme machen das Crashverhalten sehr schwer vorhersagbar. Eine Crashsimulation umfasst alle genannten Nichtlinearitäten und ist damit das erdenklich komplizierteste an transienter, also dynamisch veränderlicher, strukturmechanischer Modellierung. Die gesamte Komplexität resultiert in langen Rechenzeiten, selbst für eine einzelne Crashsimulation.

Das Ziel dieser Dissertation ist die Entwicklung einer analytischen Sensitivität für die Topologieoptimierung crashbelasteter Strukturen. Mithilfe der sogenannten *adjungierten Methode* und einer Interpolation des elasto-plastischen Materialverhaltens wird ein Berechnungsverfahren zur Bestimmung der als *Topologische*

*Ableitung* bezeichneten Sensitivität unter großen transienten Deformationen und Verzerrungen und nichtlinearem Materialverhalten entwickelt.

## 1.2 Aufbau der Dissertation

Zur Einordnung der Topologischen Ableitung wird im nächsten Kapitel der Stand der Forschung zur Topologieoptimierung crashbelasteter Strukturen vorgestellt. Der Ausgangspunkt für die Entwicklung der nichtlinearen Topologischen Ableitung ist die Darstellung der aktuellen Anwendung bei klassischen linearen Problemstellungen.

In Kapitel 3 werden die Grundlagen der nichtlinearen Struktursimulation erläutert. Dies umfasst die kontinuierliche Beschreibung der Bewegung als Anfangsrandwertproblem bis hin zur räumlichen Diskretisierung mit der Methode der finiten Elemente. Die Lösung des diskreten Anfangsrandwertproblems erfolgt dann mit impliziter Zeitintegration.

Die nichtlinear transiente Topologische Ableitung wird in Kapitel 4 hergeleitet. Dazu wird zunächst die Definition der Topologischen Ableitung mit dem Differentialquotienten eingeführt und die Verbindung zur sogenannten *Formableitung* erläutert. Die Berechnung der Formableitung erfolgt nach zwei gleichwertigen Schemata mithilfe der adjungierten Methode. Die Definition dreier Funktionale, die für die crashgerechte Karosserieentwicklung verwendet werden, vervollständigt den rein analytischen Teil dieser Arbeit. Bis hierhin sind alle Ergebnisse sowohl für Schalen- als auch für Volumenmodelle gültig.

Die spezielle Anwendung bei Schalenmodellen zur Auslegung von Blechbauteilen wird in Kapitel 5 thematisiert. Obwohl die konkrete Modellierung des nichtlinearen Materialverhaltens bei der Herleitung nicht verwendet wird, wird diese zur finalen Berechnung der Topologischen Ableitung benötigt. Beispielhaft wird anhand eines elasto-plastischen Materialmodells eine Materialinterpolation entwickelt und die Topologische Ableitung berechnet.

Die Anwendung und Prüfung der Plausibilität der entwickelten Berechnungsmodelle der nichtlinear transienten Topologischen Ableitung erfolgt an zwei praktischen Beispielen. Mit einem Balken kann der Grenzübergang zur linearen Topologischen Ableitung aufgezeigt werden. Die Komplexität wird dann hin zu großen Verschiebungen und schließlich zur hochdynamischen Belastung eines Kragträgers mit plastischen Dehnungen gesteigert.

Die Ergebnisse werden in Kapitel 7 zusammengefasst und weitere Untersuchungs- und Anwendungsmöglichkeiten diskutiert.





## 2 Stand der Forschung

Die Methoden zur Topologieoptimierung crashbelasteter Strukturen werden zunächst in zwei Teilen vorgestellt. Im ersten Teil werden Methoden diskutiert, die basierend auf Heuristiken oder Ersatz-Sensitivitäten die Topologie verändern. Im zweiten Abschnitt werden die Methoden vorgestellt, die bereits eine analytische Sensitivitätenbestimmung beinhalten. Die diskutierten Verfahren werden anschließend hinsichtlich der Vertrauenswürdigkeit und Anwendbarkeit mit Crashsimulationen geprüft. Die Topologische Ableitung und ihre Anwendungsmöglichkeiten werden im finalen Abschnitt dieses Kapitels motiviert.

### 2.1 Topologieoptimierung crashbelasteter Strukturen mit Ersatz-Sensitivitäten

Heuristiken sind methodische Anleitungen basierend auf abgeleitetem Expertenwissen. Als Ersatz-Sensitivitäten werden hier Sensitivitäten bezeichnet, die für Ersatz-Zielfunktionale entwickelt wurden und daher nur indirekt mit dem Optimierungsziel im Crash zusammenhängen. Einige der Verfahren können in den Entwicklungsprozess von Fahrzeugkarosserien durch kommerzielle Software bereits integriert werden.

Die Grundlage für die Arbeit von Mayer et al. 1996 ist die *Homogenisierungsmethode* (Bendsøe und Kikuchi 1988). Der Zusammenhang zwischen Materialdichte und Elastizitätsmodul wird durch die Homogenisierung einer periodischen Mikrostruktur hergeleitet. Diese Mikrostruktur setzt sich aus sogenannten Mikrozellen zusammen und stellt poröses Material dar. Die Mikrozellen selbst sind aus massivem Material mit einer Aussparung, deren Maße und Orientierung die Entwurfsvariablen sind. Die Ermittlung des Elastizitätsmoduls erfolgt numerisch mit einer sehr feinen Finite-Elemente-Berechnung der Mikrozele für verschiedene Kombinationen der Entwurfsvariablen. Damit kann eine Approximation für den

Elastizitätsmodul aufgestellt und die Ableitung bezüglich der Entwurfsvariablen gebildet werden.

Bei der Übertragung auf die Optimierung crashbelasteter Strukturen, werden bei Mayer et al. 1996 quadratische Aussparungen variabler Größe verwendet, um den Elastizitätsmodul, die Fließgrenze und den Tangentenmodul eines bilinearen elasto-plastischen Materialmodells mit linearer Verfestigung zu beeinflussen. Ziel der Optimierung ist die Maximierung der Energieaufnahme der Struktur bei einem Heckaufprall. Das Zielfunktional wird aus den gewichteten inneren Energien der Gesamtstruktur zu diskreten Zeitpunkten während der Berechnung zusammengesetzt. Die Entwurfsvariablen sind die relativen Dichten des Materials jedes Elements, die durch die Aussparungen entstehen. Die Anpassung der Dichten erfolgt mit dem Optimalitätskriterium. Nach der Dichteanpassung werden Elemente mit Dichte unterhalb eines Grenzwertes gelöscht und die Dichten der verbleibenden Elemente wieder auf die Volldichte ohne Porosität gesetzt. Einmal gelöscht, können Elemente nicht in den Optimierungszyklus zurückkehren. Die Einordnung als Verfahren mit Ersatz-Sensitivitäten erfolgt hier, da zwar analytische Ableitungen gebildet, bei der Definition des Zielfunctionals aber keine Nichtlinearitäten berücksichtigt werden.

Für die Modellierung der veränderlichen Parameter bedienen sich einige der folgenden Methoden beim sogenannten SIMP-Ansatz (*Solid Isotropic Material with Penalization*), der bei der Optimierung mit der *Dichtemethode* (Bendsøe 1989) verwendet wird. Die Dichte eines finiten Elements kann dabei Werte zwischen 0 und 1 annehmen, wobei 0 „kein Material“ und 1 „Vollmaterial“ bedeutet. Tatsächlich wird aus numerischen Gründen statt null eine minimale Dichte verwendet. Der Elastizitätsmodul wird über die Elementdichte verändert. Damit im optimierten Design möglichst keine Zwischendichten bleiben, wird für die Skalierung des Elastizitätsmoduls ein Potenzansatz verwendet. Je größer der Exponent der Elementdichte, desto stärker werden Zwischendichten bestraft. Bei der Verwendung des SIMP-Ansatzes für die Crash-Optimierung werden auch die weiteren physikalischen Eigenschaften wie beispielsweise die Fließgrenze und die Fließfunktion abhängig von der Elementdichte mit einem Polynomansatz interpoliert. Jeder Materialparameter hat in der Regel einen eigenen Exponenten.

Die ESL-Methode (*Equivalent Static Loads Method*) von Choi und Park 2002 und Park 2011 nutzt zur Optimierung statische Methoden wie beispielsweise die Dichtemethode. Nach einer dynamischen Simulation werden die Knotenkräfte ermittelt, die eine äquivalente Verschiebung bei rein elastischem Materialverhalten zur Folge hätten. Mit diesen Ersatzlasten werden in einer linear-statischen Topologieopti-

mierung die Dichten angepasst. Hier sind dann Ersatz-Zielfunktionen notwendig. Durch multiple Lastfälle bei der statischen Optimierung können verschiedene Zeitpunkte der dynamischen Simulation in einer Optimierung berücksichtigt werden. Mit den analytischen Sensitivitäten kann die lineare Optimierung effizient durchgeführt werden. Zyklisch folgt auf die statische Optimierung wieder eine dynamische Simulation, bis sich die Dichten nicht mehr verändern. Um große Verschiebungen, beispielsweise beim Faltenbeulen, im statischen Ersatzlastfall abzubilden, werden unrealistisch große Kräfte auf die Struktur aufgebracht. Nichtlineares Materialverhalten kann in der linear statischen Optimierung nicht berücksichtigt werden. Unter anderem in den Programmkombinationen Altair Radioss<sup>®</sup> mit Altair OptiStruct<sup>®</sup> und LS-Dyna<sup>®</sup> mit Genesis<sup>®</sup> ist die ESL-Methode implementiert.

Beim Optimierungsansatz von Soto 2004 werden die Materialparameter wie Fließgrenze, maximale plastische Dehnung und die Dichte heuristisch angepasst. Eine Elementdichte von 0 ist mit extrem weichem Material assoziiert, das als Schaum interpretiert werden kann. Eine Elementdichte von 1 hat eine sehr hohe Fließgrenze. Für ein kontrolliertes Crashverhalten werden Bereiche definiert, die eine vorgeschriebene plastische Dehnung aufweisen sollen und Bereiche, die eine spezifische Spannung aufweisen sollen. Die Anpassung der Dichte erfolgt ähnlich des Optimalitätskriterienverfahrens: Unterschreitet ein Element beispielsweise die vorgeschriebene plastische Dehnung, wird die Dichte verringert, überschreitet es diesen Wert, wird die Dichte erhöht. Die Anpassung erfolgt unterschiedlich stark, abhängig davon, wie weit das jeweilige Element vom Zielwert entfernt ist.

In der Arbeit von Forsberg und Nilsson 2007 werden die Dicken von Schalenelementen angepasst. Anpassungskriterium ist die spezifische innere Energiedichte. Wenn die innere Energiedichte eines Elements oberhalb eines Zielwerts ist, wird die Dicke der Schale erhöht und entsprechend verringert, wenn die innere Energiedichte den Zielwert unterschreitet. Unterhalb einer Mindestdicke werden Elemente gelöscht und können auch nicht in die Optimierungsprozedur zurückkehren.

Bei der *Hybrid Cellular Automaton Method* (HCA-Methode) von Patel et al. 2009 wird ebenfalls die innere Energiedichte einer Struktur möglichst gleichmäßig verteilt. Der namensgebende Zellulärautomat beschreibt eine Diskretisierung des Raums mit Zellen. Der Zustand einer Zelle ist hierbei die Dichte und wird von Iteration zu Iteration durch Übergangs- und Nachbarschaftsregeln gesteuert. Der Zustand der Zellen wird dann auf ein Finite-Elemente-Netz projiziert, um eine Netzabhängigkeit der Ergebnisse zu verhindern. Die Übergangs- und Nachbarschaftsregeln sind vergleichbar mit Filtertechniken der Dichtemethoden (Bruno und Tortorelli 2001). Die Materialeigenschaften werden den einzelnen Elementen

in Abhängigkeit ihrer Dichte zugewiesen. Die HCA-Methode ist im kommerziellen Programmsystem LS-TaSC<sup>®</sup> verfügbar. Die Optimierung bezüglich anderer Zielfunktionen wie beispielsweise einer Reaktionskraft oder die Verarbeitung von Verschiebungsrandbedingungen erfolgt über die numerische Ermittlung von Sensitivitäten bezüglich des Gesamtvolumens, das für die Anpassung der Elementdichten über das Optimalitätskriterium verwendet wird. Durch die Filterung wird ein Mindestmaß der Strukturelemente erreicht, die im ungünstigsten Fall nur noch durch Volumenreduktion und damit eine geringe Elementdichte weicher werden können (vgl. Weider et al. 2017). Die *Hybrid Cellular Automata for Thin Walled Structures* (HCATWS) von Hunkeler 2013 stellt eine Erweiterung der HCA-Methode für einen Bauraum dar, der mit einer Gitterstruktur aus Schalenelementen gefüllt ist. Statt der inneren Energiedichte der einzelnen Elemente, wird die innere Energie ganzer Strukturelemente untereinander angepasst.

Bandi et al. 2013 teilen den Bauraum auf in einen nachgiebigen Teil in der Belastungszone und einen stützenden Teil. Die Idee ist, die Umlenkung der Impaktorkraft durch Nachgiebigkeitsmechanismen auf die Abstützung zu erreichen. Für die Optimierung der Abstützung wird die HCA-Methode eingesetzt. Für die Umlenkung wird eine linear statische Optimierung für Nachgiebigkeitsmechanismen verwendet, bei der die Kraft an den Koppelstellen beider Teile maximiert wird.

Gerade die spezifische innere Energie wurde in den vorgestellten Arbeiten häufig für die Topologieoptimierung als heuristisches Kriterium verwendet, um die Strukturen möglichst gleichmäßig auszulasten. „Spezifisch“ bedeutet in diesem Zusammenhang auf ein Einheitsvolumen bezogen. Dieses Kriterium ist im Wesentlichen aus dem linearen *voll beanspruchten Tragwerk* (engl. fully stressed design) motiviert, wo dieses Design dem gewichtsminimierten Design entspricht. Die Idee dabei ist, dass alle Bereiche eines Bauteils gleichmäßig durch plastische Dehnung zur Energieaufnahme beitragen. Eine Struktur mit homogener innerer Energiedichte eignet sich allerdings nicht zur gezielten Energieaufnahme durch Faltenbeulen. Daher sind diese Methoden vornehmlich zur Steifigkeitsoptimierung geeignet.

Die von Olschinka und Schumacher 2008, Ortmann und Schumacher 2013 und Ortmann 2015 entwickelte *Graphen- und Heuristikbasierte Topologieoptimierung* (GHT) ist mit der Modellierung mit Schalenelementen, Berücksichtigung von Kontakten und Beachtung von Fertigungsrestriktionen für Strangpressprofile nah an der konkreten Bauteilentwicklung. Die Methode beinhaltet zwei ineinander geschachtelte Optimierungsschleifen: Eine äußere Optimierungsschleife zur Veränderung der Topologie und eine innere Optimierungsschleife zur Formfindung. Die

innere Optimierungsschleife erfolgt mit mathematischen Optimierungsalgorithmen. Die äußere Optimierungsschleife zur Veränderung der Topologie erfolgt bei der GHT mithilfe von aus Expertenwissen abgeleiteten Heuristiken. Diese Heuristiken identifizieren beispielsweise Beulen einzelner Strukturelemente und ändern die Topologie in der Art, dass das Beulen früher, später oder nicht erfolgt. Damit sind kombinierte Topologie- und Formoptimierungen von metallischen Strukturen unter Berücksichtigung aller Craschanforderungen möglich. Im Vergleich zu den dichte-basierten Methoden benötigt die GHT verhältnismäßig viele Crashberechnungen, hat allerdings durch die Schalenmodellierung auch einen erheblichen Laufzeitvorteil in den einzelnen Simulationen. Beyer et al. 2021 haben die Methode erweitert, um mit weiteren Heuristiken dreidimensionale Rahmenstrukturen aus Einzelprofilen zu entwickeln.

Die hier vorgestellten Topologieoptimierungsmethoden für crashbelastete Strukturen wurden mit Heuristiken und Ersatz-Sensitivitäten umgesetzt. Sie sind für bestimmte Optimierungsprobleme zielführend, können aber im Allgemeinen nicht auf beliebige Problemstellungen übertragen werden, ohne die zugrunde liegenden Heuristiken anzupassen. Dies stellt einen grundlegenden Unterschied zu den folgenden Methoden dar, in denen analytische Sensitivitäten zum Einsatz kommen.

## **2.2 Sensitivitätenbasierte nichtlineare Topologieoptimierung**

Viele Veröffentlichungen der sensitivitätenbasierten nichtlinearen Topologieoptimierung verwenden nur ausgewählte Aspekte der in der Einleitung beschriebenen Nichtlinearitäten. Hier werden daher nur die wesentlichen Forschungsarbeiten vorgestellt, bei denen die betrachteten Funktionale die Anforderungen der crashgerechten Karosserieentwicklung im Sinne der passiven Sicherheit aus Kapitel 1 erfüllen.

Die in Pedersen 2003 und Pedersen 2004 entwickelte Methode, sieht die Optimierung einer Rahmenstruktur aus Balkenelementen vor. Der Bauraum wird mit Balkenelementen gefüllt. Die Querschnitte der einzelnen Balken sind die Entwurfsvariablen. Das Ziel ist, einen vorgegeben Beschleunigungs- beziehungsweise Kraft-Weg-Verlauf zu erreichen. Die relative Abweichung von dieser Zielkurve wird minimiert. Die Crashberechnung wird mit impliziter Zeitintegration ausgeführt.

Die analytischen Sensitivitäten werden mit der direkten Methode berechnet. Aufgrund der Balkenmodellierung wird der Kontakt zwischen den Elementen nicht berechnet.

Bei allen im Folgenden dargestellten Forschungsarbeiten und auch in dieser Dissertation wird die *adjungierte Methode* eingesetzt. Die Funktionale werden bei dieser Methode um die (mechanischen nichtlinear transienten) Gleichgewichtsbedingungen mit einem Lagrange-Multiplikator – *der Adjungierten* – erweitert. Dieser wird so gewählt, dass implizite Ableitungsterme, wie beispielsweise die Ableitung der Verschiebung nach der Entwurfvariable, nicht mehr berechnet werden müssen, sondern nur die expliziten Ableitungsterme, wie beispielsweise die Ableitung des Funktionals nach der Entwurfvariable. Unabhängig von der Anzahl der Entwurfvariablen ist nur eine weitere Finite-Elemente-Berechnung notwendig, um die Sensitivitäten zu bestimmen. In der Topologieoptimierung wird die adjungierte Methode oft verwendet, weil dort in der Regel die Anzahl der Entwurfvariablen groß gegenüber der Anzahl der Restriktionen beziehungsweise der Anzahl der Lastfälle ist, oder die direkte Sensitivitätenberechnung gar nicht erst möglich ist. Eine detaillierte Beschreibung der Methode erfolgt in Kapitel 4.

Die Arbeit von Huang et al. 2007 ist eine Weiterentwicklung der sogenannten BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*) für Energie aufnehmende Strukturen. Bei der BESO werden grundsätzlich ganze Elemente aus dem Bauraum entfernt oder hinzugefügt, es existiert keine Modellierung mit Zwischendichten. Allerdings erschwert genau dies die Sensitivitätenberechnung. Bei einer Belastung durch eine vorgegebene Verschiebung soll die Reaktionskraft möglichst nah an die maximal erlaubte Kraft heranreichen. Als Zielfunktion wird die innere Energie pro Einheitsvolumen gewählt. Die adjungierte Methode wird verwendet, um eine analytische Sensitivität für das Entfernen eines finiten Elements zu erhalten. Dabei wird aber nicht berücksichtigt, wie das Entfernen die Belastung innerhalb der Struktur verändert. Trotzdem gelingt die Anwendung für den ausgewählten Fall, da sie prinzipiell auf die heuristischen Verfahren zum Ausgleich der inneren Energiedichte aus dem vorangegangenen Abschnitt führt.

In Michaleris et al. 1994 wurde grundlegend die allgemeine Sensitivitätenberechnung mit der Dichtemethode für nichtlinear transiente Systeme entwickelt – sowohl mit der direkten als auch mit der adjungierten Methode. Material-Nichtlinearitäten und große Verschiebungen und Verzerrungen werden berücksichtigt, jedoch keine Massenträgheit in der transienten Berechnung. Dort wird zum ersten Mal das Endwertproblem für die Berechnung der Adjungierten entwickelt, auf das jede transiente Sensitivitätenberechnung mit der adjungierten Methode führt. Durch

die Verwendung eines elasto-plastischen Materialmodells wird hier auch erstmals die Ableitung der inneren Kräfte nach der Verschiebung – die *Tangentensteifigkeit* – bei der Lösung der Adjungierten benötigt. Diese Entwicklung ist eng verbunden mit nichtlinearem Materialverhalten und ist die Grundlage jeder neueren Forschungsarbeit im Zusammenhang mit der adjungierten Methode. Auf diese Sensitivitätenberechnung aufbauend wurde von Wallin et al. 2016 mit geometrischen Nichtlinearitäten und elasto-plastischem Materialverhalten die Maximierung der plastischen Arbeit mit der Dichtemethode erreicht. Die Massenträgheit wurde allerdings auch dort noch nicht berücksichtigt.

Von Wallin et al. 2018 wurden zunächst nichtlineare Steifigkeitsoptimierungen vorgenommen. Die Sensitivitäten wurden zwar mit der adjungierten Methode bestimmt. Dadurch wird auch hier die Tangentensteifigkeit verwendet. Die Lastfallberechnung erfolgte allerdings nicht mit transienten Methoden, wodurch die Massenträgheit nicht berücksichtigt werden konnte. Darauf aufbauend und mit den erwähnten Vorarbeiten von Michaleris et al. 1994 und Wallin et al. 2016 wurde schließlich von Ivarsson et al. 2018 ein Konzept zur Maximierung der plastischen Arbeit mit großen Verschiebungen und transienten Lasten unter Berücksichtigung der Massenträgheit entwickelt. Die Materialformulierung in Form eines viskoplastischen Materialmodells für große Verschiebungen und Verzerrungen wird an die Sensitivitätenberechnung gekoppelt. Die Belastung eines reduzierten Vorderwagens durch einen frontalen Pfahlaufprall musste hier zwar noch mit vorgeschriebenen Verschiebungen abgebildet werden, da keine Kontaktformulierungen verwendet wurden. Mit verschiedenen Eindringgeschwindigkeiten konnten trotzdem verschiedene Geometrien erzeugt werden.

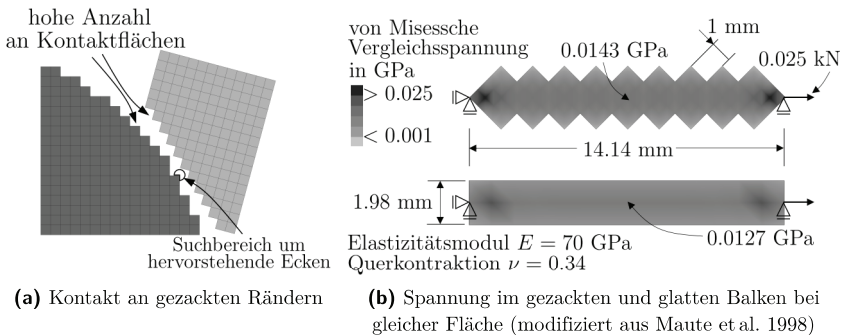
## 2.3 Anforderungen an eine belastbare Crashesimulation

Eine Besonderheit der Crashesimulation ist die Modellierung der Geometrie. Um die komplexe Geometrie von Blechbauteilen abzubilden, werden Schalenelemente bei der Berechnung eingesetzt. Bei einer Diskretisierung mit Volumenelementen müssen die gleichen Strukturen mit mehr Elementen in der Dickenrichtung modelliert werden, um die Darstellung von Biegung zu ermöglichen. Die Anzahl der Freiheitsgrade steigt dann auf ein Vielfaches der Schalenmodellierung, entsprechend aufwendiger wird jede Finite-Elemente-Berechnung.



Bei den Verfahren zur Topologieoptimierung für crashbelastete Strukturen wird – mit Ausnahme der Verfahren von Pedersen 2003 und Ortman 2015 – der Bauraum in viele kleine regelmäßige Bereiche aufgeteilt und für jeden dieser Bereiche bestimmt, ob dort Material sein soll oder nicht. Meistens entsprechen diese Bereiche den finiten Elementen des Berechnungsmodells, beziehungsweise das Berechnungsmodell wird regelmäßig mit Hexaederelementen oder Schalenelementen gleicher Kantenlänge vernetzt. Komplexe Bauraumformen oder komplexe Geometrien, die im Verlauf der Optimierung durch Löschen von Elementen entstehen, haben dann stufige Ränder. Diese sind in zweierlei Hinsicht problematisch in der Simulation:

1. Durch die Spitzen werden hohe Anforderungen an die Kontaktformulierung zwischen Bauteilen, wie in Abbildung 2.1a, gestellt. Zum einen ist die Anzahl der freien Kanten und damit der Kontaktflächen hoch gegenüber einer glatten Formulierung, zum anderen ist die Kontaktsuche um eine hervorstehende Ecke erschwert.
2. Gezackte Ränder können Spannungssingularitäten verursachen, die zu vorzeitiger plastischer Dehnung führen (vgl. Maute et al. 1998). In Abbildung 2.1b sind zwei Modellierungen desselben Balkens unter gleicher Lagerung und Belastung gezeigt. Beide Balken haben die gleiche Länge und das gleiche Volumen. Aufgrund des geringeren Nennquerschnitts ist eine höhere Spannung bei dem Balken mit dem gezackten Rand zu erwarten.



**Abbildung 2.1:** Herausforderungen bei der Crashsimulation in Optimierungsalgorithmen

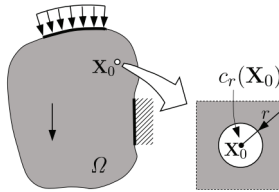
Problematisch ist auch die ebenfalls häufig eingesetzte Dichtemodellierung in der Topologieoptimierung. Bei Verringerung der Elementdichte kann je nach Materialinterpolation der Zeitschritt für die Zeitintegration bei der Crashsimulation stark abfallen. Elemente mit geringer Dichte haben außerdem eine unrealistische

abstützende Wirkung in der Struktur, obwohl es sich eigentlich um „kein Material“ handelt. Die Entwicklung von validierten Materialmodellen ist eine sehr anspruchsvolle Entwicklungsaufgabe. Die Verwendung künstlicher Materialien trägt unter Umständen nicht zur Akzeptanz in der industriellen Anwendung bei.

Wünschenswert für die Topologieoptimierung crashbelasteter Strukturen ist eine Modellierung und Sensitivitätenbestimmung, die ohne Zwischendichten auskommt und gleichzeitig eine Berechnung mit einer klaren Geometrie erlaubt. Die im nächsten Abschnitt erläuterte *Topologische Ableitung* kann hier eine Lösung liefern.

## 2.4 Topologische Ableitung

Die Idee der Topologischen Ableitung ist es, die Sensitivität eines Funktionals  $\mathcal{J}$  bezüglich eines Punktes  $\mathbf{X}_0$  im Körper  $\Omega$  durch das Einbringen einer Aussparung  $c_r(\mathbf{X}_0)$  und damit durch direkte Änderung der Topologiekategorie wie in Abbildung 2.2 zu gewinnen.



**Abbildung 2.2:** Aussparung im Körper

Definiert wird die Topologische Ableitung über den Differentialquotienten. Das Funktional wird auf dem gesamten Körper ausgewertet ( $\mathcal{J}(\Omega)$ ) und vom Funktional auf dem Körper mit der Aussparung  $\mathcal{J}(\Omega \setminus \overline{c_r(\mathbf{X}_0)})$  subtrahiert. Dividiert wird die Differenz durch das Volumen der Aussparung  $|\overline{c_r(\mathbf{X}_0)}|$ . Der Dimensionierungsparameter der Aussparung  $r$  (in diesem Fall der Radius der kreisförmigen Aussparung) soll infinitesimal klein werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass das makroskopische Verhalten des Körpers durch die Aussparung nicht verändert wird. Die *Topologische Ableitung des Funktionals  $\mathcal{J}$*  am Punkt  $\mathbf{X}_0$  wird durch

$$\mathcal{TJ}(\mathbf{X}_0) := \lim_{r \downarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\Omega \setminus \overline{c_r(\mathbf{X}_0)}) - \mathcal{J}(\Omega)}{|\overline{c_r(\mathbf{X}_0)}|} \quad (2.1)$$

definiert.

Mit dem Übergang zum Limes wird letztlich nur ein Punkt des Körpers ausgespart. Die Topologische Ableitung versteht sich demnach als eine Sensitivität für die Entwurfsvariable „Punkt  $\mathbf{X}_0$  nicht da“. Ist die Sensitivität kleiner null ( $\mathcal{TJ}(\mathbf{X}_0) < 0$ ), so bewirkt die Aussparung eine Verringerung des Funktionals. Ist die Sensitivität größer null ( $\mathcal{TJ}(\mathbf{X}_0) > 0$ ), so bewirkt die Aussparung eine Vergrößerung des Funktionals.

Eine Auswertung dieser Sensitivität für alle Punkte des Bauraums liefert Informationen darüber, an welchen Orten die Einbringung einer Aussparung für ein Optimierungsproblem zielführend ist. Unter der Voraussetzung, dass ein linear-elastischer Spannungszustand vorliegt, wird mithilfe der adjungierten Methode und der Formableitung ein direkter Zusammenhang zwischen Zielfunktional und mechanischem Problem hergestellt. In Kombination mit der Spannungsverteilung in einer unendlich ausgedehnten Scheibe mit Loch unter einachsiger Zugbelastung kann die Topologische Ableitung in einer geschlossenen Form dargestellt werden. Diese ist im Allgemeinen von den mechanischen Gleichgewichtsbedingungen, der Adjungierten und der Form des Ausschnitts abhängig.

## 2.4.1 Zielfunktionale und Anwendungsgebiete

Die Entwicklung der Topologischen Ableitung geht auf die *Bubble-Methode* von Eschenauer et al. 1994 zurück und wird dort als *Positionierungskriterium* bezeichnet. Die Bezeichnung „Topologische Ableitung“ stammt von Sokołowski und Żochowski 1999. Zunächst wurde auch bei der Topologischen Ableitung klassischerweise die Nachgiebigkeit betrachtet. In Schumacher 1995 wird ein Versagensfunktional basierend auf der von Misesschen Vergleichsspannung entwickelt, dieses wird in Amstutz und Novotny 2010 in einer allgemeineren Form nochmals aufgegriffen. Eine globales Verschiebungsfunktional ist in Sokołowski und Żochowski 1999 zu finden. Die Topologische Ableitung für Nachgiebigkeits- und Greifmechanismen ist in Amstutz und Andrä 2006 und Lopes und Novotny 2016 zu finden. Auch Kontakt zwischen Bauteilen und dessen Einfluss auf die Topologische Ableitung beziehungsweise auf Sensitivitäten im Allgemeinen wurde durch Giusti et al. 2015 und Lopes et al. 2017 für lineare und in Lawry und Maute 2018 und Fernandez et al. 2020 für nichtlineare Elastizität bereits untersucht. In Fernandez et al. 2020 werden sogar Sensitivitäten für die Kontaktkraft hergeleitet.

Die mathematisch theoretischen Grundlagen der Topologischen Ableitung sind in Novotny und Sokołowski 2013 detailliert dargestellt. Eine Zusammenstellung von Anwendungsgebieten findet sich im Buch *Applications of the Topological Derivative*

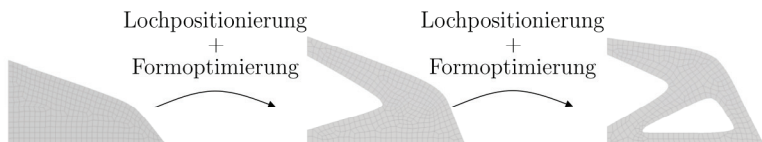
*Method* von Novotny et al. 2019d und den entsprechenden Artikeln Novotny et al. 2019a, Novotny et al. 2019b und Novotny et al. 2019c. Nur beispielhaft seien hier Anwendungsgebiete wie die Elektromechanik (Gangl et al. 2015) und die Strömungsmechanik genannt (Duan und Li 2015).

Das prinzipielle Vorgehen der adjungierten Methode hängt nicht von den Entwurfsvariablen des Optimierungsproblems ab. Sowohl für die Dichtemethode als auch für die Topologische Ableitung ist die Adjungierte nur abhängig vom Funktional. Erst die explizite Sensitivitätenberechnung stellt den Zusammenhang zu den Entwurfsvariablen dar. Die Berechnung der Topologischen Ableitung ist daher für alle Anwendungsgebiete denkbar, in denen bisher andere Methoden wie die Formoptimierung oder die Dichtemethode verwendet werden.

### 2.4.2 Optimierungsverfahren unter Verwendung der Topologischen Ableitung

In der Bubble-Methode (Eschenauer et al. 1994, Schumacher 1995) wird die Topologische Ableitung genutzt, um eine Aussparung am sensitivsten Punkt der Struktur einzubringen. Die parametrisierte Form des Ausschnitts wird formoptimiert. Iterativ wird dann wieder eine Aussparung eingebracht und wieder formoptimiert. Der Ablauf ist beispielhaft in Abbildung 2.3 dargestellt. Das Verfahren ist gekoppelt an *Computer Aided Design* (CAD). Es ist eine gute Parametrisierung der Aussparung notwendig (z. B. mit Splines), was beispielsweise bei einer nicht mehr nur ebenen Bauteilauslegung sehr schnell sehr komplex wird. Durch die Beschreibung mit CAD ist die Methode aber immer nah am realistischen Bauteil.

Die Lochpositionierung wurde in Schumacher 2005 erstmals auf crashbelastete Strukturen angewendet. Die Minimierung der Beschleunigung eines Impaktors wurde mit dem Positionierungskriterium untersucht. Der Körper wurde mit dem Einbringen eines physikalischen Lochs abgetastet, der Differenzenquotient nach (2.1) für einen festen Radius ermittelt und eine Approximation der Topologischen Ableitung erstellt, um die optimale Lochposition zu finden.

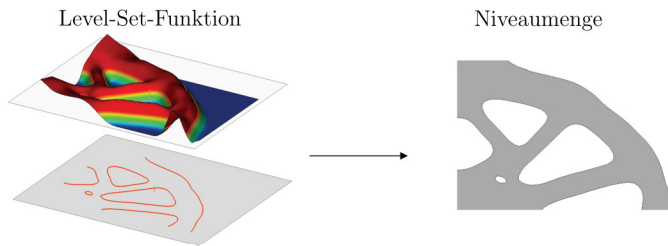


**Abbildung 2.3:** Optimierung mit der Bubble-Methode

Die *Level-Set-Methode* von Osher und Sethian 1988 stellt gewissermaßen eine Weiterentwicklung der Formoptimierung bei der Bubble-Methode dar. Die Geometriebeschreibung erfolgt implizit als obere Niveaumenge der sogenannten *Level-Set-Funktion*. In Abbildung 2.4 links ist der Graph der Level-Set-Funktion für einen rechteckigen Träger als Fläche im dreidimensionalen Raum über dem Träger dargestellt. Rot eingefärbt ist dabei der Bereich oberhalb von null. Die obere Niveaumenge zum Wert null sind alle Punkte des Trägers, deren Level-Set-Funktionswert größer gleich null ist. Die mit dieser Level-Set-Funktion beschriebene Geometrie ist in der Abbildung 2.4 auf der rechten Seite zu sehen.

Die Formoptimierung erfolgt dann mit Hilfe der Veränderung der Level-Set-Funktion. Durch die Formänderung können im Zweidimensionalen Löcher nur miteinander verschmelzen, nicht aber neue entstehen. Das Einbringen neuer Löcher wird bei Burger et al. 2004 über die Topologische Ableitung gesteuert. Die Verschmelzung von Level-Set-Funktion und Topologischer Ableitung wird bei der Methode von Amstutz und André 2006 erreicht. Die Level-Set-Funktion wird basierend auf den Optimalitätskriterien direkt mit der Topologischen Ableitung verändert, ohne weitere Formoptimierung. Eine Übersicht über die linearen Level-Set-Methoden und die Formoptimierung mit der Level-Set-Funktion ist von van Dijk et al. 2013 zusammengestellt worden.

*Anmerkung 2.4.1 (Vorzeichen der Level-Set-Funktion). Einige Veröffentlichungen definieren die Level-Set-Funktion so, dass die untere Niveaumenge die Geometrie beschreibt. Der Charakter der impliziten Beschreibung des Randes bleibt aber in jedem Fall der gleiche.*

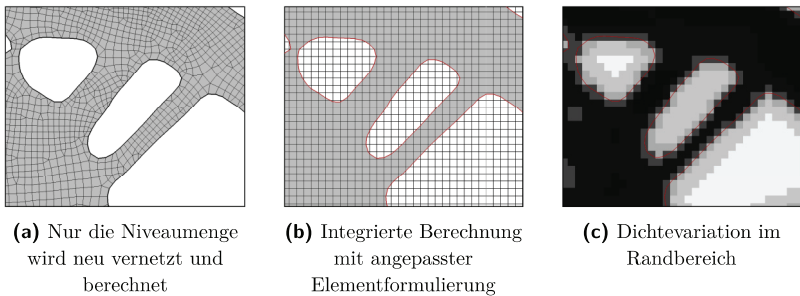


**Abbildung 2.4:** Level-Set-Funktion mit impliziter Geometriebeschreibung

Der Vorteil der impliziten Randbeschreibung mit der Level-Set-Funktion ist ebenfalls die scharfe Randbeschreibung ohne Zwischendichten und ohne CAD-Beschreibung – theoretisch jedenfalls, denn auch die Level-Set-Funktion benötigt

eine Parametrisierung mit der die Formoptimierung durchgeführt werden kann. Und aus der Randbeschreibung muss ein mechanisches Simulationsmodell entwickelt werden. Bisher sind dazu die folgenden Modellierungen in Verwendung:

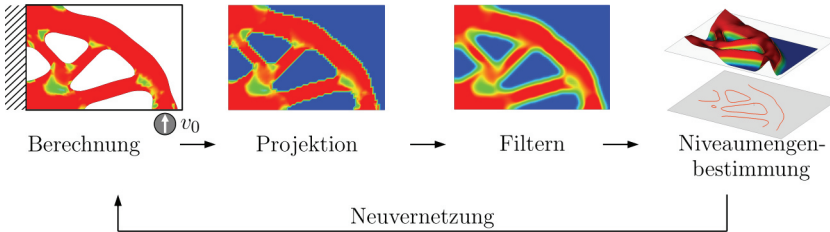
1. Nur die Niveaumenge der Level-Set-Funktion zum Niveau null wird berechnet. Im Allgemeinen ist dafür eine Neuvernetzung (vgl. Abbildung 2.5a) wie beispielsweise in Allaire et al. 2011 notwendig, um Kantenlängen zu vereinheitlichen.
2. Bei den *immersed boundary techniques* wird nur die Elementformulierung am Rand der Geometrie angepasst. In Abbildung 2.5b sind das die Elemente, die von der roten Isolinie zum Wert null geschnittenen Elemente. Das Rechenetz an sich bleibt unverändert. Fries und Belytschko 2010 geben einen Überblick über die auch als X-FEM-Formulierung (von engl. *eXtended Finite Element Method*) bekannte Methode.
3. Wie bei der Dichtemethode werden im Randbereich die Materialparameter zwischen Minimal- und Maximaldichte variiert (Allaire et al. 2004), je nachdem wie viel Volumen vom finiten Element innerhalb und außerhalb der Level-Set-Kontur liegt (vgl. Abbildung 2.5c). Hierunter fällt auch die Topologieoptimierung mit dem Algorithmus von Amstutz und André 2006.



**Abbildung 2.5:** Mechanische Berechnungsmodelle bei der Topologieoptimierung mit der Level-Set-Methode

Methoden, bei denen die Topologische Ableitung anstelle der Level-Set-Funktion zur Konturbeschreibung genutzt wird, wie beispielsweise das Vorgehen von Norato et al. 2007, werden in Novotny et al. 2019d als „experimentelle Mathematik“ bezeichnet. In diese Kategorie fällt auch das Crash-Optimierungsschema von Weider und Schumacher 2018. Der Ablauf ist in Abbildung 2.6 schematisch dargestellt. Nur die Niveaumenge der Topologischen Ableitung wird neu vernetzt und zur

Lastfallberechnung verwendet. Die aus der Simulation gewonnenen Sensitivitäten werden anschließend auf den gesamten Bauraum projiziert. Mit einer Filterung wird eine Rückkehr bereits abgeschnittener Bereiche ermöglicht. Gleichzeitig wird die Randkontur geglättet. Dann wird wieder die Niveaumenge bestimmt und neu vernetzt.



**Abbildung 2.6:** Optimierungsschema zur Optimierung crashbelasteter Strukturen (modifiziert aus Weider und Schumacher 2018)

### 2.4.3 Anwendungspotenzial der Topologischen Ableitung bei der Crash-Optimierung

In Verbindung mit dem Level-Set-Algorithmus von Amstutz und Andrä 2006 und dem Optimierungsschema von Weider und Schumacher 2018 ist die Topologische Ableitung Erfolg versprechend für die Topologieoptimierung crashbelasteter Strukturen. Im genannten Level-Set-Algorithmus kann direkt die Topologische Ableitung für die Anpassung der Level-Set-Funktion verwendet werden und bei der Crashesimulation wird nur die obere Niveaumenge gerechnet. Die Berücksichtigung von crashgerechten Zielfunktionalen bei der Topologischen Ableitung kann hier in wesentlichen Punkten zu einer Weiterentwicklung beitragen. In dieser Dissertation wird daher die Topologische Ableitung unter Material-Nichtlinearität und großer Verformung und Zeitabhängigkeit entwickelt.

Für statische Elastizitätsprobleme ist die Topologische Ableitung in einigen Bereichen bereits analytisch erweitert worden. Dazu zählt die Berücksichtigung von großen Verschiebungen durch Pereira und Bittencourt 2008. Zeitabhängige Modellierung wird in Amstutz et al. 2008 betrachtet. Für den Umgang mit Material-Nichtlinearitäten wurden erste Prinzipuntersuchungen in Weider und Schumacher 2016 gezeigt. Die Spannungsverteilung am Aussparungsrand wurde dort durch eine Approximation angenähert. Die in Weider und Schumacher 2019

---

hergeleitete Berechnung der Adjungierten für die innere Energie und ein Verschiebungsfunktional wird in dieser Dissertation in Kapitel 4 wieder aufgegriffen und mit einer Materialinterpolation in Kapitel 5 aufgelöst.





# 3 Grundlagen der nichtlinearen Struktursimulation

Im Hinblick auf die Entwicklung der Topologischen Ableitung werden in diesem Kapitel die wichtigsten Grundlagen und Grundbegriffe der Kontinuumsmechanik eingeführt. Zunächst werden die kontinuumsmechanischen Bezeichnungen und Beziehungen erläutert, mit denen das mathematische Anfangsrandwertproblem, das einen Crash beschreibt, formuliert wird. Insbesondere werden schalenkinematische Grundlagen gelegt. Die Diskretisierung und Lösung des Anfangsrandwertproblems mit der *Methode der finiten Elemente* unter Zuhilfenahme der impliziten Zeitintegration schließt dieses Kapitel ab.

## 3.1 Kontinuumsmechanische Grundbegriffe

Zur Beschreibung der Deformation und Bewegung eines Körpers werden Verzerungsmaße und kinematische Größen benötigt. Diese Maße müssen die Möglichkeit mit einbeziehen können, dass der betrachtete Körper große Verschiebungen und Drehungen sowie große Verzerrungen erfährt und dass die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung nichtlinear ist.

Im Folgenden wird zuerst die Bewegung eines beliebigen Körpers beschrieben. Für diese Bewegung werden kinematische Maße definiert. Danach werden geeignete Verzerrungs- und die zugehörigen Spannungstensoren eingeführt.

### 3.1.1 Bewegung und Deformation eines Körpers im Raum

Wir betrachten einen Körper  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  als eine Menge von Punkten, die eine Region des euklidischen Vektorraums einnehmen. Der Rand  $\Gamma = \partial\Omega$  dieser Menge repräsentiert die Körperoberfläche. Die Dimension des euklidischen Vektorraums  $d \in \{2, 3\}$  steht mit  $d = 2$  für ebene mechanische Problemstellungen,  $d = 3$  für räumliche.

*Schreibweise* (Vektorraumbasis). Die Basis des euklidischen Vektorraums, die die Menge der Basisvektoren beschreibt, wird mit einem kalligrafischen Buchstaben bezeichnet. Die Standardbasis  $\mathcal{E}^{\text{glob}} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  des euklidischen Vektorraums wird durch die Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gebildet. Für ebene Darstellungen ist die Standardbasis  $\mathcal{E}^{\text{glob}} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  entsprechend mit den Vektoren

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

definiert.

Eine *Konfiguration* des Körpers ist eine Abbildung  $\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ , die die Punkte von  $\Omega$  zur Zeit  $t$  im Raum platziert. Eine Deformation und Bewegung des Körpers kann durch die Verschiebung jedes materiellen Punktes dargestellt werden. Jeder beliebige materielle Punkt des Körpers in der *Bezugskonfiguration* kann durch einen Ortsvektor  $\mathbf{X}$  als eine Linearkombination der Basisvektoren mit den Komponenten  $X_i$  dargestellt werden:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d X_i \mathbf{e}_i.$$

Man bezeichnet die Größen  $X_i$  als *materielle Koordinaten* oder als Lagrangesche Koordinaten.

Bei der Deformation des Körpers erfährt im Allgemeinen jeder materielle Punkt eine Verschiebung  $\mathbf{u}$  und befindet sich dann im deformierten Zustand an einem Punkt mit dem Ortsvektor  $\mathbf{x}$  und den *räumlichen Koordinaten*  $x_i$ . Für den Ort des Punktes  $\mathbf{X}$  zur Zeit  $t$  gilt:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t).$$

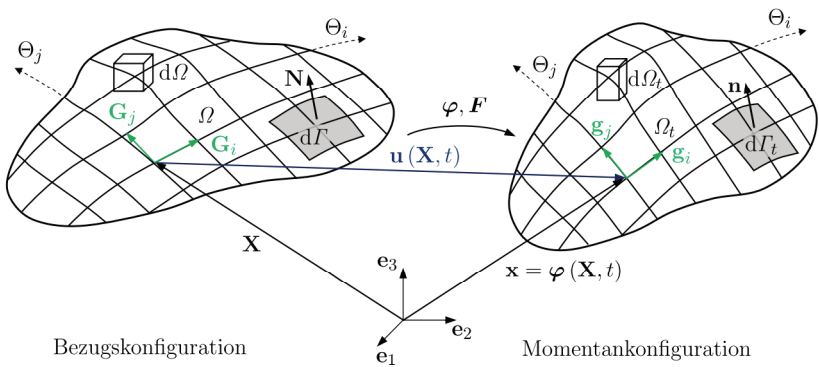
Auf der linken Seite in Abbildung 3.1 ist ein Körper in der Bezugskonfiguration skizziert. Der nach erfolgter Deformation vorliegende aktuelle Zustand, die sogenannte *Momentankonfiguration* in Abbildung 3.1 rechts, wird mit  $\varphi(\Omega, t)$  bezeichnet. Der Rand dieser Menge ist die verformte Körperoberfläche  $\partial\varphi(\Omega, t)$ .

Die Verschiebung des Punktes ist die Differenz zwischen der Bezugsconfiguration und der Momentanconfiguration:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}. \quad (3.1)$$

*Schreibweise* (Körper in der Momentanconfiguration). Für eine kompakte Schreibweise wird für den Körper in der Momentanconfiguration verkürzend  $\Omega_t = \boldsymbol{\varphi}(\Omega, t)$  geschrieben. Der Rand des verformten Körpers wird mit  $\Gamma_t = \partial\Omega_t = \partial\boldsymbol{\varphi}(\Omega, t)$  abgekürzt.

Die Bezugsconfiguration muss zu keinem Zeitpunkt vom Körper angenommen werden. Für viele praktische Belange wird sie gleich der Konfiguration gesetzt, die der Körper zu Beginn der Deformation annimmt. Bei der Methode der finiten Elemente wird beispielsweise eine rein fiktive Bezugsconfiguration für das Referenzelement verwendet.



**Abbildung 3.1:** Bewegung und Transformation differenzieller Größen von der Bezugs- in die Momentanconfiguration

### 3.1.2 Symbolische Schreibweisen der Differentialoperatoren

Zur Vereinfachung der Notation werden an dieser Stelle noch einige symbolische Schreibweisen und Eigenschaften von Operatoren gesammelt. Die Differentialoperatoren *Gradient* und *Divergenz* müssen bezüglich der Konfiguration unterschieden werden. Wir definieren dazu einige Schreibweisen für Skalare, Vektoren, Matrizen und Tensoren und geben dann die symbolischen Schreibweisen des Gradienten und der Divergenz an.

*Schreibweise* (Vektoren in der Bezugs- und der Momentankonfiguration). Große Buchstaben  $\mathbf{X}$  stehen für Vektoren und deren Komponenten  $X_i$  in der Bezugskonfiguration, kleine Buchstaben  $\mathbf{x}$  für die Vektoren in der Momentankonfiguration.

*Schreibweise* (Tensoren). Fette griechische und lateinische Buchstaben bezeichnen Tensoren, Matrizen und Vektoren, während Skalare in normaler Schrift gedruckt sind.

Zur besseren Unterscheidbarkeit von Vektoren werden Tensoren zweiter Stufe  $\mathbf{T}$  kursiv dargestellt, Tensoren vierter Stufe werden mit Doppelstrich  $\mathbb{T}$  geschrieben.

Der Einheitstensor zweiter Stufe sowie die Einheitsmatrix, deren Diagonalelemente alle identisch 1 sind und ansonsten 0, werden mit  $\mathbf{1}$  bezeichnet:

$$\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

*Schreibweise* (Spuroperator). Der Spuroperator  $\text{tr}$  angewendet auf einen Tensor  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist definiert über die Summe der Hauptdiagonalelemente

$$\text{tr}(\mathbf{T}) := \sum_{j=1}^n T_{jj}.$$

Einige wichtige Eigenschaften des Spuroperators sind:

- Linearität  $\text{tr}(a\mathbf{T} + b\mathbf{S}) = a \text{tr}(\mathbf{T}) + b \text{tr}(\mathbf{S})$ ,
- Invarianz unter Transposition  $\text{tr}(\mathbf{T}) = \text{tr}(\mathbf{T}^T)$ ,
- Vertauschbarkeit  $\text{tr}(\mathbf{ST}) = \text{tr}(\mathbf{TS})$  und
- zyklische Vertauschbarkeit  $\text{tr}(\mathbf{STU}) = \text{tr}(\mathbf{UST}) = \text{tr}(\mathbf{TUS})$ .

*Schreibweise* (Skalarprodukt). Das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  wird mit dem Punkt  $\cdot$  geschrieben und ist definiert als

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} := \mathbf{v}^T \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n v_i w_i.$$

Das Skalarprodukt für Tensoren  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  wird mit dem Spuroperator  $\text{tr}$  definiert

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} := \text{tr}(\mathbf{S}^T \mathbf{T}).$$

Das Skalarprodukt eines symmetrischen Tensors ( $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ ) mit einem *schiefssymmetrischen* (oder auch *antimetrisch* genannten) Tensor  $\mathbf{T} = -\mathbf{T}^T$  ist gleich null, da nur dann die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \text{tr}(\mathbf{S}^T \mathbf{T}) = \text{tr}(-\mathbf{S}^T \mathbf{T}^T) = -\text{tr}((\mathbf{T}\mathbf{S})^T) = -\text{tr}(\mathbf{S}\mathbf{T}) = -\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}. \quad (3.2)$$

*Schreibweise* (Dyadisches Produkt). Das dyadische Produkt zweier Vektoren  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  und  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  ist ein Tensor zweiter Stufe

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} := \mathbf{v} \mathbf{w}^T \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

*Schreibweise* (Partielle Ableitung). Die partielle Ableitung eines Skalars  $\alpha(\mathbf{x})$  oder eines Vektorfeldes  $\mathbf{z}(\mathbf{x})$  nach einer indizierten Variable  $x_i$  beziehungsweise nach der  $i$ -ten Komponente wird mit dem Index nach dem Komma  $_{,i}$  gekennzeichnet

$$\frac{\partial \alpha(\mathbf{x})}{\partial x_i} =: \alpha_{,i} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{z}(\mathbf{x})}{\partial x_i} =: \mathbf{z}_{,i}.$$

Analog zu den Konventionen der Groß- und Kleinschreibung für Vektoren in der Bezugs- und Momentankonfiguration werden auch die Operatorsymbole des Gradienten und der Divergenz unterschieden.

*Schreibweise* (Gradient). In der Bezugsconfiguration wird der Gradient mit Grad bezeichnet. Der Gradient in der Momentankonfiguration wird mit grad bezeichnet. Der Gradient eines Vektorfeldes liefert immer ein um 1 höherstufiges Tensorfeld als das Vektorfeld selbst, also ein Tensorfeld zweiter Stufe. Dies wird auch als *Jacobi-Matrix* oder *Differential* bezeichnet:

$$\begin{aligned} \text{Grad } \alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{X}}, & \text{Grad } \mathbf{v} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}}, \\ \text{grad } \alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}}, & \text{grad } \mathbf{v} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Unabhängig von der Konfiguration trägt die symbolische Schreibweise des Gradienten zur Übersichtlichkeit bei. Hier ist der Vollständigkeit halber die Symbolik ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \text{Grad } \alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{X}} = \left( \frac{\partial \alpha}{\partial X_1}, \frac{\partial \alpha}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial \alpha}{\partial X_d} \right), \\ \text{Grad } \mathbf{v} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial X_1} & \frac{\partial v_1}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial v_1}{\partial X_d} \\ \frac{\partial v_2}{\partial X_1} & \frac{\partial v_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial v_2}{\partial X_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v_m}{\partial X_1} & \frac{\partial v_m}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial v_m}{\partial X_d} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die räumliche Gradientenbildung gilt dies entsprechend.

*Schreibweise* (Divergenz). Die Divergenz in der Bezugskonfiguration wird mit  $\text{Div}$  geschrieben und mit  $\text{div}$  in der Momentankonfiguration. Die Definitionen der Divergenz eines Vektorfeldes  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$  und eines Tensorfeldes  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{d \times d}$  sind

$$\begin{aligned} \text{Div } \mathbf{v} &= \text{Grad } \mathbf{v} \cdot \mathbf{1} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial X_i}, & \text{Div } \mathbf{T} &= \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} \mathbf{e}_i, \\ \text{div } \mathbf{v} &= \text{grad } \mathbf{v} \cdot \mathbf{1} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, & \text{div } \mathbf{T} &= \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Die Divergenz eines Tensorfeldes ist ein Feld eine Stufe niedriger als das Tensorfeld selbst. Es gilt die „Produktregel“

$$\text{div}(\mathbf{T}\mathbf{v}) = \mathbf{T}^T \cdot \text{grad } \mathbf{v} + \text{div}(\mathbf{T}^T) \cdot \mathbf{v}$$

und speziell für einen symmetrischen Tensor  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$

$$\text{div}(\mathbf{T}\mathbf{v}) = \mathbf{T} \cdot \text{grad } \mathbf{v} + \text{div } \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}. \quad (3.3)$$

### 3.1.3 Definition der ko- und kontravarianten Basisvektoren

Die Darstellung der Verzerrungsgrößen erfolgt im Allgemeinen bezüglich einer orthogonalen kartesischen Basis. Jedoch sind für einige Anwendungen die Darstellung bezüglich der ko- oder kontravarianten Basis sinnvoll. Insbesondere wird die Definition für die spätere Berechnung des Deformationsgradienten benötigt. Die sogenannten *konvektiven* Koordinaten kann man sich wie in Abbildung 3.2 als auf dem Körper „eingetrizt“ vorstellen. Diese krummlinigen Koordinaten werden daher mitdeformiert. Die *kovarianten Basisvektoren* sind Tangenten an die konvektiven Koordinatenlinien.

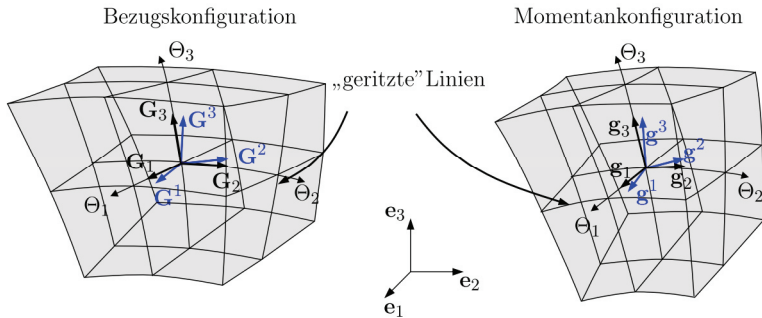
Werden die kartesischen Koordinaten der Bezugs- und Momentankonfiguration als Funktionen der konvektiven Koordinaten  $\Theta_i$  geschrieben

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3) \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3),$$

dann sind die *kovarianten Basisvektoren* in der Bezugs- und Momentankonfiguration mit

$$\mathbf{G}_i := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Theta_i} = \mathbf{X}_{,i} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_i := \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \Theta_i} = \varphi_{,i} \quad (3.4)$$

definiert.



**Abbildung 3.2:** Ko- und kontravariante Basis in Bezugs- und Momentankonfiguration<sup>1</sup>

Die dazu passenden *kontravarianten Basisvektoren* werden durch

$$\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^k = \delta_i^k \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^k = \delta_i^k \quad (3.5)$$

mit dem Kronecker-Delta

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = k, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Sind die Basisvektoren paarweise orthogonal und jeweils auf Länge 1 normiert, so nennt man eine Basis *Orthonormalsystem*. Dann fallen ko- und kontravariante Basis zusammen. Insbesondere im Falle der kartesischen Standardbasis fallen ko- und kontravariante Basisvektoren zusammen.

Die Orthogonalitätsbeziehungen (3.5) erlauben eine einfache Berechnung der kontravarianten Basis aus der kovarianten Basis mit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{1T} \\ \mathbf{G}^{2T} \\ \mathbf{G}^{3T} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{G}^1 & \mathbf{G}^2 & \mathbf{G}^3 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_3} \begin{pmatrix} (\mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_3)^T \\ (\mathbf{G}_3 \times \mathbf{G}_1)^T \\ (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2)^T \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

<sup>1</sup>Abbildung modifiziert aus <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tangraum2.png>, Aufruf am 23.03.2021, 15:53 Uhr UTC



Analog dazu können die kontravarianten Basisvektoren in der Momentankonfiguration aus den kovarianten Basisvektoren in der Momentankonfiguration berechnet werden.

*Beispiel 3.1.1 (Ko- und kontravariante Basis).*

Für das ebene Einheitsquadrat in Abbildung 3.3a wird die Konfiguration des Elements in Abbildung 3.3b durch die Abbildung

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} x_1 &= X_1 + 0.5 X_2 \\ x_2 &= X_2 \end{aligned}$$

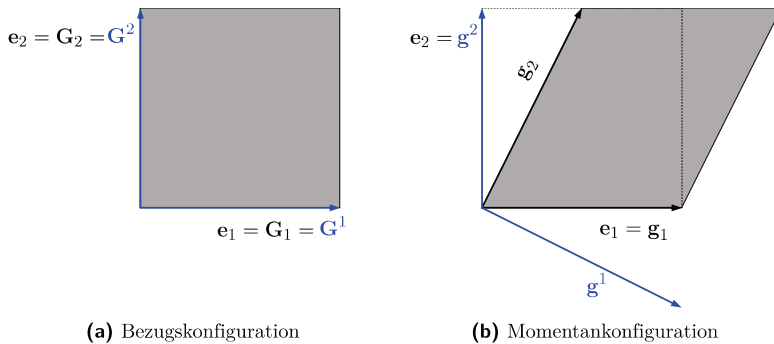
beschrieben. Da hier nur ein deformierter Zustand betrachtet wird, kann die zeitliche Abhängigkeit der Konfiguration  $\boldsymbol{\varphi}$  weggelassen werden.

Die konvektiven Koordinaten fallen hier mit den kartesischen Koordinaten zusammen. In der Bezugskonfiguration sind die kovarianten Basisvektoren durch

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Sie bilden ein Orthonormalsystem. Daher ist die kontravariante gleich der kovarianten Basis:

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}^1 \quad \text{und} \quad \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}^2.$$



**Abbildung 3.3:** Basisvektoren eines ebenen Einheitsquadrats

Das verzerrte Element in der Momentankonfiguration hat die kovarianten Basen

$$\mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nach (3.6) können die kovarianten Basisvektoren der Momentankonfiguration berechnet werden

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}^{1T} \\ \mathbf{g}^{2T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\mathbf{g}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### 3.1.4 Deformationsgradient und Verzerrungsmaße

Ein grundlegendes Maß für die Verformung des Körpers ist durch den *Deformationsgradienten*  $\mathbf{F}$  gegeben. Der Deformationsgradient beschreibt die Dehnungen und Drehungen, die die materiellen Linienelemente des Materials von der Bezugs- konfiguration bis zur Momentankonfiguration erfahren: Der Deformationsgradient bildet die Tangentenvektoren der Bezugs- auf die der Momentankonfiguration ab und kann daher durch die ko- und kontravarianten Basisvektoren berechnet werden:

$$\mathbf{F} := \text{Grad } \varphi(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \sum_{i=1}^d \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i. \quad (3.7)$$

Mit der Definition des Verschiebungsvektors  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  in (3.1) als Differenz der Ortsvektoren der Momentan- und der Bezugs- konfiguration wird der *Verschiebungsgradient*  $\mathbf{H}$  definiert:

$$\mathbf{H} := \text{Grad } \mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{1}. \quad (3.8)$$

An dieser Stelle wird nun noch der *Green-Lagrangesche Verzerrungstensor*  $\mathbf{E}$  definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &:= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{2} ((\mathbf{H} + \mathbf{1})^T (\mathbf{H} + \mathbf{1}) - \mathbf{1}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dieser Verzerrungstensor ist auf die Bezugs- konfiguration bezogen und wird in nichtlinearen Beschreibungen verwendet, da er invariant gegenüber beliebigen

Starrkörper-Rotationen ist. Das quadratische Glied  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$  zeigt den nichtlinearen Charakter. Die einzelnen Komponenten werden mit

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (3.10)$$

berechnet.

Unter der Annahme kleiner Verschiebungen unterscheiden sich Bezugs- und Momentankonfiguration kaum. Dann wird das quadratische Glied vernachlässigt, so dass der *linearisierte* oder *infinitesimale* Verzerrungstensor definiert ist als

$$\boldsymbol{\varepsilon} := \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) . \quad (3.11)$$

*Beispiel 3.1.2* (Interpretation des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors).

Wir betrachten nochmals die Deformation aus Beispiel 3.1.1. Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  kann nach seiner Definition (3.7) mit dem dyadischen Produkt der kontravarianten Basisvektoren der Momentankonfiguration  $\mathbf{g}_i$  und der kovarianten Basisvektoren der Bezugskonfiguration  $\mathbf{G}^i$  berechnet werden:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  kann daraus mit der Definition (3.9) berechnet werden:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 \\ 0.25 & 0.125 \end{pmatrix} .$$

Die Herleitung des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  kann auch über die Konfiguration  $\varphi$  erfolgen. Die Verschiebung ist nach (3.1) definiert durch

$$\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{H} = \text{Grad } \mathbf{u}} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} .$$

Damit kann  $\mathbf{E}$  direkt aus dem Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H}$  mit

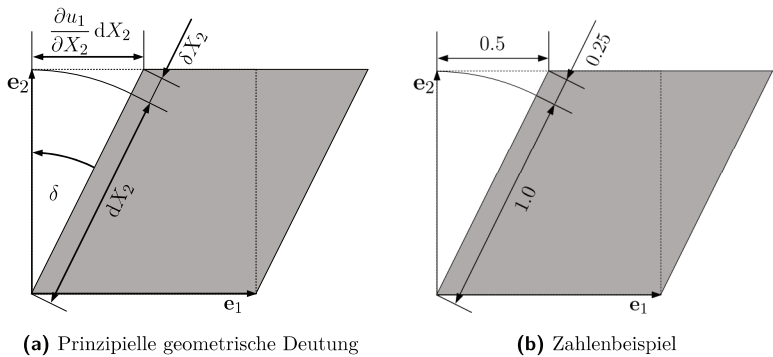
$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0.25 \\ 0.25 & 0.125 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

berechnet werden. Dadurch kann auch nachvollzogen werden, dass die Dehnung  $E_{22}$  nur durch den quadratischen Anteil  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$  zustande kommt.

Um die einzelnen Komponenten des Verzerrungstensors zu interpretieren, betrachten wir die Komponentendefinition (3.10). Die Schubkomponenten setzen sich aus

$$E_{12} = E_{21} = \frac{1}{2} \left( \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial X_2}}_{=0.5} + \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial X_1}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial X_1}}_{=0} \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial X_2}}_{=0.5} + \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial X_1}}_{=0} \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial X_2}}_{=0} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial X_2}$$

zusammen. Geometrisch-anschaulich ist  $E_{12}$  in Abbildung 3.4 dargestellt.



**Abbildung 3.4:** Anschauliche Bedeutung der Verzerrungskomponenten am ebenen Einheitsquadrat

Die partielle Ableitung  $\frac{\partial u_1}{\partial X_2} = \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{dX_2}{dX_2}$  ist gerade das Verhältnis der Schubdeformation in  $\mathbf{e}_1$ -Richtung zur Größe des Quadrats in  $\mathbf{e}_2$ -Richtung. Für kleine Verzerrungen entspricht dies der Winkeländerung  $\delta$ .

Es mag zunächst überraschen, dass die Dehnungskomponente  $E_{22}$  nicht null ist. Detailliert setzt sich die Komponente aus

$$E_{22} = \frac{1}{2} \left( \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial X_2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial X_2}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial X_2}}_{=0.5} \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial X_2}}_{=0.5} + \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial X_2}}_{=0} \underbrace{\frac{\partial u_2}{\partial X_2}}_{=0} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2$$

zusammen. Wir betrachten zunächst die relative Längenänderung der Kante  $dX_2$  mit der Längendifferenz  $\delta X_2$  wie in Abbildung 3.4a. Mit der Längenberechnung nach

dem Satz des Pythagoras, einer Potenzreihenentwicklung des Wurzelausdrucks und Vernachlässigung der höheren Potenzen erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \frac{\delta X_2}{dX_2} &= \frac{\sqrt{dX_2^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} dX_2\right)^2} - dX_2}{dX_2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)^2} - 1 \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)^4 + \dots - 1 \\ &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)^2 \\ &= E_{22}. \end{aligned}$$


---

### 3.1.5 Transformation zwischen Bezugs- und Momentankonfiguration

Für die Transformation der differentiellen Größen zwischen der Bezugs- und der Momentankonfiguration wird im Speziellen die Transformation des Gradienten eines Vektorfeldes benötigt. Durch Anwendung der Kettenregel und der Definition des Deformationsgradienten kann die Transformation mit

$$\text{Grad } \mathbf{v} = \text{grad } \mathbf{v}\mathbf{F} \quad \text{und} \quad \text{grad } \mathbf{v} = \text{Grad } \mathbf{v}\mathbf{F}^{-1} \quad (3.12)$$

angegeben werden. Diese und weitere Transformationsbeziehungen werden ausführlich in de Boer 1982 gezeigt.

Auch bei der Integration von Funktionen wird zwischen der Integration auf der Bezugs- und der Integration auf der Momentankonfiguration unterschieden.

*Schreibweise* (Integrationsmaße). Wir bezeichnen die Integration einer Funktion  $z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bezüglich des Volumens des Körpers  $\Omega$  in der Bezugs- und in der Momentankonfiguration mit

$$\int_{\Omega} z \, d\Omega \quad \text{und} \quad \int_{\Omega_t} z \, d\Omega_t.$$

Die Integration bezüglich der Oberfläche in der Bezugs- und Momentankonfiguration wird mit

$$\int_{\Gamma} z \, d\Gamma \quad \text{und} \quad \int_{\Gamma_t} z \, d\Gamma$$

geschrieben.

*Schreibweise* (Volumen). Das Volumen eines Körpers  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  wird mit  $|\Omega| := \int_{\Omega} 1 \, d\Omega$  gekennzeichnet.

Die Kenntnis des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  ermöglicht die Transformationen weiterer differentieller Größen zwischen  $\Omega$  und  $\varphi(\Omega, t)$ . Da der Deformationsgradient die Dehnung und Drehung von Linienelementen zwischen der Bezugs- und Momentankonfiguration beschreibt, kann die Determinante  $\det(\mathbf{F})$  als Spatprodukt der Transformation der Linienelemente interpretiert werden und damit als das Volumenverhältnis der Momentan- und der Bezugskonfiguration. Für die Transformation von Volumenelementen gilt

$$d\Omega_t = \det(\mathbf{F}) \, d\Omega. \quad (3.13)$$

Mit den Flächennormalenvektoren  $\mathbf{N}$  und  $\mathbf{n}(t)$  in der Bezugs- und Momentankonfiguration kann die Transformation von Flächenelementen durch den Deformationsgradienten mit der Nansonschen Formel

$$\mathbf{n}(t) \, d\Gamma_t = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} \, d\Gamma \quad (3.14)$$

ausgedrückt werden. Die Herleitung der Transformation von Flächenelementen kann Wagner 2017 entnommen werden.

### 3.1.6 Zeitableitungen der Verzerrungstensoren

Wir betrachten zunächst die Ableitung des Deformationsgradienten. Zunächst wird die Definition (3.7) differenziert und dann die Transformation (3.12) angewendet

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) &= \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^d \dot{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{G}^i \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \text{Grad } \dot{\mathbf{u}} = \underbrace{\text{grad } \dot{\mathbf{u}}}_{\mathbf{l}} \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Der hier auftretende *räumliche Geschwindigkeitsgradient*  $\text{grad } \dot{\mathbf{u}}$  wird mit dem Buchstaben  $\mathbf{l}$  bezeichnet. Er wird additiv in den symmetrischen *Verzerrungsgeschwindigkeitstensor*  $\mathbf{d}$ , der auch *Deformationsrate* genannt wird, und den schiefssymmetrischen *Spintensor*  $\mathbf{w}$  aufgeteilt:

$$\mathbf{l} := \text{grad } \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{d} + \mathbf{w} \quad (3.16)$$

mit

$$\mathbf{d} := \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) \quad \text{und} \quad \mathbf{w} := \frac{1}{2}(\mathbf{l} - \mathbf{l}^T). \quad (3.17)$$

Die Zeitableitung des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors wird aus seiner Definition (3.9) mit der Produktregel und der Deformationsrate (3.17) ermittelt:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \right) = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) = \mathbf{F}^T d\mathbf{F}. \quad (3.18)$$

### 3.1.7 Spannungsmaße

Die Momentankonfiguration ändert sich in Berechnungen mit großen Deformationen laufend. Der Zusammenhang zwischen Bezugs- und Momentankonfiguration kann durch die Verwendung passender Spannungsmaße elegant behandelt werden.

Wir betrachten zunächst die Momentankonfiguration. Wirken auf einen Körper äußere Kräfte wie Volumenkräfte  $\mathbf{f}$  und Oberflächenkräfte  $\boldsymbol{\tau}$  wie in Abbildung 3.5b, werden dadurch verteilte innere Spannungen hervorgerufen. Mit dem *Cauchyschen Theorem* ist der Spannungsvektor  $\boldsymbol{\tau}$  dem *Cauchyschen Spannungstensor*  $\boldsymbol{\sigma}$  mit dem Oberflächennormalenvektor  $\mathbf{n}$  über die Beziehung

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (3.19)$$

zugeordnet. Durch den Spannungstensor ist der Spannungszustand in einem Punkt eindeutig bestimmt. Der Cauchysche Spannungstensor ist symmetrisch  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$  und beschreibt die *wahren* Spannungen, also die Kraft pro Fläche in der Momentankonfiguration.

*Schreibweise* (Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors). Die einzelnen Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors werden abweichend von der Standard-Tensornotation mit

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

bezeichnet.

Für die spätere analytische Herleitung der Topologischen Ableitung wird ein Spannungsmaß benötigt, das auf die Bezugsconfiguration bezogen ist. Es ist sinnvoll den 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor  $\mathbf{S}$  zu verwenden, der durch Rücktransformation des Cauchyschen Spannungstensors auf die Bezugsconfiguration entsteht:

$$\mathbf{S} := \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}. \quad (3.20)$$





mationsrate und der zyklischen Vertauschbarkeit unter dem Spiuroperator kann die spezifische Spannungsleistung umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} \\
 &= \text{tr} \left( \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} \right) \\
 &= \text{tr} \left( \underbrace{\mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}}_{=\det(\mathbf{F})^{-1} \mathbf{S}} \underbrace{\dot{\mathbf{E}}^T}_{=\dot{\mathbf{E}}} \right) \\
 &= \det(\mathbf{F})^{-1} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}}.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Da die Determinante des Deformationsgradienten nach (3.13) für die Transformation zwischen Volumenelementen in der Momentankonfiguration und der Bezugskonfiguration benötigt wird, kann die Spannungsleistung pro Einheitsvolumen in der Bezugskonfiguration mit  $\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}}$  angegeben werden. In diesem Zusammenhang wird auch davon gesprochen, dass der 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor und der Green-Lagrangesche Spannungstensor *arbeitskonjugiert* sind.

*Anmerkung 3.1.1 (Definition der Spannungsmaße). Je nach Herleitung wird die Definition des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors  $\mathbf{S}$  genau so gewählt, dass die Spannungsleistungen in der Momentan- und der Bezugskonfiguration gleich sind für beliebige Deformationsraten  $\mathbf{d}$  (zum Beispiel in Altenbach 2018). Damit ergeben sich die Zusammenhänge (3.20) und (3.21) zwischen  $\mathbf{S}$  und  $\boldsymbol{\sigma}$ .*

### 3.1.8 Materialmodellierung – konstitutives Gesetz

Ein konstitutives Gesetz verbindet ein Spannungsmaß mit einem Verzerrungsmaß. Da es verschiedene Spannungs- und zugehörige Verzerrungsmaße gibt, kann das konstitutive Gesetz für ein gegebenes Material verschiedene Formen annehmen. Über entsprechende Umrechnungen können die Größen aber wieder mit dem 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor  $\mathbf{S}$  und dem Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  ausgedrückt werden.

Die typischerweise bei crashbelasteten Strukturen verwendeten Materialien verhalten sich selbst bei kleinen Deformationen nichtlinear. Eine große Klasse von nichtlinearen Materialien kann mit elasto-plastischem Verhalten beschrieben werden. Hierunter fallen Werkstoffe wie Stahl und Aluminium. Die zugehörigen

Modelle sind komplex und die konkrete Modellierung eines Materials hängt vom Finite-Elemente-Berechnungsprogramm ab.

Die analytische Herleitung der Topologischen Ableitung in Kapitel 4 erfolgt zunächst materialunabhängig. Wenn Resultate eines Finite-Elemente-Berechnungsprogramms verwendet werden, dann werden auch dessen spezifische Materialmodellierungen verwendet, ohne diese explizit angeben zu müssen. Dadurch kann die Topologische Ableitung allgemein angegeben werden.

Bei der numerischen Auswertung kann allerdings nicht mehr auf eine Materialbeschreibung verzichtet werden. Für ein elasto-plastisches Material wird in Kapitel 5 auf die wesentliche Beschreibung eingegangen.

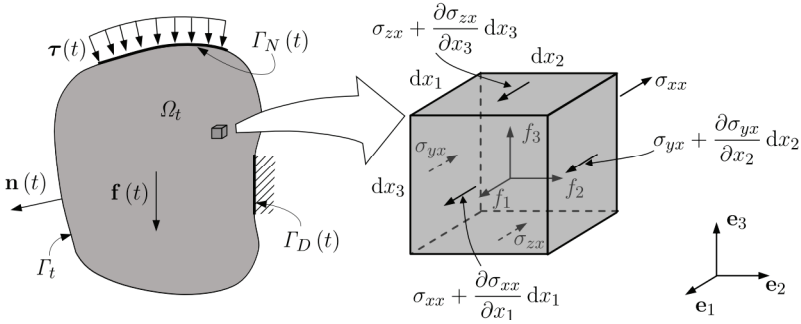
## 3.2 Anfangsrandwertproblem der nichtlinearen Kontinuumsmechanik

Ausgehend von der lokalen Bewegungsgleichung wird in diesem Abschnitt das Anfangsrandwertproblem entwickelt, das eine nichtlineare transiente Bewegung des Körpers beschreibt.

### 3.2.1 Lokale Bewegungsgleichung

Wir betrachten zunächst den Körper in der Momentankonfiguration  $\Omega_t$  in Abbildung 3.6 links, seine Oberfläche identifizieren wir mit  $\Gamma_t$ . Wir setzen homogenes isotropes Materialverhalten voraus. Das heißt, das Material verhält sich an allen materiellen Punkten gleich und die Eigenschaften sind richtungsunabhängig.

Für die Herleitung des dynamischen Gleichgewichts analog zu Becker und Gross 2002 betrachten wir zunächst ein infinitesimales Volumenelement des Körpers, wie in Abbildung 3.6 auf der rechten Seite. Auf das Volumenelement wirkt die Volumenkraft  $\mathbf{f}$  (beispielsweise infolge der Schwerkraft) und an den Deckflächen die Komponenten des Spannungstensors. In der Abbildung sind beispielhaft nur die für das Gleichgewicht in  $\mathbf{e}_1$ -Richtung relevanten Spannungen eingezeichnet. Die infinitesimalen Zuwächse der Spannung werden durch eine Taylor-Reihe unter Vernachlässigung Glieder höherer Ordnung beschrieben.



**Abbildung 3.6:** Lokales Gleichgewicht beispielhaft in  $\mathbf{e}_1$ -Richtung (modifiziert aus Becker und Gross 2002)

Das Kräftegleichgewicht in  $\mathbf{e}_1$ -Richtung ist

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - \sigma_{xx} dx_2 dx_3 + \\ & \left( \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 - \sigma_{yx} dx_1 dx_3 + \\ & \left( \sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 - \sigma_{zx} dx_1 dx_2 + f_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0. \end{aligned}$$

Zusammengefasst wird dies zu

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x_3} + f_1 = 0.$$

Mit der Symmetrie des Cauchy'schen Spannungstensors und analog für die Gleichgewichtsformulierungen in die anderen beiden Richtungen lässt sich das System gekoppelter Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x_3} + f_1 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x_3} + f_2 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x_3} + f_3 &= 0, \end{aligned}$$

in der kompakten Form

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

schreiben.

Sind die Gleichgewichtsbedingungen nicht erfüllt, wird das Volumenelement beschleunigt und die Bewegungsgleichung lautet mit der Massendichte  $\varrho$  in lokaler Form:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}(t) = \varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (3.24)$$

Die resultierende Bewegung wird durch die spezifische Trägheitskraft  $\varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$  beschrieben.

### 3.2.2 Formulierung des Anfangsrandwertproblems

Der Teil der Körperoberfläche  $\partial\Omega_t$ , der in Form eines Spannungsvektors  $\boldsymbol{\tau}(t)$  belastet wird, heißt *Neumannrand* und wird mit  $\Gamma_N(t)$  bezeichnet. Der Vektor  $\mathbf{n}(t)$  ist ein äußerer Normalenvektor auf dem Rand. Mit dem Cauchyschen Theorem (3.19) wird der Zusammenhang zwischen dem Cauchyschen Spannungstensor und der äußeren Spannungsbelastung hergestellt  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}$ . Auf dem *Dirichletrand*  $\Gamma_D(t)$  ist die Verschiebung  $\mathbf{u}$  durch  $\bar{\mathbf{u}}$  festgelegt. Der Körper kann an beliebigen Stellen mit einer initialen Geschwindigkeit  $\bar{\dot{\mathbf{u}}}$  beaufschlagt werden. Die Dichte  $\varrho$  des Körpers ändert sich bei der Verformung nicht. Das gesamte System

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)) + \mathbf{f}(t) = \varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} \quad \text{in } \Omega_t, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \Gamma_D(t), \quad (3.26)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{X}, t) \quad \text{auf } \Gamma_N(t), \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\cdot, t=0) = \dot{\mathbf{u}}(\cdot, t=0) = \bar{\dot{\mathbf{u}}} \quad (3.28)$$

wird aufgrund der Verschiebungsrandbedingungen und initialen Geschwindigkeit mathematisch als ein *Anfangsrandwertproblem* bezeichnet. Die Lösung des Systems erfolgt sowohl räumlich (Randwertproblem) als auch zeitlich (Anfangswertproblem). Die vorgegebene Verschiebung kann eine Lagerungsrandbedingung wie beispielsweise eine Einspannung oder ein Auflager sein. Es müssen nicht zwangsläufig alle Freiheitsgrade auf dem Dirichletrand festgelegt sein. Auch bei der initialen Geschwindigkeit und der Spannungsrandbedingung müssen nicht alle Richtungen festgelegt werden.

Die Lösung des Differentialgleichungssystems ist die vektorwertige Verschiebungsfunktion  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Der Zeitpunkt  $T$  ist dabei der Endzeitpunkt, zu dem das mechanische System seine Gültigkeit verliert. Wenn die Abhängigkeit

von Ort oder Zeit eindeutig ist, wird der Übersichtlichkeit halber diese Abhängigkeit nicht explizit ausgeschrieben. Die erste Ableitung der Verschiebung nach der Zeit  $t$  ist die Geschwindigkeit  $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)$ , die zweite Ableitung die Beschleunigung  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u} = \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)$ .

*Anmerkung 3.2.1 (Geometrischer Körper und Gebiet). Ein Körper ist in der Geometrie eine dreidimensionale Figur, die durch ihre Oberfläche beschrieben werden kann. Diese Definition wird in der Mechanik ohne weitere Erklärung adaptiert.*

*In der Analysis (siehe Forster 2017b) wird der Begriff des Gebiets definiert: Ein Gebiet ist eine offene und zusammenhängende Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ .*

*In diesem Fall ist das „offen“ ein wesentlicher Unterschied zum geometrischen Körper, bei dem implizit der Rand als Teil des Körpers gesehen wird. Die Eigenschaften eines Gebiets sind für diese Arbeit nur von untergeordneter Bedeutung, weil keine funktionalanalytische Betrachtung erfolgt. Einige Vorgehensweisen und Definitionen, vor allem im nächsten Kapitel, sind allerdings mit dem mathematischen Gebiet assoziiert und werden daher mit den Literaturbegriffen bezeichnet.*

Speziell für diese Dissertation muss das Anfangsrandwertproblem eingeschränkt werden. Die Herleitungen der Topologischen Ableitung gelten unter den folgenden Voraussetzungen:

*Voraussetzung 3.2.1 (Verschiebungsunabhängigkeit der Belastungen).*

Sowohl die Spannungsrandbedingungen  $\boldsymbol{\tau}$  als auch die Volumenkräfte  $\mathbf{f}$  sind von der Verschiebung  $\mathbf{u}$  unabhängig. Dies schließt beispielsweise Kontaktphänomene aus.

*Voraussetzung 3.2.2 (Unabhängigkeit der Anfangswerte).*

Die Anfangswerte (3.28) des mechanischen Anfangsrandwertproblems sind von der Form des Körpers und vom weiteren Verlauf der Verschiebung unabhängig festgelegt.

Die Formulierung des Anfangsrandwertproblems (3.25) wird in der Literatur auch als *strenge Form* (Dinkler 2017) der Bewegungsgleichung bezeichnet. Eine analytische Lösung der Differentialgleichungen ist in der nichtlinearen Kontinuumsmechanik im Allgemeinen nicht möglich. Eine näherungsweise Berechnung auf der Basis der Methode der finiten Elemente beispielsweise ist jedoch möglich. Dazu wird die sogenannte *schwache Form* der Bewegungsgleichung benötigt.

### 3.2.3 Schwache Form des Anfangsrandwertproblems

Die Bezeichnung „schwach“ hat den mathematischen Hintergrund, dass schwächere Anforderungen an die Lösungsfunktion  $\mathbf{u}$  gestellt werden, als die Forderung nach einer stetig differenzierbaren Funktion als Lösung des Anfangsrandwertproblems in der strengen Form.

Die Bewegungsgleichung (3.25) wird skalar multipliziert mit einer vektorwertigen Funktion  $\phi(\mathbf{X}, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , die auf dem Dirichletrand  $\Gamma_D(t)$  verschwindet:  $\phi \in \{\phi \mid \phi = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_D(t)\}$ . Die Funktion  $\phi$  wird als *Testfunktion* bezeichnet. Anschließende Integration über den Körper liefert:

$$\int_{\Omega_t} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \phi \, d\Omega_t - \int_{\Omega_t} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \phi \, d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \mathbf{f}(t) \cdot \phi \, d\Omega_t = 0. \quad (3.29)$$

Durch Anwendung der Produktregel für die Divergenz (3.3) wird das erste Integral von (3.29) aufgespalten in das erste Integral in der folgenden Gleichung (3.30) und ein Integral, das durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes (Anhang B.2) und Einarbeitung der Spannungsrandbedingungen auf das Randintegral auf dem Neumannrand führt. Das Randintegral auf dem Dirichletrand und auf dem freien Rand wird durch die Wahl der Testfunktionen und die fehlende äußere Belastung gleich null. Wir erhalten damit die schwache Form des Gleichgewichts

$$\underbrace{\int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \operatorname{grad} \phi \, d\Omega_t}_{\text{virtuelle innere Energie}} + \underbrace{\int_{\Omega_t} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \phi \, d\Omega_t}_{\text{virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte}} - \underbrace{\int_{\Omega_t} \mathbf{f}(t) \cdot \phi \, d\Omega_t - \int_{\Gamma_N(t)} \boldsymbol{\tau}(t) \cdot \phi \, d\Gamma_t}_{\text{virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte}} = 0. \quad (3.30)$$

Die schwache Form ist durch das Skalarprodukt eine skalarwertige Funktion in der Dimension der Arbeit. Die von den Testfunktionen geleistete *virtuelle* innere Energie wird durch den ersten Term des Gleichgewichts beschrieben. Der zweite Term beschreibt die virtuelle Arbeit infolge der Trägheit und die letzten beiden Terme die virtuelle Arbeit infolge der äußeren Belastung. Der Begriff „virtuell“ wird hier in Anlehnung an das Prinzip der *virtuellen Verrückungen* verwendet, wo als Testfunktion eine gedachte und in Wirklichkeit nicht vorhandene Verschiebung verwendet wird und damit die Dimension der Arbeit entsteht. Mit der Forderung, dass die Testfunktion auf dem Dirichletrand verschwindet, ist die Verrückung mit den geometrischen Randbedingungen verträglich.

Wir führen jetzt noch eine geschwindigkeitsabhängige spezifische Dämpfung  $c_d$  mit ein, die in der numerischen Berechnung eingesetzt wird, um Verluste durch Reibung und Viskosität im Material abzubilden. Diese phänomenologische Dämpfung hat eigentlich keine analytische Entsprechung und wird meist in der räumlich diskretisierten Form aus der Massen- und Steifigkeitsmatrix zusammengesetzt. Für die Vergleiche der Methoden im nächsten Kapitel wird der Dämpfungsterm  $\int_{\Omega} c_d \dot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\Omega$  trotzdem in die analytische Beschreibung mit eingefügt, ohne konkret dessen Berechnung benennen zu müssen.

Mit der Volumen- und Flächentransformation (3.14) und dem Cauchyschen Theorem (3.19) kann der äußere Spannungsvektor  $\boldsymbol{\tau}$  auf die Bezugskonfiguration bezogen werden ( $\boldsymbol{\tau}$ ). Mit der Rücktransformation des Cauchyschen Spannungstensors (3.20) und den Transformationsbeziehungen (3.13) und (3.12) kann die schwache Form des Gleichgewichts in der Bezugskonfiguration angegeben werden:

$$\begin{aligned} \left\langle G(\mathbf{u}(\Omega), \dot{\mathbf{u}}(\Omega), \ddot{\mathbf{u}}(\Omega), \Omega), \boldsymbol{\phi} \right\rangle \\ := \int_{\Omega} \mathbf{F}\mathbf{S} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\phi} \, d\Omega + \int_{\Omega} c_d \dot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\Omega + \int_{\Omega} \varrho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\Omega \\ - \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\Omega - \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\tau}(t) \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\Gamma = 0. \quad (3.31) \end{aligned}$$

*Schreibweise* (Duale Paarung). Ein *Funktional* ist eine Abbildung von Funktionen auf Skalare. Im Fall des *Gleichgewichtsfunktional*s  $G$  wird die Testfunktion  $\boldsymbol{\phi}$  in die reellen Zahlen abgebildet.

Die Schreibweise der sogenannten *dualen Paarung*  $\langle G, \boldsymbol{\phi} \rangle$  wird verwendet, um zu verdeutlichen, dass das Funktional  $G$  auf die Testfunktion  $\boldsymbol{\phi}$  angewendet wird. Dies erleichtert bei abstrakten analytischen Herleitungen die Übersicht über austauschbare Größen einer Gleichung und im Weiteren auch die Übersicht über die Kettenregel bei Ableitungen.<sup>2</sup>

Die Definition des Gleichgewichtsfunktional  $G$  soll verdeutlichen, dass das Gleichgewicht von der Verschiebungsfunktion  $\mathbf{u}$ , der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{u}}$  und der Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{u}}$  abhängt, die durch den Körper  $\Omega$  beeinflusst werden. In der Optimalsteuerungstheorie wird die Verschiebungsfunktion als *Zustand* von engl.

<sup>2</sup>In der Mathematik wird die duale Paarung in umgekehrter Reihenfolge geschrieben ( $\langle \boldsymbol{\phi}, G(\mathbf{u}(\Omega), \dot{\mathbf{u}}(\Omega), \ddot{\mathbf{u}}(\Omega)) \rangle$ ), der Übersichtlichkeit halber bleiben wir aber bei der in der Physik üblichen Schreibweise.

*state* bezeichnet und der Körper als *Steuerung* von engl. *control*. Da der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  explizit durch die Verschiebung definiert ist, wird die Abhängigkeit nicht weiter ausgeschrieben. Der 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor  $\mathbf{S}$  hängt über das konstitutive Gesetz von der Verschiebung ab.

Die Gleichungen der Kontinuumsmechanik können also mit Bezug auf die verformte oder unverformte Konfiguration des Körpers formuliert werden. In dieser Arbeit ist, mit Blick auf die Topologische Ableitung, die Beschreibung in der Bezugskonfiguration von besonderem Interesse. Ihre Definition zielt darauf ab, die Gebietsintegrale auf einer Geometrie auszudrücken, die bekannt ist.

*Schreibweise* (Linearer Spezialfall). In dieser Arbeit werden immer auch die Resultate der Topologischen Ableitung unter linear elastischem Materialverhalten und kleinen Verschiebungen angegeben. Bei der Plausibilitätsprüfung anhand praktischer Beispiele in Kapitel 6 wird dann überprüft, ob die nichtlinearen Sensitivitäten bei genügend kleinen Verschiebungen und langsamen Belastungen in die bekannten linearen Sensitivitäten übergehen.

Größen und Funktionale, die unter den linearen Voraussetzungen eine besondere Form haben, werden mit dem hochgestellten <sup>lin</sup> hervorgehoben.

*Anmerkung 3.2.2* (Bezugs- und Momentankonfiguration bei kleinen Verschiebungen und Verzerrungen). *Ein Spezialfall der Bewegungsgleichungen ist das statische Gleichgewicht (3.23). Wir sprechen von linearer Statik, wenn der Spannungszustand  $\boldsymbol{\sigma}$  zeitunabhängig und eindeutig durch den momentanen Deformationszustand festgelegt ist. Der Spannungszustand ist insbesondere unabhängig von der Deformationsgeschichte, und nach einer vollständigen Entlastung gibt es keine bleibenden Verzerrungen. Das Material verhält sich linear elastisch, wenn der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen linear ist, also beispielsweise das Hookesche Gesetz gilt. Geometrisch linear bedeutet, dass wir uns auf kleine Deformationen beschränken, bei denen nicht mehr zwischen Bezugs- und Momentankonfiguration unterschieden werden muss und bei denen der Verzerrungszustand durch den infinitesimalen Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon} \approx \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{u} + \text{grad } \mathbf{u}^T)$  beschrieben werden kann. Bei linear elastischen statischen Problemen mit kleinen Verschiebungen werden daher nur die Bezeichnungen der Momentankonfiguration verwendet.*



Das Skalarprodukt eines symmetrischen mit einem schiefssymmetrischen Tensor verschwindet nach (3.2) und damit ist im Linearen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{grad } \boldsymbol{\phi} &= \underbrace{\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{1}{2} (\text{grad } \boldsymbol{\phi} + \text{grad } \boldsymbol{\phi}^T)}_{=\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi})} + \underbrace{\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{1}{2} (\text{grad } \boldsymbol{\phi} - \text{grad } \boldsymbol{\phi}^T)}_{=0} \\ &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Das Kräftegleichgewicht (ohne Masseneffekte und ohne Zeitabhängigkeit) ist ein Randwertproblem. Die schwache Form kann aus der strengen Form (3.23) gewonnen werden:

$$\begin{aligned} \left\langle G^{\text{lin}}(\mathbf{u}(\Omega), \Omega), \boldsymbol{\phi} \right\rangle \\ := \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\Omega - \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\Gamma = 0 . \end{aligned} \quad (3.33)$$

### 3.2.4 Linearisierung der schwachen Form

Der nichtlineare Charakter des Gleichgewichtsfunktional  $G$  wird hauptsächlich durch den nichtlinearen Zusammenhang zwischen Spannung  $\boldsymbol{S}$  und Verzerrung  $\boldsymbol{E}$  (nichtlineares Materialgesetz) und durch die geometrische Nichtlinearität (nichtlinearer Green-Lagrangescher Verzerrungstensor  $\boldsymbol{E}$ ) beeinflusst. Sowohl für die numerische Lösung des Anfangsrandwertproblems mit dem Newton-Verfahren als auch für die Topologische Ableitung wird die Linearisierung des Gleichgewichtsfunktional bezüglich der Verschiebung benötigt. Da die Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{u}}$  und die Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{u}}$  durch zeitliche Ableitung der Verschiebung entstehen, wird die ausführliche Schreibweise in diesem Abschnitt auf das Wesentliche verkürzt. Die Lösung des Anfangsrandwertproblems erfolgt inkrementell in der Zeit:

Vom Gleichgewicht  $G(\mathbf{u}(\Omega, t^{(k)}), \Omega)$  zu einem Zeitpunkt  $t^{(k)}$  ausgehend wird eine Näherungslösung  $\mathbf{u}(\Omega, t^{(k+1)}) = \mathbf{u}(\Omega, t^{(k)}) + \Delta \mathbf{u}$  für den nächsten Zeitpunkt  $t^{(k+1)}$  gesucht, zu dem auch das Gleichgewicht erfüllt sein muss.

Die Taylor-Entwicklung des Gleichgewichtsfunktional  $G$  mit dem Entwicklungspunkt  $\mathbf{u}(\Omega, t^{(k)})$  liefert:

$$\begin{aligned} \left\langle G(\mathbf{u}(\Omega, t^{(k+1)}), \Omega), \boldsymbol{\phi} \right\rangle &= \left\langle G(\mathbf{u}(\Omega, t^{(k)}) + \Delta \mathbf{u}, \Omega), \boldsymbol{\phi} \right\rangle = \\ &= \underbrace{\left\langle G(\mathbf{u}(\Omega), \Omega), \boldsymbol{\phi} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left\langle G(\mathbf{u}(\Omega), \Omega), \boldsymbol{\phi} \right\rangle, \Delta \mathbf{u} \right\rangle}_{=0 \text{ für Gleichgewicht}} + R . \end{aligned} \quad (3.34)$$

Hierin bezeichnet  $\left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \langle G(\mathbf{u}(\Omega), \Omega), \phi \rangle, \Delta \mathbf{u} \right\rangle$  die Linearisierung von  $G$  an der Stelle  $\mathbf{u}$  angewendet auf das Verschiebungsinkrement  $\Delta \mathbf{u}$ . Das Restglied  $R$  fasst die Ableitungen höherer Ordnung zusammen. Unter Vernachlässigung des Restglieds  $R$  führt (3.34) auf eine nichtlineare Gleichung für das Verschiebungsinkrement  $\Delta \mathbf{u}$ . Die Lösung kann beispielsweise mithilfe des Newton-Verfahrens erfolgen. Dies wird bei der Lösung des diskretisierten Problems in Abschnitt 3.5 erläutert.

Die Bezeichnung „Zeitpunkt“ wird hier aufgrund der expliziten Zeitabhängigkeit des Anfangsrandwertproblems gewählt. Ist keine Zeitabhängigkeit gegeben, wird meist die Last schrittweise erhöht. Dann wird im Verlauf von Lastschritten gesprochen. Das Lösungsverfahren bleibt aber prinzipiell gleich.

Unter der Voraussetzung, dass die äußeren Belastungen unabhängig von der Verschiebung sind (Voraussetzung 3.2.1 auf Seite 40), wird für die Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichtsfunktional (3.31) nur die Linearisierung der virtuellen inneren Energie benötigt.

Betrachtet wird zunächst die Ableitung des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$ . Mit der Definition (3.8) folgt für die Linearisierung des Deformationsgradienten

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{F}(\mathbf{u}), \Delta \mathbf{u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\text{Grad } \mathbf{u} + \mathbf{1}), \Delta \mathbf{u} \right\rangle = \text{Grad } \Delta \mathbf{u}.$$

Nach dem Satz über die differenzierbare Abhängigkeit vom Parameter (Anhang B.3) darf unter dem Integral differenziert werden. Damit kann die Linearisierung der virtuellen inneren Energie angegeben werden:

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \int_{\Omega} \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \text{Grad } \phi \, d\Omega, \Delta \mathbf{u} \right\rangle \\ &= \int_{\Omega} \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{F} \mathbf{S}), \Delta \mathbf{u} \right\rangle \cdot \text{Grad } \phi \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left( \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{F} \mathbf{S}, \Delta \mathbf{u} \right\rangle + \left\langle \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{S}, \Delta \mathbf{u} \right\rangle \right) \cdot \text{Grad } \phi \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \text{Grad } \Delta \mathbf{u} \mathbf{S} \cdot \text{Grad } \phi \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{F} \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{S}(\mathbf{u}), \Delta \mathbf{u} \right\rangle \cdot \text{Grad } \phi \, d\Omega. \quad (3.35) \end{aligned}$$

In der letzten Zeile fehlt noch die Ableitung des Spannungstensors. Unter Zuhilfenahme der Linearisierung des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors mit der Produktregel

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}}, \Delta \mathbf{u} \right\rangle = \frac{1}{2} (\text{Grad } \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \text{Grad } \Delta \mathbf{u})$$

kann schließlich noch die Linearisierung des 2.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor vereinfacht werden:

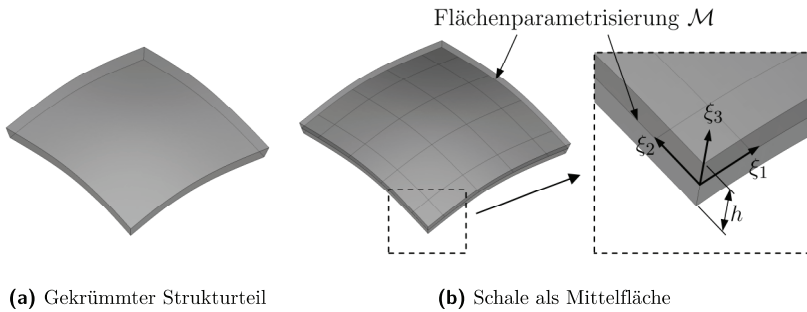
$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{S}(\mathbf{u}), \Delta \mathbf{u} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}, \left\langle \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}}, \Delta \mathbf{u} \right\rangle \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}, \frac{1}{2} (\text{Grad } \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \text{Grad } \Delta \mathbf{u}) \right\rangle. \end{aligned}$$

Es verbleibt der *inkrementelle Materialtensor*  $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}$ , der vom verwendeten Materialmodell abhängt und daher hier nicht weiter aufgelöst werden kann.

### 3.3 Schalenformulierung

Gekrümmte Strukturteile, die sehr dünn im Vergleich zu ihrer flächigen Ausdehnung sind, wie beispielsweise in Abbildung 3.7a skizziert, werden als *Schalen* bezeichnet. Dies sind beispielsweise Bleche. Die Modellierung wird hier zunächst in der Kontinuumsmechanik erläutert und im folgenden Abschnitt diskretisiert.

Durch die geringe Dicke  $h$  werden Schalen meist durch eine Mittelfläche  $\mathcal{M}$  als Referenzfläche idealisiert, siehe Abbildung 3.7b. Das Schalenkontinuum kann dann durch zwei Flächenparameter  $\xi_\alpha$  (der griechische Index  $\alpha$  kann die Werte 1 und 2 annehmen) bezüglich der Mittelfläche und durch eine Koordinate  $\xi_3$  in Dickenrichtung beschrieben werden. Basierend auf dieser Parametrisierung werden dann die Schalengleichungen (Kinematik, schwache Form, Materialgleichungen) aus den dreidimensionalen Gleichungen der Kontinuumsmechanik hergeleitet.



**Abbildung 3.7:** Vereinfachung der Schalengeometrie

Die Flächenparameter werden in der Regel als konvektive Koordinaten gewählt. Zunächst können wir den Ortsvektor  $\mathbf{X}$  eines Punktes im Schalenkontinuum in der Bezugskonfiguration durch

$$\mathbf{X}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \mathbf{X}_{\mathcal{M}}(\xi_\alpha, t) + \frac{h}{2}\xi_3\mathbf{N}(\xi_\alpha, t) \quad (3.36)$$

beschreiben, wobei  $\mathbf{N}$  der Normaleneinheitsvektor zur Schalenmittelfläche  $\mathcal{M}$  in der Bezugskonfiguration ist. Die Dickenparametrisierung durch  $\frac{h}{2}\xi_3$  mit  $\xi_3 \in [-1, 1]$  wird dabei passend zur isoparametrischen Formulierung der späteren Diskretisierung gewählt.

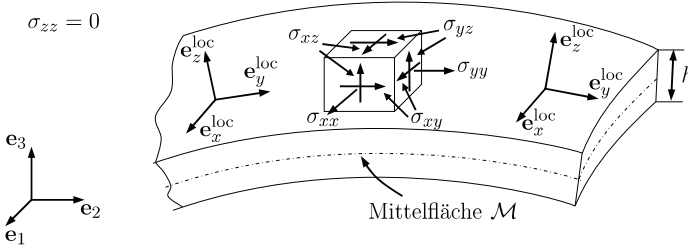
Für die Schalenkinematik wird näherungsweise eine Überlagerung von Plattenkinematik (Belastung normal zur Mittelfläche) und Scheibenkinematik (Belastung tangential zur Mittelfläche) angenommen. Zur Einordnung werden hier die beiden bekanntesten Plattentheorien gegenübergestellt:

- Nach der *Kirchhoffschen Theorie* werden Schubverformungen vernachlässigt und die Normalen bleiben während der Deformation senkrecht zur (deformierten) Mittelfläche. Dadurch verschwinden die Schubverzerrungen in Dickenrichtung sowie die Dehnung in Dickenrichtung. Das entspricht formal einem ebenen Verzerrungszustand (EVZ). Für dünne Platten stellt die Kirchhoffsche Theorie eine sehr gute Näherung dar.
- Die *Reissner-Mindlinsche Theorie* berücksichtigt auch Schubverformungen, die bei dicken Platten nicht mehr vernachlässigt werden können. Die ursprünglich zur Mittelfläche normale Gerade bleibt daher während der Deformation im Allgemeinen nicht senkrecht zur (deformierten) Mittelfläche. Sie wird auch *schubweiche* Theorie genannt.

Für beide Theorien gilt: Die Normalspannung in Dickenrichtung  $\sigma_{zz}$  ist überall in der Platte vernachlässigbar klein im Vergleich zu den Spannungen in der Plattenebene:  $\sigma_{zz} \ll \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ . Die Bezeichnungen sind in Abbildung 3.8 an einem Volumenelement in der Schale eingezeichnet.

Für nichtlineare Probleme ist praktisch nur noch die Reissner-Mindlinsche Theorie von Bedeutung. Jedoch wird in dieser Arbeit in Kapitel 5 auf Resultate aus der linearen Elastizitätstheorie unter der Annahme der Kirchhoffschen Plattentheorie zurückgegriffen. Die folgenden kinematischen Beziehungen und Herleitungen beziehen sich auf die Verwendung der Reissner-Mindlinschen Theorie. Die Annahmen der Kirchhoffschen Plattentheorie werden bei deren Verwendung besonders hervorgehoben.

Für den Scheibenanteil wird angenommen, dass die Normal- und Schubspannungen in Dickenrichtung  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xz}$  und  $\sigma_{yz}$  gleich null sind. Dies entspricht einem ebenen Spannungszustand (ESZ), der auch *Membranspannungszustand* genannt wird.



**Abbildung 3.8:** Annahmen der Schalenkinematik: keine Verzerrung in Dickenrichtung (modifiziert aus Bathe 2002)

Mit der zusätzlichen Annahme, dass der Querschnitt bei der Deformation eben bleibt, wird der Ortsvektor eines Punktes in der Momentankonfiguration durch

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \varphi_{\mathcal{M}}(\xi_\alpha, t) + \frac{h}{2} \xi_3 \mathbf{d}(\xi_\alpha, t) \quad \text{mit } \xi_3 \in [-1, 1] \quad (3.37)$$

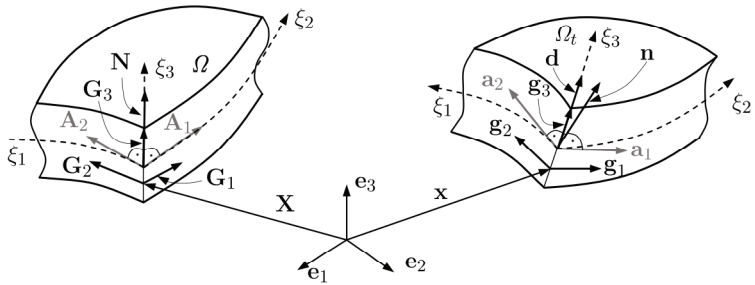
dargestellt. Die Konfiguration  $\varphi_{\mathcal{M}}$  definiert die Deformation der Schalenmittelfläche. Die Tangentenvektoren an der Mittelfläche werden durch die Ableitung der Konfiguration in Richtung der konvektiven Koordinaten berechnet:

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \varphi_{\mathcal{M}}}{\partial \xi_\alpha}. \quad (3.38)$$

Der *Direktor*  $\mathbf{d}$ , dargestellt in Abbildung 3.9, beschreibt die Verdrehung des Querschnitts bei der Deformation. Damit unterscheidet er sich nach der Reissner-Mindlinschen Plattentheorie vom Mittelflächennormalenvektor  $\mathbf{n}$ , der durch das Kreuzprodukt der Tangenten  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  an der Mittelfläche definiert wird:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|_2}. \quad (3.39)$$

Die Freiheitsgrade der Schale sind die beiden lokalen Rotationen, die die Biegung der Schale erzeugen und die lokalen Verschiebungen in allen drei Raum-Richtungen, die in Abbildung 3.10a dargestellt sind. Daher wird die Schalenformulierung auch 5-Parameter-Theorie genannt. Die Transformation der lokalen Größen in das globale kartesische Koordinatensystem ergibt dann 6 Freiheitsgrade wie in Abbildung 3.10b.



**Abbildung 3.9:** Kovariante Basisvektoren der Schale in Bezugs- und Momentankonfiguration, modifiziert aus Wriggers 2001

Die Darstellung mit den lokalen Größen lässt eine Aufdatierung der Verschiebungen und Rotationen durch Addition der inkrementellen Verschiebungen und Rotationen zu.

Die Verzerrung in Dickenrichtung ist null, wenn im kinematischen Ansatz ein zusätzlicher Zwang eingebaut wird, bei dem der Direktor sich durch eine reine Drehung  $\mathbf{d} = \mathbf{R}\mathbf{N}$  aus dem Normalenvektor mit einer Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  ergibt, die im Folgenden genauer beschrieben wird. Dann ändert sich die Länge des Direktors während der Deformation nicht, also gilt  $\|\mathbf{d}\|_2 = 1$ . Keine Verzerrung in Dickenrichtung bedeutet gleichzeitig keine Änderung der Schalendicke. Die 5-Parameter-Theorie ist damit eine sehr grundlegende aber vereinfachte Schalentheorie, die für die Untersuchungen in dieser Dissertation völlig ausreichend ist. Die konkrete Schalenmodellierung hängt wieder von der Implementierung im verwendeten Finite-Elemente-Berechnungsprogramm ab.

Die folgende Notation erleichtert die Darstellung und Berechnung der Ableitung der Rotationen.

*Schreibweise* (Kreuzproduktmatrix). Das Kreuzprodukt zweier Vektoren  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$  kann formell durch die Multiplikation mit der schiefsymmetrischen Matrix

$$[\mathbf{v}]_{\times} := \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

geschrieben werden:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = [\mathbf{v}]_x \mathbf{w}.$$

Um nun eine zu den Verschiebungen äquivalente Aufdatierung der globalen Rotationen zu bekommen, wird die Rotationsmatrix des Direktors  $\mathbf{R}$  durch eine Rotationsachse  $\frac{\boldsymbol{\theta}}{\|\boldsymbol{\theta}\|_2}$  aus den drei Rotationswinkeln um die drei globalen Achsen  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$  und dem Rotationswinkel  $\theta = \|\boldsymbol{\theta}\|_2$  gemäß Abbildung 3.10c mit der sogenannten *Rodrigues-Formel*<sup>3</sup> dargestellt

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{1} + \frac{\sin \theta(t)}{\theta(t)} [\boldsymbol{\theta}(t)]_x + \frac{1 - \cos \theta(t)}{\theta(t)^2} [\boldsymbol{\theta}(t)]_x^2. \quad (3.41)$$

Die Rodrigues-Formel ist für schiefsymmetrische Matrizen wie der Kreuzproduktmatrix  $[\boldsymbol{\theta}(t)]_x = -[\boldsymbol{\theta}(t)]_x^T$  gleich dem Matrixexponential

$$\mathbf{R}(t) = \exp([\boldsymbol{\theta}(t)]_x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\boldsymbol{\theta}(t)]_x^n}{n!}, \quad (3.42)$$

da für schiefsymmetrische Matrizen  $[\boldsymbol{\theta}(t)]_x^3 = -\|\boldsymbol{\theta}(t)\|_2^2 [\boldsymbol{\theta}(t)]_x$  gilt und die Exponentialreihe in die Reihendarstellungen des Sinus und des Kosinus aufgespalten werden kann.

Die kovarianten Basisvektoren der Bezugskonfiguration werden analog zu ihrer Definition (3.4) durch

$$\mathbf{G}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi_\alpha} = \mathbf{A}_\alpha + \xi_3 \frac{h}{2} \mathbf{N}_{,\alpha} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{G}_3 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi_3} = \frac{h}{2} \mathbf{N} \quad (3.44)$$

mit den Tangentenvektoren  $\mathbf{A}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}_M}{\partial \xi_\alpha}$  der Mittelfläche bestimmt. Diese Tangentenvektoren werden auch zur Bestimmung des Normalenvektors herangezogen

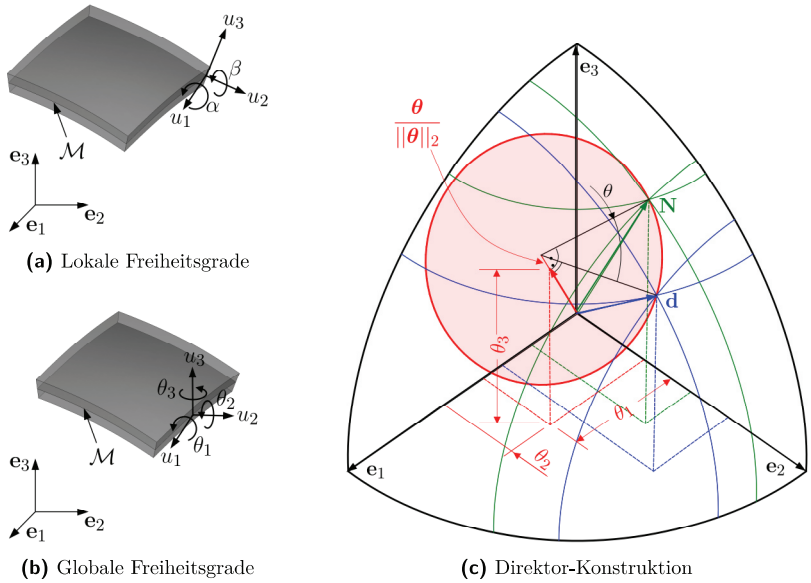
$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|_2}. \quad (3.45)$$

In der Momentankonfiguration werden die kovarianten Basisvektoren

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \xi_\alpha} = \mathbf{a}_\alpha + \frac{h}{2} \xi_3 \mathbf{d}_{,\alpha} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{g}_3 = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \xi_3} = \frac{h}{2} \mathbf{d} \quad (3.47)$$

<sup>3</sup>nach Benjamin Olinde Rodrigues (1795-1851), französischer Mathematiker



**Abbildung 3.10:** Globale und lokale Rotation

ebenfalls durch die Tangentenvektoren  $\mathbf{a}_\alpha$  der Mittelfläche und jetzt durch die Richtungsableitungen des Direktors  $\mathbf{d}_{,\alpha}$  und den Direktor  $\mathbf{d}$  selbst bestimmt.

Die kontravarianten Basisvektoren werden jeweils über die Orthogonalitätsbeziehung (3.5) beziehungsweise (3.6) aus den kovarianten Basisvektoren berechnet.

In Abbildung 3.9 sind Lage und Richtung der kovarianten Basisvektoren in der Bezugs- und der Momentankonfiguration skizziert. Die Richtungsableitungen des Direktors sind nach der Produktregel und der Definition der Drehung mit

$$\mathbf{d}_{,\alpha} = \mathbf{R}\mathbf{N}_{,\alpha} + \mathbf{R}_{,\alpha}\mathbf{N} \quad (3.48)$$

gegeben. Die Richtungsableitung der Rodrigues-Rotation ergibt sich aus der Richtungsableitung der Rotation

$$\theta_{,\alpha} = \frac{1}{\theta} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}$$



und Anwendung der Produkt- und Quotientenregel

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{,\alpha} = & \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\theta^3} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} [\boldsymbol{\theta}]_x + \frac{\sin \theta}{\theta} [\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}]_x \\ & + \frac{2 \cos \theta - 2 + \theta \sin \theta}{\theta^3} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} [\boldsymbol{\theta}]_x^2 \\ & + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} ([\boldsymbol{\theta}]_x [\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}]_x + [\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}]_x [\boldsymbol{\theta}]_x) . \end{aligned} \quad (3.49)$$

Die verbleibende Richtungsableitung der Rotation  $\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}$  wird erst mit der räumlichen Diskretisierung im nächsten Abschnitt aufgelöst.

Die Ableitung des Normalenvektors (3.45) erfolgt ebenfalls über die Produkt- und Quotientenregel. Mit der Definition der Norm

$$\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|_2 = \sqrt{(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2) \cdot (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2)}$$

und der Tatsache, dass sowohl Skalarprodukt als auch Kreuzprodukt der Produktregel der Differenziation folgen, kann die partielle Ableitung angegeben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{,\alpha} = & \frac{\mathbf{A}_{1,\alpha} \times \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_{2,\alpha}}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|_2} \\ & - \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|_2^2} \left( \|\mathbf{A}_2\|_2^2 \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_{1,\alpha} + \|\mathbf{A}_1\|_2^2 \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_{2,\alpha} \right. \\ & \left. - (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2) (\mathbf{A}_{1,\alpha} \cdot \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_{2,\alpha}) \right) . \end{aligned} \quad (3.50)$$

*Anmerkung 3.3.1* (Linearität des Deformationsgradienten in der Dickenkoordinate). *Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  kann aufgespalten werden in einen konstanten und einen in der Dickenkoordinate linearen Teil*

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{[C]} + \frac{h}{2} \xi_3 \mathbf{F}_{[L]} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad (3.51)$$

mit den Anteilen

$$\mathbf{F}_{[C]} = \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{G}^\alpha + \frac{h}{2} \mathbf{d} \otimes \mathbf{G}^3 \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_{[L]} = \mathbf{d}_{,\alpha} \otimes \mathbf{G}^\alpha .$$

Wir definieren an dieser Stelle noch ein lokales Orthonormalsystem  $\mathcal{E}^{\text{loc}}$  in der Schalenmittelfläche. Ausgehend von der Tangente an der Schalenmittelfläche  $\mathbf{A}_1$  und dem Schalen-Normalenvektor  $\mathbf{N}$  werden die Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_1^{\text{loc}} = \frac{\mathbf{A}_1}{\|\mathbf{A}_1\|_2} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_2^{\text{loc}} = \mathbf{N} \times \mathbf{e}_1^{\text{loc}} \quad (3.52)$$

wie in Abbildung 3.11 erzeugt. Das Basissystem bildet in der Reihenfolge

$$\mathcal{E}^{\text{loc}} = \{\mathbf{e}_1^{\text{loc}}, \mathbf{e}_2^{\text{loc}}, \mathbf{N}\} \quad (3.53)$$

ein Orthonormalsystem.

Für die spätere Berechnung der Topologischen Ableitung wird noch die zeitliche Ableitung des Direktors benötigt. Aus der Längenkonstanz des Direktors  $\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = 1$  folgt mit zeitlicher Ableitung  $2\dot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{d} = 0$ . Die zeitliche Ableitung des Direktors steht also auf den Direktor selbst senkrecht und kann daher auch über ein Kreuzprodukt dargestellt werden:

$$\dot{\mathbf{d}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d} = [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{R} \mathbf{N}.$$

Andererseits ist die erste Ableitung mit der Kettenregel

$$\dot{\mathbf{d}} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{N} + \mathbf{R} \underbrace{\dot{\mathbf{N}}}_{=0} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{N}$$

und daraus folgt für die Zeitableitung der Rotationsmatrix

$$\dot{\mathbf{R}} = [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{R}.$$

Der Vektor  $\boldsymbol{\omega}$  muss gleich dem Vektor der Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  sein, da mit dem Matrixexponential aus (3.42) für die zeitliche Ableitung der Rotationsmatrix außerdem gilt:

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}(t)) = [\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)]_{\times} \exp([\boldsymbol{\theta}(t)]_{\times}) = [\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)]_{\times} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}(t)). \quad (3.54)$$

Die zweite Ableitung wird mit der Kettenregel gebildet und dort schließlich noch die erste Ableitung eingesetzt

$$\ddot{\mathbf{R}} = [\ddot{\boldsymbol{\theta}}]_{\times} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) + [\dot{\boldsymbol{\theta}}]_{\times} \dot{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\theta}) = ([\ddot{\boldsymbol{\theta}}]_{\times} + [\dot{\boldsymbol{\theta}}]_{\times} [\dot{\boldsymbol{\theta}}]_{\times}) \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}). \quad (3.55)$$

Für die zweite Ableitung des Direktors nach der Zeit folgt damit

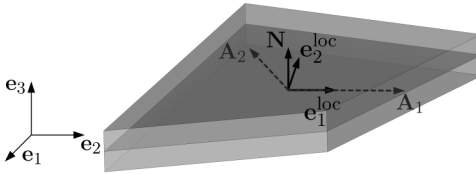
$$\ddot{\mathbf{d}} = \ddot{\mathbf{R}} \mathbf{N} = ([\ddot{\boldsymbol{\theta}}]_{\times} + [\dot{\boldsymbol{\theta}}]_{\times} [\dot{\boldsymbol{\theta}}]_{\times}) \mathbf{R} \mathbf{N}.$$

Die fehlende Rotationsgeschwindigkeit  $\dot{\boldsymbol{\theta}}$  und die Rotationsbeschleunigung  $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$  werden bei der Lösung des Anfangsrandwertproblems berechnet.

## 3.4 Methode der finiten Elemente

Der Grundgedanke der Methode der finiten Elemente besteht darin, dass im Allgemeinen die Deformation eines Festkörpers nicht durch eine geschlossene Lösung

der Differentialgleichungen bestimmt werden kann. Mit Hilfe von diskretisierenden Methoden kann eine Näherungslösung gewonnen werden. Hier wird zunächst der Grundgedanke der Diskretisierung des Gebiets und der Ansatzfunktionen und anschließend eine Lösungsmöglichkeit des Anfangsrandwertproblems mit impliziter Zeitintegration besprochen.



**Abbildung 3.11:** Konstruktion des lokalen Basissystems in der Schalenmittelfläche

### 3.4.1 Räumliche Diskretisierung

Der mechanische Körper  $\Omega$  wird in  $n_e$  endliche (*finite*) Elemente  $\Omega^{(e)}$  zerlegt, die über die Elementknoten mit ihren Nachbarn verknüpft sind, siehe Abbildung 3.12. Dabei sind Fehler bei der Approximation der Geometrie nicht zu vermeiden. Die Vereinigung der Punkte innerhalb aller finiten Elemente wird mit  $\cup$  symbolisiert. Für die Diskretisierung des Körpers in der Bezugsconfiguration gilt

$$\Omega \approx \Omega^{(h)} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega^{(e)}.$$

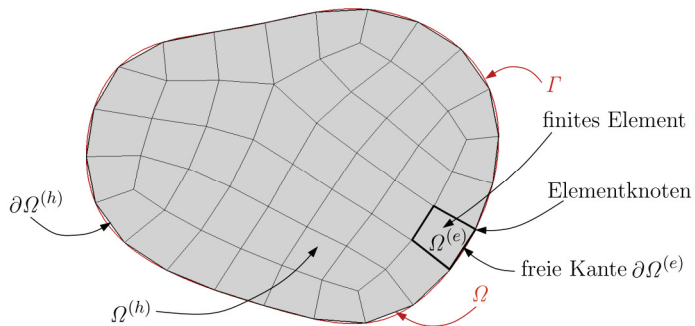
Der Rand des Gebiets  $\partial\Omega^{(h)}$  setzt sich aus den freien Kanten, beziehungsweise Flächen der am Rand liegenden Elemente zusammen  $\partial\Omega^{(h)} = \cup_{e=1}^{n_e} \partial\Omega^{(e)}$ . Dies ist in der Regel eine Approximation des wirklichen Randes  $\Gamma$ .

*Schreibweise* (Elementbezogene Größen). Zur besseren Unterscheidbarkeit von der kontinuierlichen Beschreibung werden alle Größen, die sich auf die Diskretisierung beziehen und damit elementbezogen sind, mit dem Index  $^{(e)}$  oben rechts gekennzeichnet.

Da das bestimmte Integral ein lineares Funktional ist, können die bei der schwachen Form auftretenden Gebietsintegrale (3.31) über die diskretisierten Elemente aufgeteilt und summiert werden. Speziell für Schalen kann nach dem Satz von

Fubini die Integration über den Körper aufgeteilt werden in die Integration über der Mittelfläche und die Integration über der Dickenrichtung:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\dots) d\Omega &\approx \int_{\Omega^{(h)}} (\dots) d\Omega^{(h)} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} (\dots) d\Omega^{(e)}, \\ &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\mathcal{M}^{(e)} - \frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\dots) dz d\mathcal{M}^{(e)}. \end{aligned} \quad (3.56)$$



**Abbildung 3.12:** Diskretisierung des Körpers mit finiten Elementen

### 3.4.2 Isoparametrisches Konzept

Die Vorstellung des isoparametrischen Konzepts erfolgt hier direkt anhand der Besonderheiten der Schengeometrie und ausschließlich für Vier-Knoten-Elemente. Allgemeine Herleitungen für 2- und 3-dimensionale Elementformen können in der einschlägigen Literatur (beispielsweise Wriggers 2001 und Bathe 2002) nachgelesen werden.

Bei Schengeometrien wird die Mittelfläche diskretisiert. Bei dieser Diskretisierung des realen Gebiets treten Elemente unterschiedlicher Größe und Form auf. Die numerische Behandlung lässt sich stark vereinfachen, wenn alle diese verschiedenen Elemente durch eine Transformation des sogenannten *Referenzelements*  $\Omega_{\square}$  abgebildet werden. Dazu wird ein Koordinatensystem mit einem festgelegten Koordinatenbereich  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  eingeführt. Das Referenzelement für die Schalmittelfläche ist zweidimensional, wie in Abbildung 3.13 dargestellt. Ausgehend von diesem Einheitsquadrat lassen sich durch eine isoparametrische Abbildung

beliebige Vierecke darstellen. Zur Transformation werden sogenannte *Ansatzfunktionen* benötigt, um die Koordinaten und Verschiebungen zu interpolieren. Meist werden diese aus den Lagrange-Polynomen gewonnen. Im Fall eines linearen Polynomansatzes für beide Koordinatenrichtungen lautet die zweidimensionale bilineare Ansatzfunktion

$$N_I(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_{I1}\xi_1)(1 + \xi_{I2}\xi_2) \quad (3.57)$$

wobei  $\xi_{I1}$  und  $\xi_{I2}$  die Koordinaten des  $I$ -ten Elementknotens sind  $\boldsymbol{\xi}_I = (\xi_{I1}, \xi_{I2})^T$ . Die isoparametrischen Koordinaten werden mit dem Vektor  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^T$  zusammengefasst. Damit gibt es für ein Vier-Knoten-Element vier Ansatzfunktionen, die jeweils von einem Elementknoten „gestützt“ werden:

Jede Ansatzfunktion  $N_I(\xi_1, \xi_2)$  ist am  $I$ -ten Elementknoten gleich 1 und an allen anderen Elementknoten gleich 0:

$$N_I(\boldsymbol{\xi}_I) = 1 \quad \text{und} \quad N_I(\boldsymbol{\xi}_J) = 0 \quad \text{für } I \neq J.$$

Alle Ansatzfunktionen summieren sich zu 1 überall auf dem Referenzelement  $\Omega_{\square}$ :

$$\sum_{I=1}^4 N_I(\boldsymbol{\xi}) = 1 \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{\xi} \in [-1, 1] \times [-1, 1].$$

Beim klassischen isoparametrischen Konzept werden alle kinematischen Feldgrößen mit denselben Ansatzfunktionen approximiert. Für die einheitliche Abbildung der Schalendicke wird eine Dickenparametrisierung vorgenommen mit  $\xi_3 \in [-1, 1]$ .

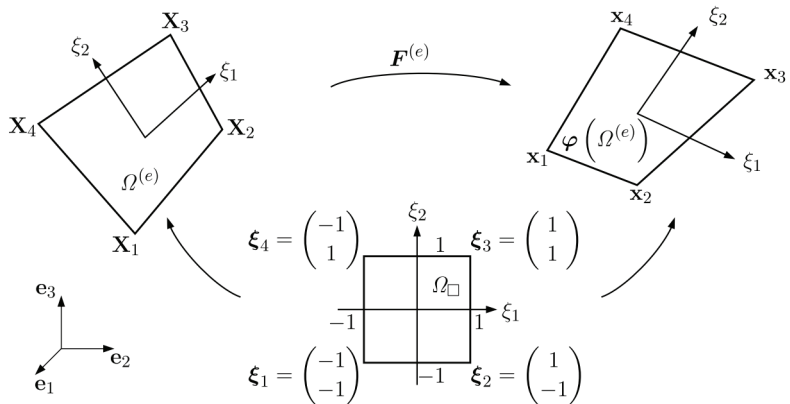
Die Geometrie der Mittelfläche eines Elements wird mit den Ansatzfunktionen und den Koordinaten der Elementknoten  $\mathbf{X}_I$  dargestellt. Die Parametrisierung der Mittelfläche lautet in der Bezugsconfiguration und in der Momentankonfiguration

$$\mathbf{X}^{(e)} = \sum_{I=1}^4 N_I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{X}_I \quad \text{und} \quad \mathbf{x}^{(e)} = \sum_{I=1}^4 N_I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_I.$$

Daraus folgt für die Verschiebung mit der Definition  $\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{x}^{(e)} - \mathbf{X}^{(e)}$  ebenfalls eine Interpolation mit den Knotenverschiebungen. Auch für die Testfunktionen wird eine analoge Darstellung gewählt:

$$\mathbf{u}^{(e)} = \sum_{I=1}^4 N_I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}_I \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\phi}^{(e)} = \sum_{I=1}^4 N_I(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\phi}_I. \quad (3.58)$$

An dieser Stelle werden alle die Scheibenkinematik beschreibenden Größen aus dem vorhergehenden Abschnitt in diskretisierter Form angegeben.



**Abbildung 3.13:** Isoparametrische Abbildung vom Referenzelement in die Bezugs- und Momentankonfiguration (modifiziert aus Wriggers 2001)

Für die Tangentenvektoren  $\mathbf{A}_{\alpha}^{(e)}$  und  $\mathbf{a}_{\alpha}^{(e)}$  werden die Ableitungen der Ansatzfunktionen benötigt. Diese können wieder allgemein mit den Koordinaten der Elementknoten des Referenzelements berechnet werden:

$$N_{I,1}(\xi_2) = \frac{1}{4}\xi_{I1}(1 + \xi_{I2}\xi_2) \quad \text{und} \quad N_{I,2}(\xi_1) = \frac{1}{4}\xi_{I2}(1 + \xi_{I1}\xi_1). \quad (3.59)$$

Die Ableitungen sind nur noch linear in einer Koordinatenrichtung und konstant in die andere. Dies gilt ebenso für die Tangentenvektoren:

$$\mathbf{A}_{\alpha}^{(e)} = \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha}(\xi_{\beta}) \mathbf{X}_I \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_{\alpha}^{(e)} = \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha}(\xi_{\beta}) \mathbf{x}_I. \quad (3.60)$$

Die Tangentenvektoren eingesetzt in die Definition des Normalenvektors (3.45) ergibt für diesen wieder eine Abhängigkeit von beiden Koordinatenrichtungen. Die Position eines Elementknotens kann von der Ebene, die die anderen drei Elementknoten aufspannen, abweichen. Ein Schalenelement muss also nicht zwangsläufig in einer Ebene liegen, auch wenn die Vorhersage von Spannungen und Verschiebungen am effektivsten in unverzerrten Elementen funktioniert (Bathe 2002).

Für die Ableitungen des Normalenvektors  $\mathbf{N}_\alpha^{(e)}$  nach der analytischen Ableitung (3.50) werden noch die Ableitungen der Tangentenvektoren benötigt. Erneutes Ableiten von (3.59) führt auf

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{1,1}^{(e)} &= \mathbf{A}_{2,2}^{(e)} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}_{\alpha,\beta}^{(e)} &:= \mathbf{A}_{1,2}^{(e)} = \mathbf{A}_{2,1}^{(e)} = \frac{1}{4} \sum_{I=1}^4 \xi_{I1} \xi_{I2} \mathbf{X}_I.\end{aligned}$$

Dies führt schließlich zu Vereinfachungen bei der Berechnung der Ableitung des Normalenvektors in der Bezugsconfiguration

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_{,1}^{(e)} &= \frac{\mathbf{A}_1^{(e)} \times \mathbf{A}_{\alpha,\beta}^{(e)}}{\|\mathbf{A}_1^{(e)} \times \mathbf{A}_2^{(e)}\|_2} \\ &\quad - \frac{\mathbf{N}^{(e)}}{\|\mathbf{A}_1^{(e)} \times \mathbf{A}_2^{(e)}\|_2^2} \left( \|\mathbf{A}_1^{(e)}\|_2^2 \mathbf{A}_2^{(e)} \cdot \mathbf{A}_{\alpha,\beta}^{(e)} - \left( \mathbf{A}_1^{(e)} \cdot \mathbf{A}_2^{(e)} \right) \left( \mathbf{A}_1^{(e)} \cdot \mathbf{A}_{\alpha,\beta}^{(e)} \right) \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_{,2}^{(e)} &= \frac{\mathbf{A}_{\alpha,\beta}^{(e)} \times \mathbf{A}_2^{(e)}}{\|\mathbf{A}_1^{(e)} \times \mathbf{A}_2^{(e)}\|_2} \\ &\quad - \frac{\mathbf{N}^{(e)}}{\|\mathbf{A}_1^{(e)} \times \mathbf{A}_2^{(e)}\|_2^2} \left( \|\mathbf{A}_2^{(e)}\|_2^2 \mathbf{A}_1^{(e)} \cdot \mathbf{A}_{\alpha,\beta}^{(e)} - \left( \mathbf{A}_1^{(e)} \cdot \mathbf{A}_2^{(e)} \right) \left( \mathbf{A}_2^{(e)} \cdot \mathbf{A}_{\alpha,\beta}^{(e)} \right) \right).\end{aligned}$$

Die Ableitung der Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_{,\alpha}$  wird gemäß der kontinuierlichen Form wie in (3.49) verwendet und die Rotation  $\mathbf{R}$  selbst aus (3.41). Sowohl in der Rotation selbst, als auch in deren Ableitung, werden die Rotationswinkel mit den Ansatzfunktionen aus den Rotationswinkeln der Elementknoten gebildet

$$\boldsymbol{\theta}^{(e)} = \sum_{I=1}^4 N_I(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\theta}_I \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\theta}_{,\alpha}^{(e)} = \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha}(\xi_\beta) \boldsymbol{\theta}_I. \quad (3.61)$$

Alle weiteren Größen wie der Direktor, die Ableitung des Direktors und die kovarianten Basisvektoren können mit den elementbezogenen parametrisierten Formen berechnet werden. Mit diesen Beschreibungen kann eine über die Elementgrenzen stetige Beschreibung der Geometrie und der Verschiebung angegeben werden.

### 3.4.3 Räumliche Integration mit Quadraturformeln

Die Idee des isoparametrischen Ansatzes mit einem Referenzelement ist, die Integration des Gleichgewichtsfunktional auf diesem Referenzelement durchzuführen.

Das Referenzelement  $\Omega_\square$  ist also quasi das Bezugselement für jedes Element  $\Omega^{(e)}$  in seiner Konfiguration – sei es die Bezugsconfiguration oder die Momentankonfiguration.

Die Integration auf dem Referenzelement ist eine Koordinatentransformation für das finite Element. Daher wird für die Integration auf dem Referenzelement die Transformationsformel (siehe Anhang B.1.1) benötigt. Im Speziellen wird die Jacobi-Matrix der Mittelfläche bezüglich der Parametrisierung benötigt.

Die Schalenmittelfläche ist eine Einbettung im mathematischen Sinn: Die Punkte der Mittelfläche können aus der Ebene mit der isoparametrischen Formulierung parametrisiert werden, liegen aber im Raum. Daher hat die Jacobi-Matrix der Ortskoordinaten folgenden Aufbau

$$\mathbf{J}_\xi^{(e)} \left( \mathbf{X}_M^{(e)} \right) = \frac{\partial \mathbf{X}_M^{(e)}}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{X}_{M1}^{(e)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \mathbf{X}_{M1}^{(e)}}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \mathbf{X}_{M2}^{(e)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \mathbf{X}_{M2}^{(e)}}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \mathbf{X}_{M3}^{(e)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \mathbf{X}_{M3}^{(e)}}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}.$$

Bei Schalen wird insbesondere die sogenannte *Gramsche Determinante*  $J_G^{(e)} := \det \left( \mathbf{J}_\xi^{(e)T} \mathbf{J}_\xi^{(e)} \right)$  für die Transformation des Integrals benötigt. Mit

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\xi^{(e)T} \mathbf{J}_\xi^{(e)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{X}_{M1}^{(e)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \mathbf{X}_{M2}^{(e)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \mathbf{X}_{M3}^{(e)}}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \mathbf{X}_{M1}^{(e)}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \mathbf{X}_{M2}^{(e)}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \mathbf{X}_{M3}^{(e)}}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{X}_{M1}^{(e)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \mathbf{X}_{M1}^{(e)}}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \mathbf{X}_{M2}^{(e)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \mathbf{X}_{M2}^{(e)}}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \mathbf{X}_{M3}^{(e)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \mathbf{X}_{M3}^{(e)}}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{X}_M^{(e)}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_M^{(e)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \mathbf{X}_M^{(e)}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_M^{(e)}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \mathbf{X}_M^{(e)}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_M^{(e)}}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \mathbf{X}_M^{(e)}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_M^{(e)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \mathbf{X}_M^{(e)}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_M^{(e)}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \mathbf{X}_M^{(e)}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_M^{(e)}}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} J_G^{(e)} &= \det \left( \mathbf{J}_\xi^{(e)T} \mathbf{J}_\xi^{(e)} \right) \\ &= \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{X}_M^{(e)}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_M^{(e)}}{\partial \xi_1} \right)}_{\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1} \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{X}_M^{(e)}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_M^{(e)}}{\partial \xi_2} \right)}_{\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_2} - \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{X}_M^{(e)}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}_M^{(e)}}{\partial \xi_2} \right)^2}_{(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2)^2} \\ &= \|\mathbf{A}_1\|_2^2 \|\mathbf{A}_2\|_2^2 - (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2)^2 \\ &= \|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|_2^2 \end{aligned}$$



und damit

$$\sqrt{J_G(\boldsymbol{\xi})} = \sqrt{\det \left( \mathbf{J}_{\boldsymbol{\xi}}^{(e)T} \mathbf{J}_{\boldsymbol{\xi}}^{(e)} \right)} = \|\mathbf{A}_1(\boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{A}_2(\boldsymbol{\xi})\|_2.$$

Mit der Transformationsformel kann das Gebietsintegral  $\int_{\Omega^{(e)}}$  schließlich auf dem Referenzelement  $\Omega_{\square}$  formuliert werden. Für eine Funktion  $z : \Omega^{(e)} \rightarrow \mathbb{R}$  ist dies

$$\int_{\Omega^{(e)}} z(\mathbf{X}) \, d\Omega^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 z(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \frac{h}{2} \sqrt{J_G(\xi_1, \xi_2)} \, d\xi_1 \, d\xi_2 \, d\xi_3.$$

Die analytische Integration über dem Referenzelement ist im Allgemeinen die Integration eines gebrochen rationalen Ausdrucks in den Referenzkoordinaten  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  und  $\xi_3$ .

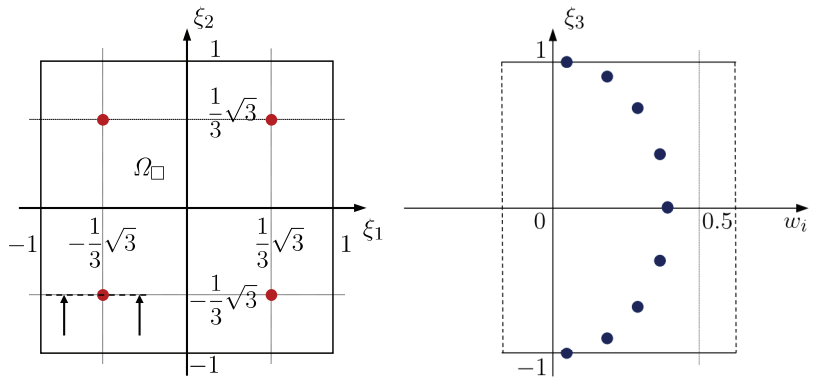
Daher wird auf numerische Integration zurückgegriffen. Die numerische Integrationsformel setzt sich aus Funktionswerten an den  $n_p$  Stützstellen  $(\xi_{1i}, \xi_{2i}, \xi_{3i})$  und den Gewichtungsfaktoren  $w_i^{(p)}$  zusammen:

$$\int_{\Omega^{(e)}} z(\mathbf{X}) \, d\Omega^{(e)} = \sum_{i=1}^{n_p} z(\xi_{1i}, \xi_{2i}, \xi_{3i}) \frac{h}{2} \sqrt{J_G(\xi_{1i}, \xi_{2i})} w_i^{(p)}. \quad (3.62)$$

Insgesamt ist die Anzahl der Stützstellen gleich die Anzahl der Flächenintegrationspunkte  $n_{\mathcal{M}}$  mal die Anzahl der Dickenintegrationspunkte  $n_z$ :  $n_p = n_{\mathcal{M}} n_z$ . Die Integration in der Referenzelement-Ebene erfolgt mit der Gaußschen Quadraturformel 3. Ordnung. Mit  $n_{\mathcal{M}} = 2 \times 2$  Integrationspunkten werden Polynome bis zum Grad 3 exakt integriert. Diese Quadraturformel hat sich in der Methode der finiten Elemente aufgrund der hohen Genauigkeit und der numerischen Effizienz durchgesetzt. Die Lage der Integrationspunkte und die Gewichte können Abbildung 3.14a und Tabelle 3.1 entnommen werden.

Die Dickenintegration wird mit  $n_z = 9$  Integrationspunkten nach Lobatto durchgeführt. Die Lobatto-Integration wird ausgewählt, da die Stützstellen auch bis auf die Schalenober- und -unterseite verteilt sind. Zu jedem der Flächenintegrationspunkte wird die Dickenkoordinate nach Abbildung 3.14b und Tabelle 3.2 ausgewertet.<sup>4</sup> Diese und weitere Gewichtungen und Stützstellenpositionen können Michels 1963 entnommen werden.

<sup>4</sup>Diese Integrationsgewichte und Positionen entsprechen der Elementformulierung ELFORM 16 in LS-Dyna® und NIP 9 bei global eingestellter Lobatto-Integration.



(a) Flächenintegrationspunkte

(b) Dickenintegrationspunkte

**Abbildung 3.14:** Lage der Integrationspunkte im Referenzelement**Tabelle 3.1:** Lage und Gewichte der Flächenintegrationspunkte

$i$	$w_i^{(p)}$	$\xi_1$	$\xi_2$
1	1.0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
2	1.0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
3	1.0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$
4	1.0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$

Für die Komplettierung der Diskretisierung der schwachen Form (3.31) fehlt an dieser Stelle noch die Materialformulierung und auf welche Art die unterdrückte Dickenverzerrung in die Schalenformulierung eingearbeitet wird. Da es mittlerweile auch im Bereich der kommerziellen Software viele verschiedene Schalenformulierungen gibt, die nicht in jedem Fall vollständig dokumentiert sind, werden an dieser Stelle nur die relevanten Ergebnisse und Bezeichnungen wiedergegeben. Bathe 2002 und Wriggers 2001 beispielsweise geben jeweils einen Überblick über Schalen- und Materialformulierungen. Für die Verwendung spezieller Formulierungen finden sich weiterführende Informationen in der Dokumentation LSTC 2019 und in den Herleitungen der speziellen Theorien, wie beispielsweise in Dvorkin und Bathe 1984. Diese wird bei der Finite-Elemente-Simulation in LS-Dyna<sup>®</sup> verwendet.

**Tabelle 3.2:** Lage und Gewichte der Dickenintegrationspunkte

$i$	$w_i^{(p)}$	$\xi_3$
1	0.0277777777 7777777778	-1.0000000000 0000000000
2	0.1654953615 6080552505	-0.8997579954 1146015731
3	0.2745387125 0016173528	-0.6771862795 1073775345
4	0.3464285109 7304634512	-0.3631174638 2617815871
5	0.3715192743 7641723356	0.0000000000 0000000000
6	0.3464285109 7304634512	0.3631174638 2617815871
7	0.2745387125 0016173528	0.6771862795 1073775345
8	0.1654953615 6080552505	0.8997579954 1146015731
9	0.0277777777 7777777778	1.0000000000 0000000000

### 3.4.4 Assemblierung des räumlich diskretisierten Gleichgewichts

Die Approximation der schwachen Form 3.31 erfordert die Diskretisierung aller Einzelintegrale, also der virtuellen inneren Energie, der virtuellen Arbeit der Trägheitskräfte, der virtuellen Arbeit der Dämpfungskräfte und der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte. Für die Darstellung werden die folgenden Schreibweisen gewählt:

*Schreibweise* (Matrizen). Die Matrizen der Diskretisierung werden mit aufrechten fetten lateinischen Buchstaben notiert ( $\mathbf{M}$ ), um sie von den Tensoren ( $\mathbf{T}$ ) unterscheiden zu können.

Die im Zusammenhang mit der Diskretisierung stehenden Vektoren werden alle mit kleinen Buchstaben beschrieben.

*Schreibweise* (Vektor der inneren Kräfte). Mit  $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta})$  wird die zur virtuellen inneren Energie gehörende Kraft bezeichnet, die sich nach dem Zusammenbau der einzelnen Elementbeiträge zur Gesamtstruktur ergibt. Da jeder Elementknoten eines Schalenelements 6 globale Freiheitsgrade (3 Verschiebungen  $\mathbf{u}$ , 3 Rotationen  $\boldsymbol{\theta}$ ) hat,

wird die Kraft als explizit abhängig von diesen beiden dargestellt<sup>5</sup>. Im Folgenden wird verkürzend für den Vektor der Freiheitsgrade des Elementknotens  $I$

$$\mathbf{u}_I = (u_{I1}, u_{I2}, u_{I3}, \theta_{I1}, \theta_{I2}, \theta_{I3})^T$$

geschrieben. Analog werden auch die Geschwindigkeiten, die Beschleunigungen und die Testfunktionen beschrieben.

*Schreibweise* (Vektor der Freiheitsgrade). Die Gesamtheit der Freiheitsgrade wird im Vektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_f}$  zusammengefasst, wobei  $n_f$  die Anzahl der Freiheitsgrade des diskretisierten mechanischen Systems ist. In analoger Weise werden auch die Testfunktionen zusammengefasst  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^{n_f}$ . Es besteht keine Verwechslungsgefahr mit dem Verschiebungsvektor eines Punktes  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ , da der Vektor der Freiheitsgrade nur im Zusammenhang mit den Systemmatrizen auftritt.

*Schreibweise* (Räumliche Diskretisierung). Die räumliche Diskretisierung eines Integrals wird mit eckigen Klammern und dem unteren Index  $[\int_{\Omega} d\Omega]_{(h)}$  geschrieben.

Der Operator  $\cup$  steht im Folgenden für die Assemblierung aller Elemente zu einem globalen System von nichtlinearen Gleichungen sowie den Einbau der Übergangs- und Randbedingungen, wie beispielsweise der Lagerung. Die Assemblierung erfolgt wie bei der Methode der finiten Elemente für lineare Problemstellungen. Details finden sich beispielsweise in Bathe 2002 und Alberty et al. 2002. Die Diskretisierung der virtuellen inneren Energie lautet:

$$\begin{aligned} \left[ \int_{\mathcal{M}-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{F}\mathbf{S} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\phi} \, dz \, d\mathcal{M} \right]_{(h)} &\approx \cup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^4 \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{u}I} \\ \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{\theta}I} \end{pmatrix}^T \mathbf{r}_I \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\theta} \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{r}(\mathbf{u}) . \end{aligned} \quad (3.63)$$

Die Linearisierung der virtuellen inneren Energie (3.35) wird mit der *Tangentensteifigkeitsmatrix*  $\mathbf{K}_{\mathbf{T}}$  approximiert

$$\begin{aligned} \left[ \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \int_{\mathcal{M}-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{F}\mathbf{S} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\phi} \, dz \, d\mathcal{M}, \Delta \mathbf{u} \right\rangle \right]_{(h)} &\approx \cup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^4 \sum_{K=1}^4 \boldsymbol{\phi}_I^T \mathbf{K}_{\mathbf{T}IK} \Delta \mathbf{u}_K \\ &= \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K}_{\mathbf{T}} \Delta \mathbf{u} . \end{aligned} \quad (3.64)$$

Sowohl die innere Kraft  $\mathbf{r}(\mathbf{u})$  als auch die Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{\mathbf{T}}$  sind von der Materialmodellierung abhängig.

<sup>5</sup>Die Assemblierung zum Gesamtsystem erfolgt im Allgemeinen nicht sortiert nach Translation und Rotation

*Anmerkung 3.4.1 (Lineare Steifigkeitsmatrix). Im Falle des linear elastischen Materialverhaltens und kleiner Verschiebungen kann die Diskretisierung der virtuellen inneren Energie mit der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  angegeben werden:*

$$\left[ \int_{\mathcal{M}_{-\frac{h}{2}}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) \, dz \, d\mathcal{M} \right]_{(h)} \approx \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K} \mathbf{u}. \quad (3.65)$$

*Die Steifigkeitsmatrix ist konstant und ändert sich nicht mit der Spannung oder Dehnung.*

Zwischen dem analytischen Dämpfungsterm, den wir künstlich mit der spezifischen Dämpfung  $c_d$  erzeugt haben und der Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$  soll der folgende Zusammenhang gelten:

$$\left[ \int_{\mathcal{M}_{-\frac{h}{2}}}^{\frac{h}{2}} c_d \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\phi} \, dz \, d\mathcal{M} \right]_{(h)} \approx \bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^4 \sum_{K=1}^4 \boldsymbol{\phi}_I^T \mathbf{C}_{IK} \dot{\mathbf{u}}_K = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}. \quad (3.66)$$

Der Trägheitsterm wird mit der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  approximiert:

$$\left[ \int_{\mathcal{M}_{-\frac{h}{2}}}^{\frac{h}{2}} \varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \boldsymbol{\phi} \, dz \, d\mathcal{M} \right]_{(h)} \approx \bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^4 \sum_{K=1}^4 \boldsymbol{\phi}_I^T \mathbf{M}_{IK} \ddot{\mathbf{u}}_K = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}. \quad (3.67)$$

Die Massenmatrix ist unabhängig vom Deformationszustand und ändert sich daher während einer Finite-Elemente-Rechnung nicht.

Im Vektor  $\mathbf{q}$  wird die Gesamtheit der auf die Struktur wirkenden Lasten erfasst. Die Lastterme lauten zusammengefasst:

$$\left[ \int_{\mathcal{M}_{-\frac{h}{2}}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\phi} \, dz \, d\mathcal{M} + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\Gamma \right]_{(h)} \approx \bigcup_{e=1}^{n_e} \sum_{I=1}^4 \boldsymbol{\phi}_I^T \mathbf{q}_I = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{q}. \quad (3.68)$$

Die Lasten sind abhängig von der Zeit  $t$ . Damit ist auch der Lastvektor zeitabhängig.

Die Integration wurde hier bezüglich der Bezugsconfiguration durchgeführt. Prinzipiell kann dies auch in der Momentanconfiguration geschehen. Nur der Steifigkeitsterm  $\mathbf{r}(\mathbf{u})$  unterscheidet die Momentan- von der Bezugsconfiguration. In Wriggers 2001 können beide Formulierungen nachvollzogen werden.

Die Gesamtheit der Matrizen der Finite-Elemente-Diskretisierung ( $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}_T$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\hat{\mathbf{K}}$ ) wird auch als *Systemmatrizen* bezeichnet.

Die schwache Form des Gleichgewichts (3.31) lautet in der diskreten Form mit dem Trägheitsterm (3.67), dem Dämpfungsterm (3.66), dem Vektor der inneren Kräfte (3.63) und dem Lastvektor (3.68):

$$\boldsymbol{\phi}^T \underbrace{(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{q})}_{=:\mathbf{g}(\mathbf{u})} = 0. \quad (3.69)$$

Die Gleichgewichtslage wird mit dem Gleichgewichtsvektor  $\mathbf{g}(\mathbf{u})$  beschrieben. Da (3.69) für beliebige Testfunktionen  $\boldsymbol{\phi}$  erfüllt sein soll, muss  $\mathbf{u}$  eine Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

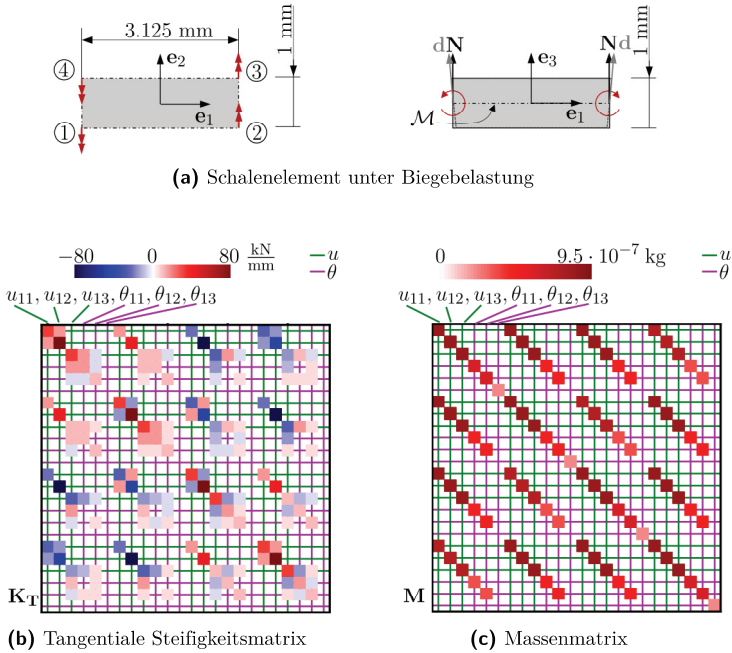
$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) := \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{r}(\mathbf{u}) - \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.70)$$

mit den Anfangswerten der Verschiebung  $\mathbf{u}^{(0)} = \bar{\mathbf{u}}$  und der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{u}}^{(0)} = \bar{\dot{\mathbf{u}}}$  sein. Physikalisch ist dies eine Gleichung in Kräften.

*Beispiel 3.4.1* (Tangentiale Steifigkeitsmatrix und Massenmatrix).

Das Schalenelement in Abbildung 3.15a wird an den Elementknoten durch die in Rot eingezeichneten Momente gebogen, bis plastische Dehnung entsteht. Die tangentielle Steifigkeitsmatrix und die Massenmatrix sind in den Abbildungen 3.15b und 3.15c dargestellt: Mit den grünen und magentafarbenen Linien werden die Positionen der translatorischen (grün, Verschiebung  $u$ ) und rotatorischen (magenta, Rotation  $\theta$ ) Freiheitsgrade angezeigt.

Die eingefärbten Quadrate zeigen die Matrixeinträge, die verschieden von null sind. Die Matrizen sind schwach besetzt. Aufgrund der Belastung wurde keine Steifigkeit für die Rotation  $\theta_3$  eingebaut, erkennbar an vier horizontalen und vier vertikalen magentafarbenen Linien ohne Unterbrechung durch eingefärbte Quadrate.



**Abbildung 3.15:** Assemblierte tangentielle Steifigkeits- und Massenmatrix eines Elements mit 24 Freiheitsgraden unter Biegebelastung (Aluminium)

Mit der Diskretisierung in finite Elemente wird der „Randwert-Teil“ des Anfangswertproblems zu jedem Zeitpunkt beschrieben. Die zeitliche Lösung des „Anfangswert-Teils“ wird im folgenden Abschnitt erläutert.

### 3.5 Lösung des diskreten Anfangswertproblems

Für die Wahl eines Integrationsverfahrens zur Bestimmung des zeitlichen Verlaufs der Bewegung  $\mathbf{u}(t)$  stehen mit *expliziten* und *impliziten* Integrationsschemata grundsätzlich zwei unterschiedliche Vorgehensweisen zur Zeitintegration des Gleichgewichts (3.70) zur Verfügung.

Explizite Verfahren werden typischerweise für Crash-Berechnungen mit kurzzeitigen Belastungen verwendet. Durch die Berechnung mit einer diagonalisierten Massenmatrix kann das Gleichungssystem besonders gut parallelisiert gelöst werden, wodurch die Lösung für einen neuen Zeitpunkt schneller vorliegt als bei impliziten Verfahren. Allerdings müssen die Zeitintervalle grundsätzlich wesentlich kleiner gewählt werden.

Implizite Verfahren benötigen für jeden Zeitpunkt die Assemblierung der Tangentensteifigkeitsmatrix aus (3.64) zur Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems und sind daher aufwendiger. Der Vorteil liegt allerdings in der Wahl der größeren Zeitintervalle. Bei Stoß- oder Schockeinwirkungen (wie beispielsweise Crash-Berechnungen) ist allerdings auch hier die Wahl kleiner Zeitintervalle unumgänglich, um die hochfrequenten Anteile der Verschiebung abzubilden.

Für die Berechnung der Topologischen Ableitung mit der adjungierten Methode im nächsten Kapitel wird die Linearisierung der virtuellen inneren Energie und die Assemblierung der Tangentensteifigkeitsmatrix benötigt. Daher wird hier nur die implizite Zeitintegration vorgestellt.

*Schreibweise (Zeitschritte).* Die zeitlich diskreten Skalare, Vektoren und Matrizen werden für jeden Zeitpunkt  $k \in \{0, 1, \dots, m\}$  mit dem rechten oberen Index  $^{(k)}$  gekennzeichnet.

Inkrement beliebiger Größen zwischen zwei Schritten werden mit dem griechischen Großbuchstaben  $\Delta$  und dem höheren Index geschrieben:  $\Delta \square^{(k)} := \square^{(k)} - \square^{(k-1)}$ . Die Größe des Zeitintervalls  $\Delta t^{(k)}$  wird auch als *Zeitschritt* bezeichnet.

Für die Entwicklung der Lösungsstrategie wird angenommen, dass die Ergebnisse für die statischen und kinematischen Variablen  $\mathbf{u}^{(i)}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^{(i)}$  und  $\ddot{\mathbf{u}}^{(i)}$  für alle Zeitpunkte  $t^{(i)}$  von  $i = 0$  bis einschließlich  $k$  ermittelt worden sind. Dann wird im Lösungsprozess die nächste Gleichgewichtslage  $\mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k+1)}) = \mathbf{0}$ , die der Zeit  $t^{(k)} + \Delta t^{(k+1)} = t^{(k+1)}$  entspricht, gesucht. Die neue Gleichgewichtslage unterscheidet sich zur vorherigen um das Verschiebungsinkrement  $\Delta \mathbf{u}^{(k+1)}$ .

Die Berechnung des Verschiebungsinkrements kann durch die zeitliche Approximation der Verschiebung und der Geschwindigkeit mit dem Newmark-Verfahren und Lösung des Gleichungssystems mit dem Newton-Verfahren erfolgen, die in den beiden folgenden Abschnitten beschrieben sind.

Durch die inkrementelle Lösung wird der Zeitraum von 0 bis  $T$  in  $m$  Zeitschritte unterteilt. Der Prozess ist so lange zu wiederholen, bis das Ende des ganzen Lösungspfades erreicht ist. Im Verlauf der Berechnung folgt man daher allen



Partikeln des Körpers in ihrer Bewegung von der Ausgangs- zur Endkonfiguration des Körpers.

### 3.5.1 Zeitintegration mit dem Newmark-Verfahren

Beim Newmark-Verfahren (Newmark 1959) werden die Verschiebungen und Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt  $t^{(k+1)}$  mit

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + (\Delta t^{(k+1)}) \dot{\mathbf{u}}^{(k)} + \frac{(\Delta t^{(k+1)})^2}{2} ((1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{u}}^{(k)} + 2\beta\ddot{\mathbf{u}}^{(k+1)}) \quad (3.71)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{(k+1)} = \dot{\mathbf{u}}^{(k)} + (\Delta t^{(k+1)}) ((1 - \gamma)\ddot{\mathbf{u}}^{(k)} + \gamma\ddot{\mathbf{u}}^{(k+1)}) \quad (3.72)$$

approximiert. Das entspricht dem Taylor-Polynom 3. Ordnung der Verschiebung, bei dem die dritte Zeitableitung mit dem zentralen Differenzenquotienten der Beschleunigung approximiert wird. Statt der unendlichen Reihe werden die letzten Reihenglieder mit den Parametern  $\beta$  und  $\gamma$  modifiziert. Diese sind freie Konstanten mit  $0 \leq \beta \leq 0.5$  und  $0 \leq \gamma \leq 1$ . In dieser Arbeit werden in den numerischen Beispielen die Newmark-Konstanten  $\gamma = 0.5$  und  $\beta = 0.25$  verwendet, was dann der Integration mit der Trapezregel entspricht. Mit der Geschwindigkeitsapproximation (3.72) können aus den Rotationen die Winkelgeschwindigkeiten  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}}$  und -beschleunigungen  $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$  errechnet werden. Zunächst werden die Approximationen (3.71) und (3.72) so umgeformt, dass Beschleunigungen und Geschwindigkeiten in Abhängigkeit der Verschiebung ausgedrückt werden

$$\ddot{\mathbf{u}}^{(k+1)} = \alpha_1 (\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)}) - \alpha_2 \dot{\mathbf{u}}^{(k)} - \alpha_3 \ddot{\mathbf{u}}^{(k)}, \quad (3.73)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{(k+1)} = \alpha_4 (\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)}) + \alpha_5 \dot{\mathbf{u}}^{(k)} + \alpha_6 \ddot{\mathbf{u}}^{(k)}, \quad (3.74)$$

mit den Konstanten

$$\alpha_1 = \frac{1}{\beta (\Delta t^{(k+1)})^2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\beta \Delta t^{(k+1)}}, \quad \alpha_3 = \frac{1 - 2\beta}{2\beta}, \quad (3.75)$$

$$\alpha_4 = \frac{\gamma}{\beta (\Delta t^{(k+1)})}, \quad \alpha_5 = \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right), \quad \alpha_6 = \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t^{(k+1)}. \quad (3.76)$$

Die Konstanten  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_4$  und  $\alpha_6$  sind von der Zeitschrittgröße  $\Delta t^{(k+1)}$  abhängig. Die Beschleunigungen (3.73) und die Geschwindigkeiten (3.74) werden in die diskretisierte schwache Form (3.70) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k+1)}) &= \mathbf{M} (\alpha_1 (\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)}) - \alpha_2 \dot{\mathbf{u}}^{(k)} - \alpha_3 \ddot{\mathbf{u}}^{(k)}) \\ &\quad + \mathbf{C} (\alpha_4 (\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)}) + \alpha_5 \dot{\mathbf{u}}^{(k)} + \alpha_6 \ddot{\mathbf{u}}^{(k)}) \\ &\quad + \mathbf{r}(\mathbf{u}^{(k+1)}) - \mathbf{q}^{(k+1)} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Damit ergibt sich ein nichtlineares Gleichungssystem für die Verschiebungen  $\mathbf{u}^{(k+1)}$ , da der Vektor der inneren Kräfte durch das nichtlineare Materialverhalten nichtlinear von den Verschiebungen abhängt. Die Lösung für den neuen Zeitpunkt  $t^{(k+1)}$  wird durch das Newton-Verfahren gewonnen.

### 3.5.2 Newton-Verfahren zur Bestimmung des Gleichgewichts

Analog zur Taylor-Entwicklung des kontinuierlichen Anfangsrandwertproblems in (3.34) liefert die lineare Taylor-Entwicklung des diskreten Gleichgewichts (3.77)

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k+1)}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)} + \Delta\mathbf{u}^{(k+1)}) \\ &= \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}) + \frac{\partial}{\partial\mathbf{u}^{(k)}}\mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)})\Delta\mathbf{u}^{(k+1)} + \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Unter Vernachlässigung des Restgliedvektors  $\mathbf{R}$  mit den höheren Ableitungen, kann mit dem Newton-Verfahren die inkrementelle Verschiebung  $\Delta\mathbf{u}^{(k+1)}$  und damit die unbekanntenen Verschiebungen  $\mathbf{u}^{(k+1)}$  zum Zeitpunkt  $t^{(k+1)}$  bestimmt werden.

*Schreibweise.* Mit dem linken oberen Index  $^{(i)}\square$  werden die Iterationsschritte des Newton-Verfahrens gekennzeichnet.

Startwert ist jeweils der konvergierte Wert des vorherigen Zeitpunktes  $^{(0)}\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)}$ . Die Differenziation des Gleichgewichtsvektors nach der Verschiebung  $\frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k+1)})}{\partial\mathbf{u}^{(k+1)}}$  liefert mit der tangentialen Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_T \left( ^{(i)}\mathbf{u}^{(k+1)} \right) = \left. \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\mathbf{u}^{(k+1)}} \right|_{^{(i)}\mathbf{u}^{(k+1)}} \quad (3.79)$$

die linke Seite des Newton-Algorithmus

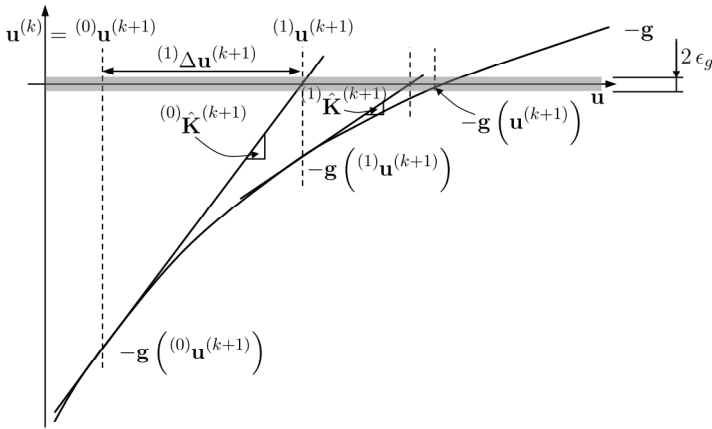
$$\begin{aligned} \left( \alpha_1\mathbf{M} + \alpha_4\mathbf{C} + \mathbf{K}_T \left( ^{(i)}\mathbf{u}^{(k+1)} \right) \right) ^{(i+1)}\Delta\mathbf{u}^{(k+1)} &= -\mathbf{g} \left( ^{(i)}\mathbf{u}^{(k+1)} \right) \\ ^{(i+1)}\mathbf{u}^{(k+1)} &= ^{(i)}\mathbf{u}^{(k+1)} + ^{(i+1)}\Delta\mathbf{u}^{(k+1)}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Die Matrix auf der linken Seite wird zusammengefasst als *effektive Steifigkeitsmatrix*

$$\hat{\mathbf{K}}^{(i)} \left( ^{(k+1)} \right) := \alpha_1\mathbf{M} + \alpha_4\mathbf{C} + \mathbf{K}_T \left( ^{(i)}\mathbf{u}^{(k+1)} \right). \quad (3.82)$$

Der nicht ausbalancierte Lastvektor  $-\mathbf{g} \left( ^{(i)}\mathbf{u}^{(k+1)} \right)$  auf der rechten Seite entspricht einem Lastvektor, der noch nicht mit den Element-Spannungen im Gleichgewicht ist. Daher ist ein Zuwachs der Knotenverschiebungen nötig.

Abbildung 3.16 veranschaulicht den Lösungsprozess in seiner Anwendung auf ein System mit einem Freiheitsgrad. Ausgehend vom Verschiebungszustand  ${}^{(0)}\mathbf{u}^{(k+1)}$  wird der Lastvektor  $-\mathbf{g}({}^{(0)}\mathbf{u}^{(k+1)})$  berechnet. Dieser ist nicht null, also wird die effektive Steifigkeit  ${}^{(0)}\hat{\mathbf{K}}^{(k+1)}$  ermittelt – in der Abbildung als Steigung der Tangente dargestellt. Durch die Lösung von (3.80) wird das Verschiebungsinkrement  ${}^{(1)}\Delta\mathbf{u}^{(k+1)}$  zur Nullstelle ermittelt und mit (3.81) der neue Verschiebungszustand  ${}^{(1)}\mathbf{u}^{(k+1)}$  berechnet. Zu diesem Zustand wird wieder der Lastvektor und die effektive Steifigkeit ermittelt, und mit dem Verschiebungsinkrement die Nullstelle der Tangente.



**Abbildung 3.16:** Veranschaulichung des iterativen Lösungsprozesses mit dem Newton-Verfahren (modifiziert aus Wriggers 2001)

Die Konvergenz des Newton-Verfahrens kann beispielsweise mit Verwendung der euklidischen Vektornorm des  $\mathbb{R}^{n_f}$  für den Vektor des Kräftegleichgewichts gemessen werden:

$$\|\mathbf{g}({}^{(i+1)}\mathbf{u}^{(k+1)})\|_2 = \sqrt{\mathbf{g}({}^{(i+1)}\mathbf{u}^{(k+1)}) \cdot \mathbf{g}({}^{(i+1)}\mathbf{u}^{(k+1)})} < \epsilon_g \quad (3.83)$$

Unterschreitet diese Norm die Toleranz  $\epsilon_g$  (in der Abbildung durch den grauen Streifen um null dargestellt), ist die Verschiebung für den neuen Zeitpunkt berechnet. Dann wird mit den Newmark-Approximationen (3.73) und (3.74) der Beschleunigungs- und der Geschwindigkeitsvektor für den neuen Zeitpunkt explizit berechnet. Implizit liegen die Beschleunigung und Geschwindigkeit durch die Auswertung des Lastvektors in jedem Schritt des Newton-Verfahrens vor.

Der im Allgemeinen nicht vorgegebene Anfangswert der Beschleunigung wird aus dem Gleichgewicht zur Anfangszeit bestimmt

$$\ddot{\mathbf{u}}^{(0)} = \mathbf{M}^{-1} \left( -\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{(0)} - \mathbf{r}(\mathbf{u}^{(0)}) + \mathbf{q}^{(0)} \right). \quad (3.84)$$

Bei der Assemblierung der tangentialen Steifigkeitsmatrix  $\bar{\mathbf{K}}_{\mathbf{T}}^{(i)}(\mathbf{u}^{(k+1)})$  wird die Materialbeschreibung in das Finite-Elemente-System eingebracht. Mit jedem Verschiebungszustand wird das der Materialformulierung zugrunde liegende Verzerungsmaß neu berechnet und daraus die Spannungen, die wiederum die Steifigkeit beeinflussen.

Das in das Newmark-Verfahren verschachtelte Newton-Verfahren führt auf den folgenden Algorithmus 1 der impliziten Zeitintegration zur Lösung des Anfangsrandwertproblems (3.70).

---

**Algorithmus 1** Implizite Zeitintegration

---

- 1 Setze Anfangswerte  $\mathbf{u}^{(0)} = \bar{\mathbf{u}}$  und  $\dot{\mathbf{u}}^{(0)} = \bar{\dot{\mathbf{u}}}$
  - 2 Berechne Anfangswert  $\ddot{\mathbf{u}}^{(0)}$  nach (3.84)
  - 3 **For**  $k = 0, \dots, m - 1$  **Do**
  - 4   Setze  $i = 0$
  - 5   Setze  ${}^{(i)}\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)}$
  - 6   **While**  $\|\mathbf{g}({}^{(i)}\mathbf{u}^{(k+1)})\| \geq \epsilon_g$  **Do**
  - 7     Berechne  $\mathbf{g}({}^{(i)}\mathbf{u}^{(k+1)})$  nach (3.77) und  ${}^{(i)}\hat{\mathbf{K}}^{(k+1)}$  nach (3.82)
  - 8     Berechne die Verschiebungsinkremente  ${}^{(i+1)}\Delta\mathbf{u}^{(k+1)}$   
als Lösung von (3.80)
  - 9     Berechne neue Verschiebung  ${}^{(i+1)}\mathbf{u}^{(k+1)}$  mit (3.81)
  - 10    Setze  $i = i + 1$
  - 11   **End While**
  - 12   Setze  $\mathbf{u}^{(k+1)} = {}^{(i)}\mathbf{u}^{(k+1)}$
  - 13   Berechne neue Beschleunigung nach (3.73)
  - 14   Berechne neue Geschwindigkeit nach (3.74)
  - 15 **End For**
-



# 4 Entwicklung der nichtlinear transienten Topologischen Ableitung

Die Herleitung der nichtlinear transienten Topologischen Ableitung, die im Kapitel *Stand der Forschung* zunächst als Differenzialquotient motiviert wurde, beginnt mit der Beschreibung durch eine Topologische Variation und die Formableitung. Die adjungierte Methode wird zunächst allgemein vorgestellt und anschließend zur Entwicklung der Formableitung verwendet. Dies kann anhand zweier unterschiedlicher Ansätze erfolgen. Beide Schemata werden in jeweils eigenen Abschnitten vorgestellt. Schließlich wird noch auf drei Funktionale und deren Topologische Ableitungen im Speziellen eingegangen.

## 4.1 Sensitivität eines Punktes durch Topologische Variation

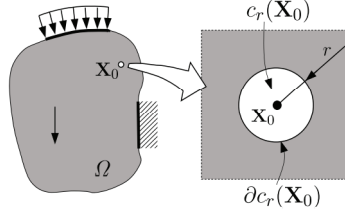
Der Begriff *Funktional* wird in diesem Kapitel stellvertretend für Ziel- und Nebenbedingungsfunktional eines Optimierungsproblems verwendet. Die Sensitivitätenberechnung ist unabhängig von der Rolle des Funktionals bei der Optimierung.

In das Gebiet  $\Omega$  in Abbildung 4.1 wird am Punkt  $\mathbf{X}_0$  eine Aussparung  $c_r(\mathbf{X}_0)$  mit einem Parameter  $r$  geschnitten. Der Differenzialquotient für das Funktional  $\mathcal{J}$  heißt *Topologische Ableitung des Funktionals* am Punkt  $\mathbf{X}_0$ . Dieser Differenzialquotient wird mit dem Funktional auf dem verbleibenden Gebiet, dem Funktional auf dem Gebiet ohne Aussparung und dem Volumen des Ausschnitts nach

$$\mathcal{TJ}(\mathbf{X}_0) := \lim_{r \downarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\Omega \setminus \overline{c_r(\mathbf{X}_0)}) - \mathcal{J}(\Omega)}{|c_r(\mathbf{X}_0)|} \quad (4.1)$$

gebildet.

Die Topologische Ableitung ist ein Indikator für „Punkt des Gebiets ist wertvoll“ oder eben weniger wertvoll, um ein Optimierungsziel zu erreichen oder eine Restriktion noch einhalten zu können. Dies ist also eine Sensitivität für die Entwurfsvariable „kein Material am Punkt  $\mathbf{X}_0$ “.



**Abbildung 4.1:** Aussparung im Körper

Die allgemeine Ausschnittsfunktion, die die Menge an Punkten fasst, die ausgespart werden, wird mit  $c_r(\mathbf{X}_0)$  bezeichnet. Sie kann prinzipiell eine beliebige Form beschreiben, jedoch muss für den Übergang zum Limes  $r \rightarrow 0$  das Volumen der Aussparung  $|c_r(\mathbf{X}_0)|$  ebenfalls gegen null gehen. Dieses „Aussparen“ ist eine nicht glatte Operation im Sinne der Formänderungen des Gebiets, da hier die Topologiekategorie geändert wird. Daher wird diese Perturbation auch *Topologische Variation des Gebiets* genannt.

*Schreibweise* (Abschluss eines Gebiets). Der *Abschluss* eines Gebiets ist die Mengenvereinigung des Gebiets mit seinen Randpunkten. Der Abschluss der Ausschnittsfunktion  $c_r(\mathbf{X}_0)$  wird mit  $\overline{c_r(\mathbf{X}_0)} := c_r(\mathbf{X}_0) \cup \partial c_r(\mathbf{X}_0)$  gekennzeichnet.

Die mathematisch präzisen Definitionen von offenen Mengen, Randpunkten und dem Abschluss kann in Forster 2017a nachgelesen werden. An dieser Stelle genügt die Veranschaulichung, dass bei der Ausschnittsfunktion der Rand des Ausschnitts explizit mit weggeschnitten wird. Nur so führt der Übergang zum Limes  $r \rightarrow 0$  des Differentialquotienten auf das Fehlen des Punktes  $\mathbf{X}_0$ .

Mit der allgemeinen Definition der Ausschnittsfunktion  $c_r(\mathbf{X}_0)$  sollen prinzipiell beliebige Ausschnittsformen möglich sein, was bei elliptischen Ausschnitten beispielsweise eine Orientierung im Raum erlaubt. Damit wird eine künstliche Orthotropie ins System eingebracht. In dieser Arbeit werden zwei Ausschnittsformen betrachtet. Für volldimensionale ebene ( $d = 2$ ) und räumliche ( $d = 3$ )

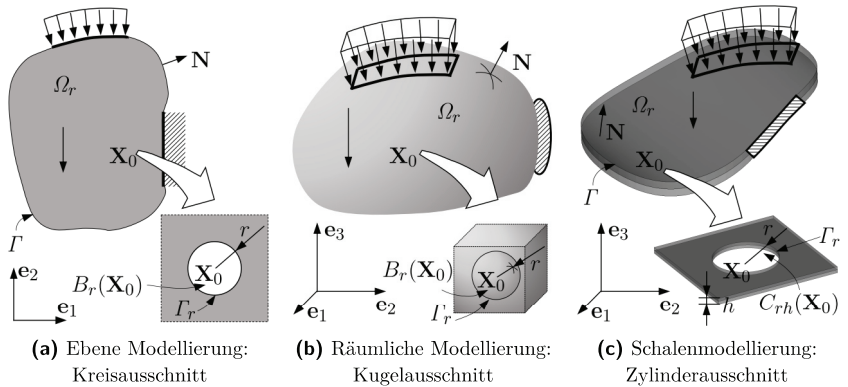
Modellierungen wie in Abbildung 4.2a und 4.2b werden  $d$ -dimensionale Kugelausschnitte  $B_r(\mathbf{X}_0)$  mit Radius  $r > 0$  um  $\mathbf{X}_0 \in \Omega$  definiert durch

$$\begin{aligned} B_r(\mathbf{X}_0) &:= \{ \mathbf{Y} \in \Omega \mid \| \mathbf{Y} - \mathbf{X}_0 \|_2 < r \} , \\ \overline{B_r(\mathbf{X}_0)} &= \{ \mathbf{Y} \in \Omega \mid \| \mathbf{Y} - \mathbf{X}_0 \|_2 \leq r \} \end{aligned} \quad (4.2)$$

betrachtet. Das sind kreisrunde Löcher in der Ebene und Kugelaussparungen bei räumlichen Modellen. Bei Modellierungen von Schalen werden zylindrische Löcher (Abbildung 4.2c)  $C_{rh}(\mathbf{X}_0)$  verwendet:

$$\begin{aligned} C_{rh}(\mathbf{X}_0) &:= \{ \mathbf{Y} \in \Omega \mid \| \mathbf{Y}_{\mathcal{M}} - \mathbf{X}_0 \|_2 < r \} , \\ \overline{C_{rh}(\mathbf{X}_0)} &= \{ \mathbf{Y} \in \Omega \mid \| \mathbf{Y}_{\mathcal{M}} - \mathbf{X}_0 \|_2 \leq r \} . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dabei setzen wir voraus, dass bei Schalenmodellierungen der Perturbationspunkt auf der Schalenmittelfläche liegt  $\mathbf{X}_0 \in \mathcal{M}$ . Die Zylinderausschnitte hängen auch von der Schalendicke  $h$  ab. Die Herleitung in diesem Kapitel gilt sowohl für die Kugel- als auch für die Zylinderausschnitte, so dass weiterhin mit der allgemeinen Ausschnittsfunktion  $c_r(\mathbf{X}_0)$  gearbeitet wird. Die Grundlagen der Struktursimulation in Kapitel 3 bezogen sich alle auf die Bezugsconfiguration. Die Darstellung in dieser Konfiguration soll später die Auswertung der Formeln erleichtern, da runde Ausschnitte auch bei Deformation in der Bezugsconfiguration rund bleiben. Daher wird die Bezugsconfiguration auch in den folgenden Herleitungen beibehalten.



**Abbildung 4.2:** Dimensionen des Ausschnitts

Die Definition der Topologischen Ableitung durch den Differenzialquotienten ist leicht zu erfassen. In der Anwendung wäre die Berechnung des Differenzialquotienten sehr aufwendig, weil für die Sensitivität eines Punktes das Funktional auf



dem topologisch variierten Gebiet mit verschiedenen Radien ausgewertet werden müsste. Eine umfangreiche Abtastung des Gebiets mit dem Differenzialquotienten ist für praktische Aufgabenstellungen nicht durchführbar. Wir betrachten daher einen alternativen Zugang zur Definition der Topologischen Ableitung mit der sogenannten *topologisch asymptotischen Entwicklung*<sup>1</sup>

$$\mathcal{J} \left( \Omega \setminus \overline{c_r(\mathbf{X}_0)} \right) = \mathcal{J}(\Omega) + f(r) \mathcal{TJ}(\mathbf{X}_0) + \mathcal{R}(f(r)) \quad (4.4)$$

mit der positiven Korrekturfunktion  $f(r)$ . Im Restglied  $\mathcal{R}$  stehen die höheren Potenzen der Korrekturfunktion und weitere Entwicklungsterme höherer Ordnung. Für die Korrekturfunktion  $f$  gelte:  $f(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow 0$  und für das Restglied gelte  $\lim_{r \downarrow 0} \frac{\mathcal{R}(f(r))}{f(r)} = 0$ . Die Bezeichnung „topologische asymptotische Entwicklung“ stammt aus Novotny und Sokołowski 2013. Anschaulich ist dies eine Art „Linearisierung“ des Funktionals  $\mathcal{J}$  im Punkt  $\mathbf{X}_0$  im topologischen Sinn.

Wird nun als positive Korrekturfunktion das Ausschnittvolumen  $f(r) = \overline{c_r(\mathbf{X}_0)}$  gewählt, dann erhalten wir nach der Umformung von (4.4) und dem Übergang zum Limes  $r \rightarrow 0$  wieder die allgemeine Definition für die Topologische Ableitung mit dem Differenzialquotienten (4.1).

### 4.1.1 Zusammenhang zwischen Topologischer Ableitung und Formableitung

Mit der topologisch asymptotischen Entwicklung (4.4) für das Funktional auf dem topologisch variierten Gebiet  $\mathcal{J} \left( \Omega \setminus \overline{c_r(\mathbf{X}_0)} \right)$  wird nun die Verbindung zwischen Topologischer Ableitung und Formableitung hergestellt. Dieses Vorgehen kann auch in Novotny und Sokołowski 2013 nachvollzogen werden. Wir differenzieren die topologisch asymptotische Entwicklung bezüglich des Gebietsparameters  $r$  (hier gekennzeichnet mit dem Hochstrich '):

$$\frac{d}{dr} \mathcal{J} \left( \Omega \setminus \overline{c_r(\mathbf{X}_0)} \right) = f'(r) \mathcal{TJ}(\mathbf{X}_0) + \mathcal{R}'(f(r)) f'(r).$$

<sup>1</sup>Die *asymptotische Entwicklung* ist die Darstellung einer Funktion z. B. als Potenzreihe, die das Verhalten der Funktion im Grenzverhalten widerspiegelt (vgl. Behnke und Sommer 1965). Die asymptotische Entwicklung wird beispielsweise verwendet, um Funktionen, die eine Singularität haben, stetig differenzierbar fortzusetzen. In Il'in 1992 wird die asymptotische Entwicklung für Aussparungen in zwei- und dreidimensionalen Strukturen bei elliptischen Randwertproblemen gezeigt. Dort geht es konkret um die asymptotische Entwicklung der Lösung  $\mathbf{u}$  auf den Aussparungspunkt.

Es sei vorausgesetzt, dass für den Übergang zum Limes die Ableitung des Restglieds gegen null geht:  $\lim_{r \downarrow 0} \mathcal{R}'(f(r)) = 0$ . Mit Division durch  $f'(r)$ , Ersetzen der Korrekturfunktion durch das Ausschnittsvolumen  $f(r) = \overline{c_r(\mathbf{X}_0)}$  und dem Übergang zum Limes ergibt sich eine weitere Berechnungsmöglichkeit für die Topologische Ableitung:

$$\mathcal{T}\mathcal{J}(\mathbf{X}_0) = \lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{d(\overline{c_r(\mathbf{X}_0)})}{dr} \right)^{-1} \frac{d\mathcal{J}(\Omega \setminus \overline{c_r(\mathbf{X}_0)})}{dr}. \quad (4.5)$$

*Anmerkung 4.1.1 (Alternative Schreibweise mit der Formableitung). In der Literatur findet sich – nach Anwendung des Satzes über die Umkehrfunktion auf (4.5) – folgende Schreibweise für die Topologische Ableitung:*

$$\mathcal{T}\mathcal{J}(\mathbf{X}_0) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{dr}{d(\overline{c_r(\mathbf{X}_0)})} \frac{d\mathcal{J}(\Omega \setminus \overline{c_r(\mathbf{X}_0)})}{dr} = \frac{d\mathcal{J}(\Omega \setminus \overline{c_r(\mathbf{X}_0)})}{d(\overline{c_r(\mathbf{X}_0)})}.$$

Die Ableitung des Funktionals auf dem Gebiet mit der Aussparung bezüglich des Dimensionierungsparameters der Aussparung ist keine Änderung der Topologieklasse und daher eine *Formableitung*.

## 4.1.2 Formableitung und materielle Ableitung

Die Ableitung des Ausschnittsvolumens in (4.5) ist mit einer einfachen Rechnung zu ermitteln und wird am Ende dieses Abschnitts angegeben. Wie bei der Topologischen Ableitung selbst ist auch die Berechnung der Formableitung mit einem Differenzialquotienten effektiv nicht möglich. Eine anwendbare Darstellung kann mit der sogenannten *materiellen Ableitung* erreicht werden.

Dazu betrachten wir eine reine Formvariation des Gebiets  $\Omega$ . Diese Variation wird durch die parametrisierte Abbildung  $T_t(\mathbf{X})$  beschrieben, mit  $\mathbf{X} \in \Omega$  und  $t \in [0, \delta)$  mit einem  $\delta > 0$ . Für jedes  $t$  ist die Formvariation invertierbar

$$T_t : \Omega \rightarrow \Omega_t \quad \text{und} \quad T_t^{-1} : \Omega_t \rightarrow \Omega.$$

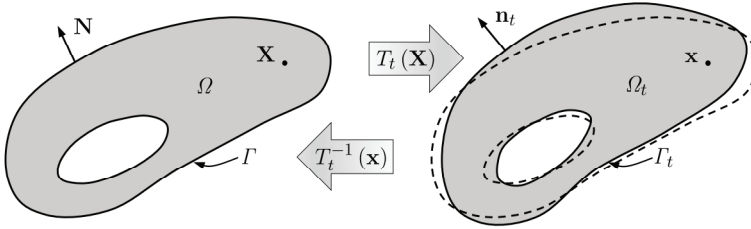
Das in der Form variierte Gebiet  $\Omega_t$  wird vom Rand  $\Gamma_t := \partial\Omega_t$  begrenzt. Das ist schematisch in Abbildung 4.3 dargestellt. Die Bezeichnung des Parameters mit  $t$  suggeriert bereits den Zusammenhang mit einer zeitlichen Betrachtung. Die zeitliche Komponente ist bei der Herleitung der Formableitung nicht mit der Zeit des mechanischen Systems gleichzusetzen und wird nur speziell in diesem

Abschnitt verwendet. Tatsächlich wird an dieser Stelle eine Pseudo-Zeit von der Dimension „Länge“ verwendet .

Die einzelnen Formvariationen können als Momentankonfigurationen interpretiert werden:

$$\Omega_t := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{x} = T_t(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \Omega \text{ und } t \in [0, \delta) \}$$

mit  $\mathbf{x}|_{t=0} = T_t(\mathbf{X})|_{t=0} = \mathbf{X}$  und  $\Omega_t|_{t=0} = \Omega$ . Die Bezugskonfiguration ist dann das Gebiet ohne Variation des Randes.



**Abbildung 4.3:** Formvariation des Körpers und des Ausschnitts (modifiziert aus Novotny und Sokółowski 2013)

Die Ableitung der Abbildung  $T_t(\mathbf{X})$  nach dem Parameter  $t$  kann als das „Geschwindigkeitsfeld“ der Formänderung interpretiert werden

$$\dot{\mathbf{x}} := \frac{\partial}{\partial t} T_t(\mathbf{X}) = \mathbf{v}_t(\mathbf{X}, t) . \quad (4.6)$$

Das Funktional  $\mathcal{J}$  sei durch ein Integral auf dem ganzen Gebiet mit einer inneren Funktion  $z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definiert:

$$\mathcal{J}(\Omega) = \int_{\Omega} z \, d\Omega .$$

Die Formableitung des Funktionals in der Momentankonfiguration  $\mathcal{J}(\Omega_t)$  in Richtung des Geschwindigkeitsfelds der Formänderung  $\mathbf{v}_t$  ist

$$d\mathcal{J}(\Omega; \mathbf{v}_t) := \frac{\partial \mathcal{J}(\Omega_t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\Omega_t} z \, d\Omega_t \right) = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} z \, d\Omega + \int_{\partial \Gamma_t} z \mathbf{v}_t \cdot \mathbf{n}_t \, d\Gamma , \quad (4.7)$$

mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n}_t$  auf dem Rand  $\Gamma_t$ . Dies ist ein Resultat aus der Anwendung der schwachen Ableitung und des Satzes von Stokes in Sokółowski und Zolesio 1992. Wenn beim Funktional  $\mathcal{J}$  sowohl das Gebiet explizit

als auch der Integrand implizit durch die Formänderung beeinflusst wird, lässt sich die Aufteilung der Integrale als Anwendung der Kettenregel interpretieren.

Um die spezielle Formableitung  $\frac{d}{dr} \mathcal{J}(\Omega \setminus \overline{c_r(\mathbf{X}_0)})$  bei Variation des Dimensionierungsparameters zu berechnen, betrachten wir die spezielle Formvariation

$$T_t^*(\mathbf{X}) : \Omega \setminus c_r(\mathbf{X}_0) \rightarrow \Omega \setminus c_{r+t}(\mathbf{X}_0),$$

also eine Vergrößerung des Dimensionierungsparameters und damit auch der Aussparung wie in Abbildung 4.4a. Für die in dieser Arbeit betrachteten Spezialfälle der Kugel- und Zylinderausschnitte zeigt der äußere Normalenvektor  $\mathbf{n}_t$  vom Rand in Richtung des zentralen Punktes des Ausschnitts  $\mathbf{X}_0$ . Das Geschwindigkeitsfeld der Formänderung nach (4.6) auf dem Aussparungsrand stellen wir mithilfe des Differenzialquotienten der Formvariation dar:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}_t(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} T_t^*(\mathbf{X}) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{T_{t+\epsilon}^*(\mathbf{X}) - T_t^*(\mathbf{X})}{\epsilon}. \quad (4.8)$$

Für diesen Differentialquotienten wird wiederum eine weitere Variation des Gebiets  $T_{t+\epsilon}^*(\mathbf{X})$  benötigt. Diese ist in Abbildung 4.4b durch die Ausschnittsfunktion  $c_{r+t+\epsilon}$  dargestellt. Die Positionen eines Punktes  $\mathbf{X}$  auf dem Aussparungsrand in den Momentankonfigurationen sind

$$\mathbf{x}_t = T_t^*(\mathbf{X}) = \mathbf{X}_0 - (r+t) \mathbf{n}_t$$

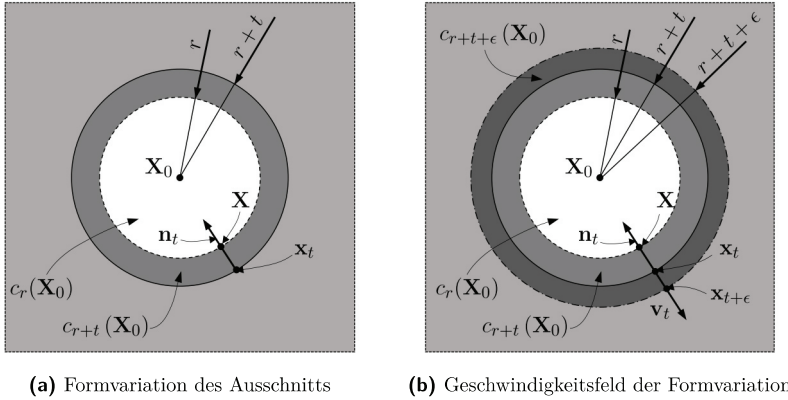
und

$$\mathbf{x}_{t+\epsilon} = T_{t+\epsilon}^*(\mathbf{X}) = \mathbf{X}_0 - (r+t+\epsilon) \mathbf{n}_t.$$

Diese eingesetzt in den Differenzialquotienten der Formvariation (4.8) ergibt schließlich

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\mathbf{X}_0 - (r+t+\epsilon) \mathbf{n}_t - (\mathbf{X}_0 - (r+t) \mathbf{n}_t)}{\epsilon} \\ &= - \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\mathbf{n}_t \epsilon}{\epsilon} \\ \mathbf{v}_t(\mathbf{X}, t) &= -\mathbf{n}_t. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Demnach zeigt das Geschwindigkeitsfeld der Formvariation immer vom Aussparungsrand normal in das Innere des Gebiets und damit genau entgegengesetzt zum äußeren Normalenvektor.



**Abbildung 4.4:** Formvariation des Ausschnitts und Geschwindigkeitsfeld bei der Formvariation

*Schreibweise* (Gebiet mit Aussparung). Das Gebiet mit der Aussparung wird zur übersichtlichen Schreibweise der Ableitungen und Integrale mit  $\Omega_r := \Omega \setminus c_r(\mathbf{X}_0)$  abgekürzt.

Wird nun das Geschwindigkeitsfeld der Formvariation aus (4.9) in die Formableitung (4.7) eingesetzt, erhalten wir die *materielle Ableitung* bezüglich einer Änderung des Dimensionierungsparameters

$$\frac{d\mathcal{J}(\Omega \setminus \overline{c_r(\mathbf{X}_0)})}{dr} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \int_{\Omega_r} z \, d\Omega \right) = \int_{\Omega_r} \frac{\partial}{\partial r} z \, d\Omega - \int_{\Gamma_r} z \, d\Gamma. \quad (4.10)$$

Die materielle Ableitung und die Übertragung in dieser Arbeit auf Schalen ist nicht zu verwechseln mit der Formableitung von Schalen, wie sie beispielsweise in Hassani et al. 2013 verwendet wird. Die Definition der Formableitung in (4.7) ist universell. Für die materielle Ableitung in diesem Abschnitt wurde durch den zylindrischen Ausschnitt allerdings nur die Formvariation des Randes der Mittelfläche tangential zu eben dieser Mittelfläche betrachtet, ohne eine normale Komponente dazu.

Es sind prinzipiell Formableitungen von Funktionalen möglich, die durch ein Integral auf dem Rand des Gebiets definiert sind. Die Herleitung der Formableitung für diesen Fall ist in Sokołowski und Zolesio 1992 zu finden.

Zur Vervollständigung der Topologischen Ableitung in (4.5) werden noch die Ableitungen der Volumina der Ausschnittsfunktionen (4.2) und (4.3) benötigt. Die Ableitung des Kugelvolumens ist mit

$$\frac{d}{dr} |\overline{B_r(\mathbf{x}_0)}| = 2(d-1)r^{d-1}\pi \quad \text{mit } d = 2, 3 \quad (4.11)$$

gerade die Kugeloberfläche und für das Zylindervolumen ist die Ableitung nach dem Radius

$$\frac{d}{dr} |\overline{C_{rh}(\mathbf{x}_0)}| = 2\pi rh \quad (4.12)$$

entsprechend die Zylindermantelfläche.

Mit der materiellen Ableitung (4.10) und den Ableitungen der Ausschnittsfunktionen (4.11) und (4.12) kann die Topologische Ableitung nach (4.5) berechnet werden. Die Ergebnisse dieses Abschnitts lauten zusammengefasst:

*Resultat 4.1.1* (Topologische Ableitung und Formableitung).

Die Topologische Ableitung eines Funktionals  $\mathcal{J} = \int_{\Omega} z \, d\Omega$  bezüglich einer Aussparung  $c_r(\mathbf{X}_0)$  im Punkt  $\mathbf{X}_0$  ist definiert durch den Differenzialquotienten

$$\mathcal{T}\mathcal{J}(\mathbf{X}_0) := \lim_{r \downarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\Omega \setminus \overline{c_r(\mathbf{X}_0)}) - \mathcal{J}(\Omega)}{|c_r(\mathbf{X}_0)|}$$

und kann mit Hilfe der materiellen Ableitung berechnet werden:

$$\mathcal{T}\mathcal{J}(\mathbf{X}_0) = \lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{d(|c_r(\mathbf{X}_0)|)}{dr} \right)^{-1} \left( \int_{\Omega_r} \frac{\partial}{\partial r} z \, d\Omega - \int_{\Gamma_r} z \, d\Gamma \right).$$

Im nächsten Abschnitt wird die sogenannte *adjungierte Methode* vorgestellt, mit der die Berechnung der materiellen Ableitung und damit schließlich die Berechnung der Topologischen Ableitung möglich wird.

Dass immer noch der Limes in der Formelbeschreibung der Topologischen Ableitung verbleibt und im Faktor der Ableitung der Ausschnittsfunktion der Dimensionierungsparameter im Nenner steht, wirkt hier zwar noch störend. In den bekannten Herleitungen der linearen Topologischen Ableitung entsteht bei der Auswertung insbesondere des Randintegrals allerdings auch immer ein im Dimensionierungsparameter  $r$  linearer Faktor, so dass letztendlich keine Abhängigkeit mehr gegeben ist und dort der Übergang zum Limes entfällt. Die Berechnung des Volumenintegrals wird mit der adjungierten Methode gänzlich umgangen.

## 4.2 Allgemeine Sensitivitätenbestimmung mit der adjungierten Methode

Am Beispiel der materiellen Ableitung kann die Problemstellung und das Prinzip der adjungierten Methode veranschaulicht werden. Die materielle Ableitung besteht aus zwei Integralen: Ein Integral auf dem Gebiet mit Ausschnitt – im Folgenden implizite Ableitung genannt – und ein Integral auf dem Aussparungsrand – im Folgenden als explizite Ableitung bezeichnet. Das Randintegral kann unter gewissen Umständen ausgewertet werden. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Auswertungsmöglichkeiten in Kapitel 5 diskutiert. Die Differenziation der inneren Funktion nach dem Dimensionierungsparameter des Ausschnitts und damit die Berechnung der impliziten Ableitung ist im Allgemeinen nicht möglich. Mit der adjungierten Methode wird die Auswertung der impliziten Ableitung geschickt umgangen.

Die Idee ist, das Funktional mit den Gleichgewichtsbedingungen zu erweitern. Konkret wird die Gleichgewichtsbedingung als Gleichheitsrestriktion mit einem Multiplikator versehen und zum Funktional addiert. Dann wird dieses erweiterte Funktional differenziert. Die dabei entstehenden explizit vom Dimensionierungsparameter abhängigen Terme, die Randintegrale, müssen ausgewertet werden. Für die implizit beispielsweise über die Kettenregel vom Dimensionierungsparameter abhängigen Terme wird der Multiplikator so gewählt, dass die implizite Ableitung verschwindet. Dieser Multiplikator wird dann als *Adjungierte* oder *adjungierte Lösung* bezeichnet. Ein allgemeiner funktionalanalytischer Zugang zur adjungierten Methode findet sich in Hinze et al. 2009.

Die adjungierte Methode ist eine etablierte Methode zur Sensitivitätengewinnung in der Optimalsteuerung generell und in der Topologieoptimierung im Speziellen. Für die Sensitivitätenbestimmung bei Optimierungsproblemen mit einer großen Anzahl an Designvariablen ist sie der direkten Methode, bei der die impliziten Ableitungen tatsächlich berechnet werden, überlegen. Im Falle der Topologischen Ableitung ist sie unumgänglich, da die implizite Ableitung im Allgemeinen nicht bestimmt werden kann.

Die Konstruktion der Adjungierten lässt eine weitere Interpretation zu, nämlich die des sogenannten Lagrange-Multiplikators: Das kontinuumsmechanische Anfangsrandwertproblem stellt für die Optimierung eine Gleichungsrestriktion dar. Ein solches restringiertes Optimierungsproblem kann mithilfe der Lagrange-Funktion so umformuliert werden, dass es durch ein Funktional beschreibbar ist. Dafür

werden alle Restriktionen (Ungleichungsrestriktionen werden mit Schlupfvariablen versehen) mit jeweils eigenen Lagrange-Multiplikatoren zum Funktional addiert. Die Multiplikatoren beschreiben dann den Einfluss der jeweiligen Restriktionen auf das Optimierungsproblem. Details zur Interpretation sind unter anderem in Schumacher 2020, Harzheim 2014 und Ulbrich und Ulbrich 2012 zu finden.

## 4.3 Erst differenzieren – dann diskretisieren

In diesem und dem nächsten Abschnitt wird konkret die Topologische Ableitung mit der adjungierten Methode entwickelt. Zunächst wird auf Basis der analytischen Form der materiellen Ableitung ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Adjungierten vorbereitet und für dieses System anschließend ein Lösungskonzept mit der impliziten Zeitintegration entwickelt.

### 4.3.1 Analytisch kontinuierliche Herleitung

Für die Entwicklung der Topologischen Ableitung betrachten wir an dieser Stelle ein möglichst allgemeines Funktional, welches ein Zeitintegral beinhaltet und von der Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung des mechanischen Systems abhängig ist:

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}(\Omega), \dot{\mathbf{u}}(\Omega), \ddot{\mathbf{u}}(\Omega), \Omega) = \int_0^T \int_{\Omega} z(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) \, d\Omega \, dt. \quad (4.13)$$

In Abschnitt 4.5 wird anhand des Verschiebungsfunktionals auch der Fall des Zeitintegrals ohne Gebietsintegral gezeigt. Ebenso ist ein Gebietsintegral ohne Zeitintegral möglich oder weder ein Zeitintegral noch ein Gebietsintegral.

Nach dem Satz über implizite Funktionen und Anwendung der Kettenregel wird die Differenziation nach einem Parameter  $r$ , der sowohl die Steuerungsvariable  $\Omega$  als auch die Zustandsvariable  $\mathbf{u}$  und deren Ableitungen  $\dot{\mathbf{u}}$  und  $\ddot{\mathbf{u}}$  beeinflusst, aufgeteilt:

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r} = \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r} \right)_E + \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r} \right)_I = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}}{\partial r}.$$

*Schreibweise.* Der untere Index  $(\ )_E$  bezeichnet dabei die expliziten Ableitungen und  $(\ )_I$  die impliziten.



Für den Fall der materiellen Ableitung entspricht die explizite Ableitung dem Randintegral und die implizite Ableitung dem Integral der Ableitung der inneren Funktion auf dem gesamten Gebiet.

Um die adjungierte Methode anwenden zu können, wird das erweiterte Funktional  $\hat{\mathcal{J}}$  definiert. Im Gegensatz zu den klassischen linearen Anwendungsgebieten der Topologischen Ableitung muss bei der transient nichtlinearen Berechnung noch eine zeitliche Komponente berücksichtigt werden. Insbesondere die implizite Ableitung des Trägheits- und Dämpfungsterms erfordert daher einen Kunstgriff, wie er beispielsweise auch in der linear transienten Sensitivitätenbestimmung von Dahl et al. 2008 eingesetzt wird. Mit partieller Integration im Zeitbereich wird aus der Ableitung des Massenträgheitsterms eine adjungierte Trägheit entwickelt und das Anfangsrandwertproblem in ein Endwertproblem umgewandelt.

Für die partielle Integration im Zeitbereich muss das Funktional mit dem Gleichgewicht integriert über die Zeit erweitert werden. Da das mechanische Gleichgewichtsfunktional  $G$  in (3.31) auf Seite 42 zu jedem Zeitpunkt  $t \in [0, T]$  erfüllt ist, gilt es insbesondere für das Integral über die Zeit. Der Endzeitpunkt  $T$  ist dabei rein technischer Natur, da das betrachtete mechanische System nur einen Ausschnitt der Wirklichkeit abbildet. Weder der Anfangs- noch der Endzeitpunkt sind absolut zu sehen. Im Zusammenhang mit der Definition des Gleichgewichtsfunktional wurde bereits auf die explizite Abhängigkeit eines Funktional vom Gebiet  $\Omega$ , von den Zustandsvariablen der Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$ , der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{u}}$  und der Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{u}}$  und dadurch auch auf die implizite Abhängigkeit durch die Steuerungsvariable  $\Omega$  hingewiesen.

Wir benötigen für die materielle Ableitung die Sensitivität bezüglich der Variation des Dimensionierungsparameters. Deshalb betrachten wir sowohl das Funktional als auch das Gleichgewichtsfunktional auf einem mit einer infinitesimalen Aussparung topologisch variierten Gebiet  $\Omega_r$ . Anstelle der beliebigen Testfunktion  $\phi$  wird das Gleichgewicht auf eine spezielle Funktion – die Adjungierte –  $\boldsymbol{\lambda}$  angewendet. Das mit dem integralen mechanischen Gleichgewicht erweiterte Funktional lautet

$$\hat{\mathcal{J}} := \mathcal{J}(\mathbf{u}(\Omega_r), \dot{\mathbf{u}}(\Omega_r), \ddot{\mathbf{u}}(\Omega_r), \Omega_r) + \int_0^T \left\langle G(\mathbf{u}(\Omega_r), \dot{\mathbf{u}}(\Omega_r), \ddot{\mathbf{u}}(\Omega_r), \Omega_r), \boldsymbol{\lambda} \right\rangle dt. \quad (4.14)$$

Hier wurde skalar null in Form des Gleichgewichtsfunktional addiert. Die Sensitivität von  $\mathcal{J}$  wird dadurch nicht verändert. Die Adjungierte  $\boldsymbol{\lambda}$  kann auch als Lagrange-Multiplikator interpretiert werden. So wie die allgemeine Testfunktion

muss auch die Adjungierte auf dem Dirichletrand  $\Gamma_D$  des Gebiets verschwinden:  $\boldsymbol{\lambda} \in \{\boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_D(t)\}$ .

Die Ableitung des erweiterten Funktionals wird ebenfalls in implizite und explizite Ableitungsteile aufgeteilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathcal{J}}(\mathbf{u}(\Omega_r), \dot{\mathbf{u}}(\Omega_r), \ddot{\mathbf{u}}(\Omega_r), \Omega_r) \\ = \underbrace{\left\langle \frac{\partial \hat{\mathcal{J}}}{\partial \mathbf{u}}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{\mathcal{J}}}{\partial \dot{\mathbf{u}}}, \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{\mathcal{J}}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}}, \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}}{\partial r} \right\rangle}_{\left(\frac{\partial \hat{\mathcal{J}}}{\partial r}\right)_I} + \underbrace{\frac{\partial \hat{\mathcal{J}}}{\partial r}}_{\left(\frac{\partial \hat{\mathcal{J}}}{\partial r}\right)_E} \end{aligned}$$

$$= \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{u}}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{\mathbf{u}}}, \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}}, \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}}{\partial r} \right\rangle \quad (4.15)$$

$$+ \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \int_0^T \left\langle G(\mathbf{u}(\Omega_r), \dot{\mathbf{u}}(\Omega_r), \ddot{\mathbf{u}}(\Omega_r), \Omega_r), \boldsymbol{\lambda} \right\rangle dt, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right\rangle \quad (4.16)$$

$$+ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \int_0^T \left\langle G(\mathbf{u}(\Omega_r), \dot{\mathbf{u}}(\Omega_r), \ddot{\mathbf{u}}(\Omega_r), \Omega_r), \boldsymbol{\lambda} \right\rangle dt. \quad (4.17)$$

Die geschwindigkeits- und beschleunigungsabhängigen Terme des Gleichgewichtsfunktionalen werden im Folgenden durch partielle Integration im Zeitbereich auf die Verschiebung zurückgeführt. Daher wird hier schon auf das Ausschreiben der Ableitung des Gleichgewichtsfunktionalen bezüglich der Geschwindigkeit und der Beschleunigung verzichtet.

Dann wird die Forderung aufgestellt, dass die Testfunktion  $\boldsymbol{\lambda}$  die impliziten Terme (4.15) und (4.16) gleich null werden lässt für jede beliebige Funktion  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} =: \boldsymbol{\phi}$ :

$$\begin{aligned} G^* := \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{u}}, \boldsymbol{\phi} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{\mathbf{u}}}, \dot{\boldsymbol{\phi}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}}, \ddot{\boldsymbol{\phi}} \right\rangle \\ + \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \int_0^T \left\langle G(\mathbf{u}(\Omega_r), \dot{\mathbf{u}}(\Omega_r), \ddot{\mathbf{u}}(\Omega_r), \Omega_r), \boldsymbol{\lambda} \right\rangle dt, \boldsymbol{\phi} \right\rangle = 0. \quad (4.18) \end{aligned}$$

Der Ausdruck (4.18) wird *adjungierte Zustandsgleichung* genannt. Dann verbleibt für die Ableitung des erweiterten Funktionals nur die Auswertung der expliziten Ableitungsterme (4.17), in denen aber die Adjungierte bekannt sein muss.

*Schreibweise* (Adjungierte). Die Lösung der adjungierten Zustandsgleichung  $\boldsymbol{\lambda}$  heißt *adjungierte Lösung* oder einfach nur *Adjungierte*. Die Dimension der Adjungierten ist von der Dimension des Funktionals  $\mathcal{J}$  abhängig

$$\dim(\boldsymbol{\lambda}) = \dim(\mathcal{J}) \top \cdot \mathbf{M}^{-1} \mathbf{L}^{-1}. \quad (4.19)$$

Funktionale, Vektoren und skalare Größen, die im Zusammenhang mit der Adjungierten definiert werden und eine prinzipielle Entsprechung in der nichtlinearen Strukturmechanik haben, werden mit hochgestelltem Stern \* gekennzeichnet, wie das adjungierte Gleichgewichtsfunktional  $G^*$ .

Das adjungierte Gleichgewichtsfunktional  $G^*$  hängt explizit vom Funktional  $\mathcal{J}$  und der Zustandslösung  $\mathbf{u}$  und deren zeitlichen Ableitungen ab. Zur Berechnung der Adjungierten sind demnach zwei Lösungen eines Differentialgleichungssystems notwendig: Zunächst wird die Lösung  $\mathbf{u}$  des strukturmechanischen Anfangsrandwertproblems (3.31) benötigt, um das Funktional  $\mathcal{J}$  und dessen Ableitungen nach der Zustandslösung  $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{u}}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{\mathbf{u}}}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}}$  zu berechnen. Mit den Ableitungen wird dann die adjungierte Lösung  $\boldsymbol{\lambda}$  der adjungierten Zustandsgleichung (4.18) berechnet. Erst dann kann der verbleibende explizite Ableitungsteil (4.17) des erweiterten Funktionals berechnet werden. Mit dieser Technik wird also die Berechnung der Ableitung  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r}$  geschickt umgangen.

Wir betrachten nun im Speziellen die materielle Ableitung des erweiterten Funktionals  $\hat{\mathcal{J}}$  aus (4.14). Der Neumannrand  $\Gamma_N$  mit den aufgebrachten Spannungen ist vom Dimensionierungsparameter  $r$  der Aussparung unabhängig. Die Spannungsbelastung tritt daher in der expliziten Ableitung nicht mehr auf. Die materielle Ableitung wird in die explizite und implizite Ableitung aufgespalten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathcal{J}}}{\partial r} &= \underbrace{\left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r} \right)_E - \int_0^T \int_{\Gamma_r} \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \nabla \boldsymbol{\lambda} + c_d \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{f}(t) \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma \, dt}_{\text{explizite Ableitung}} \quad (4.20) \\ &+ \underbrace{\left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r} \right)_I + \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \int_0^T \int_{\Omega_r} \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \nabla \boldsymbol{\lambda} + c_d \dot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\lambda} \right.}_{\text{implizite Ableitung}} \\ &\quad \left. + \varrho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{f}(t) \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\Omega \, dt, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right\rangle}_{\text{implizite Ableitung}}. \quad (4.21) \end{aligned}$$

Die impliziten Terme werden nun einzeln bestimmt. Die Ableitung der von der Adjungierten geleisteten inneren Energie wurde bei der Linearisierung des Gleichgewichtsfunktional in (3.35) auf Seite 45 bereits berechnet. Ersetzen der Ableitung durch die Testfunktion  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} = \boldsymbol{\phi}$  bringt in der kontinuierlichen Form zunächst keine weitere Vereinfachung

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \int_{\Omega_r} \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \nabla \boldsymbol{\lambda} \, d\Omega, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \int_{\Omega_r} \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \nabla \boldsymbol{\lambda} \, d\Omega, \boldsymbol{\phi} \right\rangle. \quad (4.22)$$

Der Dämpfungsterm und der Massenträgheitsterm werden zunächst partiell in der Zeit integriert und anschließend differenziert. Die Dichte ist auf dem Gebiet konstant und die Reihenfolge von zeitlicher und räumlicher Integration ist nach dem Satz von Fubini vertauschbar. Die partielle Integration des Dämpfungsterms lautet:

$$\int_0^T \int_{\Omega_r} c_d \dot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\Omega \, dt = \int_{\Omega_r} c_d \mathbf{u}(T) \cdot \boldsymbol{\lambda}(T) - \bar{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\lambda}(0) \, d\Omega - \int_0^T \int_{\Omega_r} c_d \mathbf{u} \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}} \, d\Omega \, dt. \quad (4.23)$$

Ebenso wird der Massenträgheitsterm zweimal partiell in der Zeit integriert:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega_r} \varrho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\Omega \, dt &= \int_{\Omega_r} \varrho \dot{\mathbf{u}}(T) \cdot \boldsymbol{\lambda}(T) - \varrho \bar{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\lambda}(0) \, d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega_r} \varrho \mathbf{u}(T) \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}}(T) - \varrho \bar{\mathbf{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}}(0) \, d\Omega \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega_r} \varrho \mathbf{u} \cdot \ddot{\boldsymbol{\lambda}} \, d\Omega \, dt. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Mit der Voraussetzung, dass die Anfangswerte unabhängig von der Gebietsform und von der Verschiebung sind (Voraussetzung 3.2.2 auf Seite 40), entfallen sowohl für den Dämpfungsterm (4.23) als auch für den Massenträgheitsterm (4.24) bei der Ableitung nach der Verschiebung  $\mathbf{u}$  die Anfangswerte:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \int_0^T \int_{\Omega_r} c_d \dot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\Omega \, dt, \boldsymbol{\phi} \right\rangle = \int_{\Omega_r} c_d \boldsymbol{\phi}(T) \cdot \boldsymbol{\lambda}(T) \, d\Omega - \int_0^T \int_{\Omega_r} c_d \boldsymbol{\phi} \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}} \, d\Omega \, dt \quad (4.25)$$

und

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \int_0^T \int_{\Omega_r} \varrho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\Omega \, dt, \boldsymbol{\phi} \right\rangle &= \int_{\Omega_r} \varrho \dot{\boldsymbol{\phi}}(T) \cdot \boldsymbol{\lambda}(T) - \varrho \boldsymbol{\phi}(T) \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}}(T) \, d\Omega \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega_r} \varrho \boldsymbol{\phi} \cdot \ddot{\boldsymbol{\lambda}} \, d\Omega \, dt. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Durch die Verschiebungsunabhängigkeit der äußeren Lasten nach Voraussetzung 3.2.1 auf Seite 40 ist die Ableitung gleich null:

$$-\left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{f}(t) \cdot \boldsymbol{\lambda}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right\rangle = 0. \quad (4.27)$$

Anmerkung 4.3.1 (Kontakt). Bei der Behandlung von Kontaktphänomenen sind die Kontaktflächen in der Sensitivitätenberechnung generell zu berücksichtigen. In Giusti et al. 2015 und Lopes et al. 2017 wurde der Kontakt bei der Berechnung der Topologischen Ableitung im linear elastischen untersucht. Bei Lawry und Mauter 2018 wird in der Formoptimierung der Kontakt auch für nichtlineare Elastizität berücksichtigt. In der Arbeit von Fernandez et al. 2020 wird sogar die Sensitivität der Kontaktkraft ermittelt. Die Kontaktformulierung wird in jedem Fall mit einem eigenen Lagrange-Multiplikator zum erweiterten Funktional addiert.

Analog zur impliziten Ableitung des Gleichgewichts werden die einzelnen Terme der impliziten Ableitung des Funktionals mit partieller Integration (p.I.) im Zeitbereich umgeformt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r}\right)_I &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \mathbf{u}}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \dot{\mathbf{u}}}, \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \ddot{\mathbf{u}}}, \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}}{\partial r} \right\rangle \\
&= \int_0^T \int_{\Omega_r} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \, d\Omega \, dt + \int_0^T \int_{\Omega_r} \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r} \, d\Omega \, dt + \int_0^T \int_{\Omega_r} \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \cdot \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}}{\partial r} \, d\Omega \, dt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega_r} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \, d\Omega \, dt + \int_0^T \int_{\Omega_r} \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \, d\Omega \, dt + \int_0^T \int_{\Omega_r} \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \, d\Omega \, dt \\
&\stackrel{\text{p.I.}}{=} \int_0^T \int_{\Omega_r} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \, d\Omega \, dt + \int_{\Omega_r} \left[ \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right]_{t=0}^T \, d\Omega - \int_0^T \int_{\Omega_r} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \, d\Omega \, dt \\
&\quad + \int_{\Omega_r} \left[ \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right]_{t=0}^T \, d\Omega - \int_0^T \int_{\Omega_r} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \, d\Omega \, dt \\
&\stackrel{\text{p.I.}}{=} \int_0^T \int_{\Omega_r} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \, d\Omega \, dt + \int_{\Omega_r} \left[ \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right]_{t=0}^T \, d\Omega - \int_0^T \int_{\Omega_r} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \, d\Omega \, dt \\
&\quad + \int_{\Omega_r} \left[ \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right]_{t=0}^T \, d\Omega - \int_{\Omega_r} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right]_{t=0}^T \, d\Omega \\
&\quad + \int_0^T \int_{\Omega_r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \, d\Omega \, dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \int_{\Omega_r} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{u}} \cdot \phi \, d\Omega \, dt - \int_0^T \int_{\Omega_r} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \cdot \phi \, d\Omega \, dt + \int_0^T \int_{\Omega_r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \cdot \phi \, d\Omega \, dt \\
&\quad + \int_{\Omega_r} \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \Big|_{t=T} \cdot \phi(T) + \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \Big|_{t=T} \cdot \dot{\phi}(T) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \Big|_{t=T} \cdot \phi(T) \, d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega_r} \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \Big|_{t=0} \cdot \phi(0) - \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \Big|_{t=0} \cdot \dot{\phi}(0) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \Big|_{t=0} \cdot \phi(0) \, d\Omega. \quad (4.28)
\end{aligned}$$

Auch hier entfallen die Anfangswerte in der letzten Zeile mit der Voraussetzung, dass die Anfangswerte unabhängig von der Gebietsform sind:

$$\phi(0) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \Big|_{t=0} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \dot{\phi}(0) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{t=0} = \mathbf{0}.$$

Der infinitesimale Ausschnitt  $\lim_{r \downarrow 0} c_r(\mathbf{X}_0)$  ist eine Nullmenge bezüglich des Integrationsmaßes  $d\Omega$  (siehe Anhang B.4). Daraus folgt, dass jedes Integral auf dem infinitesimalen Ausschnitt gleich null ist:  $\lim_{r \downarrow 0} \int_{c_r(\mathbf{X}_0)} f \, d\Omega = 0$ . Da die Integration additiv ist ( $\int_{\Omega} = \int_{\Omega_r} + \int_{c_r(\mathbf{X}_0)}$ ), können die impliziten Ableitungen als Integral über dem ganzen Körper ohne Ausschnitt definiert werden.

Wir fassen nun die impliziten Ableitungen (4.22), (4.25), (4.26), (4.27) und (4.28) zusammen:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial \hat{\mathcal{J}}}{\partial r} \right)_I &= \underbrace{\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{u}} \cdot \phi \, d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \cdot \phi \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \cdot \phi \, d\Omega \, dt}_{=: \mathcal{P}} \quad (\text{PL}) \\
&\quad + \int_0^T \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \int_{\Omega} \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \nabla \boldsymbol{\lambda} \, d\Omega, \phi \right\rangle - \int_{\Omega} c_d \phi \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \varrho \phi \cdot \ddot{\boldsymbol{\lambda}} \, d\Omega \, dt \quad (\text{GG}) \\
&\quad + \int_{\Omega} \varrho \dot{\phi}(T) \cdot \boldsymbol{\lambda}(T) + \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \Big|_{t=T} \cdot \dot{\phi}(T) \, d\Omega \quad (\text{EW1}) \\
&\quad + \int_{\Omega} -\varrho \phi(T) \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}}(T) + c_d \phi(T) \cdot \boldsymbol{\lambda}(T) \, d\Omega \quad (\text{EW2}) \\
&\quad + \int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \Big|_{t=T} \cdot \phi(T) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \Big|_{t=T} \cdot \phi(T) \, d\Omega. \quad (\text{EW3})
\end{aligned}$$

Die implizite Ableitung soll für beliebige  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} = \phi$  verschwinden, was die adjungierte Zustandsgleichung in einer zeitlich integralen schwachen Form beschreibt. Die erste Zeile (PL) soll mit der zweiten Zeile (GG) im Gleichgewicht stehen. Mit den Termen der letzten Zeilen (EW1) bis (EW3) werden die Endwerte für die adjungierte Lösung  $\boldsymbol{\lambda}$  definiert.

Die Gesamtheit der impliziten Ableitungen des Funktionals

$$\mathcal{P} := \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\phi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \cdot \boldsymbol{\phi} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\Omega \, dt$$

wird als *Pseudolast* bezeichnet. Da in diesem Term keine Abhängigkeit von der adjungierten Lösung  $\boldsymbol{\lambda}$  steckt, kann er wie ein Lastvektor behandelt werden.

*Resultat 4.3.1* (Adjungiertes Gleichgewicht).

Die Adjungierte  $\boldsymbol{\lambda}$  ist die Lösung der integralen schwachen adjungierten Zustandsgleichung

$$\begin{aligned} \left\langle G^*(\boldsymbol{\lambda}(\Omega), \dot{\boldsymbol{\lambda}}(\Omega), \ddot{\boldsymbol{\lambda}}(\Omega), \Omega), \boldsymbol{\phi} \right\rangle = \\ \int_0^T \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \int_{\Omega} \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \nabla \boldsymbol{\lambda} \, d\Omega, \boldsymbol{\phi} \right\rangle - \int_{\Omega} c_d \boldsymbol{\phi} \cdot \dot{\boldsymbol{\lambda}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \varrho \boldsymbol{\phi} \cdot \ddot{\boldsymbol{\lambda}} \, d\Omega \, dt \\ + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\phi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \cdot \boldsymbol{\phi} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\Omega \, dt \quad (4.29) \end{aligned}$$

mit der Randbedingung  $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$  auf  $\Gamma_D$  und den Endwerten

$$\int_{\Omega} \left( \varrho \boldsymbol{\lambda}(T) + \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \Big|_{t=T} \right) \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}(T) \, d\Omega = 0, \quad (4.30)$$

$$\int_{\Omega} \left( -\varrho \dot{\boldsymbol{\lambda}}(T) + c_d \boldsymbol{\lambda}(T) + \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \Big|_{t=T} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \Big|_{t=T} \right) \cdot \boldsymbol{\phi}(T) \, d\Omega = 0, \quad (4.31)$$

auf dem ganzen Körper und für alle Testfunktionen  $\boldsymbol{\phi}$ .

*Anmerkung 4.3.2* (Adjungiertes Anfangsrandwertproblem). *Das Endwertproblem kann durch Substitution  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(s) = \boldsymbol{\lambda}(T - s)$  wieder in ein Anfangsrandwertproblem überführt werden:*

$$\begin{aligned} \left\langle G^*(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\Omega), \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}(\Omega), \ddot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}(\Omega), \Omega), \boldsymbol{\phi} \right\rangle \\ = \int_0^T \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \int_{\Omega} \mathbf{F} \mathbf{S} \Big|_{t=T-s} \cdot \nabla \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \, d\Omega, \boldsymbol{\phi} \right\rangle + \int_{\Omega} c_d \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\lambda}}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\phi} + \varrho \frac{\partial^2 \tilde{\boldsymbol{\lambda}}}{\partial t^2} \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\Omega \, ds \\ + \int_0^T \int_{\Omega} \left( \frac{\partial z}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \right) \Big|_{t=T-s} \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\Omega \, ds = 0, \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten

$$\int_{\Omega} \left( \varrho \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(0) + \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \Big|_{t=T} \right) \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}(T) \, d\Omega = 0,$$

$$\int_{\Omega} \left( -\varrho \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}(0) + c_d \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(0) - \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \Big|_{t=T} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \Big|_{t=T} \right) \cdot \boldsymbol{\phi}(T) \, d\Omega = 0.$$

Durch die Substitution werden die Grenzen vertauscht und das Integrationsmaß  $dt$  durch  $-ds$  ersetzt, durch Umkehr der Integration verschwindet das „–“ wieder. Die Substitution muss auch beim Zeitintegral des Funktionals durchgeführt werden. Dies wird in der Formel mit  $\Big|_{t=T-s}$  symbolisiert.

Für die Vergleichbarkeit mit dem Lösungsschema „erst diskretisieren – dann differenzieren“ wird bei der zeitlichen Diskretisierung im folgenden Abschnitt das Endwertproblem betrachtet.

Mit der Lösung  $\boldsymbol{\lambda}$  des Endwertproblems (4.29) kann nun die Topologische Ableitung vervollständigt werden. In (4.20) wurden die impliziten Ableitungen eliminiert. Es verbleiben die expliziten Ableitungen.

*Resultat 4.3.2 (Topologische Ableitung).*

Die explizite materielle Ableitung des erweiterten Funktionals  $\hat{\mathcal{J}}$  nach dem Dimensionierungsparameter  $r$  der Aussparung  $c_r(\mathbf{X}_0)$  ist

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{J}}}{\partial r} = \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r} \right)_E - \int_0^T \int_{\Gamma_r} \left( \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \nabla \boldsymbol{\lambda} - c_d \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{f}(t) \cdot \boldsymbol{\lambda} \right) d\Gamma dt. \quad (4.32)$$

Damit ist die Topologische Ableitung am Punkt  $\mathbf{X}_0$  gegeben

$$\mathcal{T}\mathcal{J}(\mathbf{X}_0) = \lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{d|c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr} \right)^{-1} \left( \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r} \right)_E - \int_0^T \int_{\Gamma_r} \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \nabla \boldsymbol{\lambda} - c_d \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\lambda} + \varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{f}(t) \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma dt \right). \quad (4.33)$$

Die explizite materielle Ableitung des Funktionals wird in Abschnitt 4.5 anhand von drei Funktionalen gezeigt.



*Schreibweise* (Indizierung in Abhängigkeit der Verschiebungslösung und der Adjungierten). Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  und der 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor sind in der allgemeinen Topologischen Ableitung (4.33) von der Verschiebungslösung  $\mathbf{u}$  abhängig. Dafür erhalten sie überall, wo Verwechslungsgefahr besteht, den linken Index  $u$  (hier für  ${}^u\mathbf{F}$  und  ${}^u\mathbf{S}$ ), um die Schreibweise kompakt zu halten. Ebenso wird auch für andere Größen in den folgenden Kapiteln der Index  $u$  verwendet, wenn diese speziell von der Verschiebungslösung des mechanischen Anfangsrandwertproblems abhängen.

Bei einer Abhängigkeit von der Adjungierten wird als linker oberer Index das Symbol der Adjungierten geschrieben  $\lambda$ .

Die einzelnen Summanden der Topologischen Ableitung werden später detailliert diskutiert und wieder aufgegriffen. Daher werden die folgenden Bezeichnungen vergeben:

$$\left(\frac{d|c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r}\right)_E \quad : \text{expliziter Ableitungsterm,} \quad (4.34)$$

$$-\left(\frac{d|c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr}\right)^{-1} \int_0^T \int_{\Gamma_r} {}^u\mathbf{F} {}^u\mathbf{S} \cdot \nabla \lambda \, d\Gamma \, dt \quad : \begin{array}{l} \text{Ableitung der gemischt} \\ \text{adjungierten Energie,} \end{array} \quad (4.35)$$

$$\left(\frac{d|c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr}\right)^{-1} \int_0^T \int_{\Gamma_r} c_d \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \lambda \, d\Gamma \, dt \quad : \begin{array}{l} \text{Ableitung des} \\ \text{Dämpfungsterms,} \end{array} \quad (4.36)$$

$$-\left(\frac{d|c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr}\right)^{-1} \int_0^T \int_{\Gamma_r} \varrho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \lambda \, d\Gamma \, dt \quad : \begin{array}{l} \text{Ableitung des} \\ \text{Trägheitsterms,} \end{array} \quad (4.37)$$

$$\left(\frac{d|c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr}\right)^{-1} \int_0^T \int_{\Gamma_r} \mathbf{f}(t) \cdot \lambda \, d\Gamma \, dt \quad : \begin{array}{l} \text{Ableitung der} \\ \text{Volumenkräfte.} \end{array} \quad (4.38)$$

Physikalisch stellen die Terme (4.34) bis (4.38) keine Energien dar, die Bezeichnungen sollen nur die Herkunft veranschaulichen. Die Dimension hängt vom Funktional ab, mit dem die adjungierte Lösung  $\lambda$  entwickelt wurde. Wie die Topologische Ableitung haben auch sie die Dimension  $\dim(\mathcal{J}) \cdot \text{L}^{-d}$ .

Für die Auswertung der Sensitivitäten ist sowohl die Zustandslösung  $\mathbf{u}$  als auch die Adjungierte  $\lambda$  notwendig. Obwohl die Sensitivität schon stark vereinfacht wurde, ist sie im Allgemeinen trotzdem nicht analytisch lösbar. Zum einen sind der Deformationsgradient  ${}^u\mathbf{F}$  und der Spannungstensor  ${}^u\mathbf{S}$  auf dem Aussparungsrand  $\Gamma_r$  nicht ohne weiteres abzuschätzen, zum anderen liegt keine Information über die

Adjungierte selbst und deren Gradient  $\nabla \boldsymbol{\lambda}$  auf dem Aussparungsrand vor. Auf eine numerische Lösung der Randintegrale wird in Kapitel 5 eingegangen.

*Anmerkung 4.3.3* (Adjungierte Formulierung linear elastisch). *Die adjungierte Zustandsgleichung kann ohne zeitliche Integration für den linear elastischen Fall angegeben werden*

$$\left\langle G^{*\text{lin}}(\boldsymbol{\lambda}^{\text{lin}}(\Omega), \Omega), \boldsymbol{\phi} \right\rangle = \int_{\Omega_r} \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}^{\text{lin}})), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right\rangle d\Omega + \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r} \right)_I = 0. \quad (4.39)$$

Weitere Vereinfachungen werden in Kapitel 5 angegeben. Für die lineare Topologische Ableitung entfällt die Ableitung des Massenträgheitsterms

$$\mathcal{T}\mathcal{J}^{\text{lin}} = \lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{d \overline{c_r(\mathbf{X}_0)}}{dr} \right)^{-1} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r} \right)_E - \int_{\Gamma_r} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}^{\text{lin}}) - \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\lambda}^{\text{lin}} d\Gamma \right]. \quad (4.40)$$

Die Dimension der linearen Adjungierten ist  $\dim(\boldsymbol{\lambda}^{\text{lin}}) = \dim(\mathcal{J}) \mathbb{T}^2 \cdot \mathbb{M}^{-1} \mathbb{L}^{-1}$ .

### 4.3.2 Diskretisierung mit impliziter Zeitintegration

Die Lösung der adjungierten Zustandsgleichung (4.29) erfolgt wie die Lösung des Anfangsrandwertproblems mit impliziter Zeitintegration. Dazu müssen zunächst die Pseudolasten berechnet werden. Anschließend wird das Newmark-Verfahren für die Rückwärtslösung umgeformt und die Lösungssequenz vorgestellt.

*Schreibweise* (Zeitliche Diskretisierung). Die zeitliche Diskretisierung einer Größe oder eines Funktionals wird mit eckigen Klammern und dem oberen Index  $[ \ ]^{(t)}$  geschrieben.

*Schreibweise* (Pseudolasten „erst differenzieren – dann diskretisieren“). Bei der zeitlichen Diskretisierung der Pseudolasten

$$[\mathcal{P}]^{(t)} = \sum_{k=0}^m P^{(k)} \quad (4.41)$$

sind zeitliche Gewichtungsfaktoren  $w^{(k)}$ <sup>2</sup> bereits in die einzelnen Summanden integriert.

<sup>2</sup>beispielsweise aus  $w^{(0)} = \frac{1}{2} \Delta t^{(1)}$ ,  $w^{(k)} = \frac{1}{2} (\Delta t^{(k)} + \Delta t^{(k+1)})$  für  $0 < k < m$  und  $w^{(m)} = \frac{1}{2} \Delta t^{(m)}$  für die Trapezregel bei variabler Zeitschrittweite

Die zusätzliche räumliche Diskretisierung der Pseudolasten ist vom Funktional abhängig und wird hier daher nur allgemein als  $[P^{(k)}]_{(h)}$  geführt.

$$\left[ [\mathcal{P}]^{(t)} \right]_{(h)} = \sum_{k=0}^m w^{(k)} \underbrace{\left[ \int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial \mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\phi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \cdot \boldsymbol{\phi} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\Omega \right]}_{=:[P^{(k)}]_{(h)}^T \boldsymbol{\phi}^{(k)}} \bigg|_{(h)} \bigg|_{t=t^{(k)}} \quad (4.42)$$

Die räumliche Diskretisierung der Adjungierten  $\boldsymbol{\lambda}$  erfolgt mit den gleichen Ansatzfunktionen wie die Diskretisierung der Testfunktionen (3.58). Die Bezeichnung und Assemblierung zum Vektor der Adjungierten aller Freiheitsgrade in Verbindung mit den Systemmatrizen orientiert sich an der Schreibweise der Zustandslösung  $\mathbf{u}$  in Abschnitt 3.4.4 auf Seite 63.

Die räumliche Diskretisierung der weiteren Terme des adjungierten Gleichgewichts 4.29 liefert die aus Kapitel 3.4.4 bekannten Matrizenformulierungen für die Tangentensteifigkeit

$$\left[ \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \int_{\Omega} \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \nabla \boldsymbol{\lambda} \, d\Omega, \boldsymbol{\phi} \right\rangle \right]_{(h)} \bigg|_{t=t^{(k)}} \approx \boldsymbol{\lambda}^{(k)T} \mathbf{K}_{\mathbf{T}}^{(k)} \boldsymbol{\phi}^{(k)}, \quad (4.43)$$

die Dämpfung

$$\left[ \int_{\Omega} c_d \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\Omega \right]_{(h)} \bigg|_{t=t^{(k)}} \approx \dot{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)T} \mathbf{C} \boldsymbol{\phi}^{(k)}, \quad (4.44)$$

und für die Massenträgheit

$$\left[ \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\lambda}}{\partial t^2} \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\Omega \right]_{(h)} \bigg|_{t=t^{(k)}} \approx \ddot{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)T} \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}^{(k)}. \quad (4.45)$$

Die Diskretisierungen (4.42) bis (4.45) liefern zusammen die räumliche und zeitliche Diskretisierung der adjungierten Zustandsgleichung (4.29):

$$\sum_{k=0}^m \left( w^{(k)} \left( \ddot{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)T} \mathbf{M} - \dot{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)T} \mathbf{C} + \boldsymbol{\lambda}^{(k)T} \mathbf{K}_{\mathbf{T}}^{(k)} \right) + \left( [P^{(k)}]_{(h)} \right)^T \right) \boldsymbol{\phi}^{(k)} = 0.$$

Diese Gleichung ist insbesondere dann erfüllt, wenn jeder einzelne Summand gleich dem Nullvektor ist:

$$\mathbf{g}^* \left( \boldsymbol{\lambda}^{(k)} \right) := \left( [P^{(k)}]_{(h)} \right)^T + w^{(k)} \left( \ddot{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)T} \mathbf{M} - \dot{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)T} \mathbf{C} + \boldsymbol{\lambda}^{(k)T} \mathbf{K}_{\mathbf{T}}^{(k)} \right) = \mathbf{0}. \quad (4.46)$$

Die Entwicklung einer Lösungsstrategie wird wie die Lösung des Anfangsrandwertproblems in Abschnitt 3.5 motiviert: Wir nehmen an, dass für die Zeitpunkte  $t^{(i)}$  mit  $i = m$  bis einschließlich  $k$  die Adjungierte  $\lambda^{(i)}$  und deren zeitliche Ableitungen  $\dot{\lambda}^{(i)}$  und  $\ddot{\lambda}^{(i)}$  bereits ermittelt wurden. Im Lösungsprozess soll dann die zeitlich vorausliegende Gleichgewichtslage  $\mathbf{g}^*(\lambda^{(k-1)})$  berechnet werden, die der Zeit  $t^{(k)} - \Delta t^{(k)}$  entspricht. Dabei soll das gleiche Zeitintegrationsverfahren verwendet werden, das auch für die Lösung des Anfangsrandwertproblems verwendet wurde.

Für die Anwendung des Newmark-Verfahrens der Zeitintegration wird die Approximation für die adjungierte Beschleunigung und Geschwindigkeit zunächst aus (3.73) und (3.74) übernommen

$$\begin{aligned}\ddot{\lambda}^{(k)} &= \alpha_1 \left( \lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)} \right) - \alpha_2 \dot{\lambda}^{(k-1)} - \alpha_3 \ddot{\lambda}^{(k-1)}, \\ \dot{\lambda}^{(k)} &= \alpha_4 \left( \lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)} \right) + \alpha_5 \dot{\lambda}^{(k-1)} + \alpha_6 \ddot{\lambda}^{(k-1)}\end{aligned}$$

und für die Lösung des Endwertproblems nach  $\ddot{\lambda}^{(k-1)}$  und  $\dot{\lambda}^{(k-1)}$  aufgelöst. Daraus ergibt sich die Rückwärtsapproximation der adjungierten Beschleunigung und Verschiebung

$$\ddot{\lambda}^{(k-1)} = \alpha_1^* \left( \lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)} \right) - \alpha_2^* \dot{\lambda}^{(k)} - \alpha_3^* \ddot{\lambda}^{(k)}, \quad (4.47)$$

$$\dot{\lambda}^{(k-1)} = \alpha_4^* \left( \lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)} \right) + \alpha_5^* \dot{\lambda}^{(k)} + \alpha_6^* \ddot{\lambda}^{(k)}, \quad (4.48)$$

mit den Konstanten

$$\begin{aligned}\alpha_1^* &= -\frac{2}{(\Delta t^{(k)})^2(1+2\beta-2\gamma)}, & \alpha_2^* &= -\frac{2}{\Delta t^{(k)}(1+2\beta-2\gamma)}, \\ \alpha_3^* &= -\frac{2(\beta-\gamma)}{1+2\beta-2\gamma}, & \alpha_4^* &= -\frac{2(\gamma-1)}{(\Delta t^{(k)})(1+2\beta-2\gamma)}, \\ \alpha_5^* &= -\frac{1-2\beta}{1+2\beta-2\gamma}, & \alpha_6^* &= -\frac{(\Delta t^{(k)})(2\beta-\gamma)}{1+2\beta-2\gamma}.\end{aligned}$$

Die Konstanten  $\alpha_1^*$ ,  $\alpha_2^*$ ,  $\alpha_4^*$  und  $\alpha_6^*$  sind wie schon bei der Approximation der Geschwindigkeit und Beschleunigung abhängig von der Größe des Zeitschritts.

Eingesetzt in das adjungierte Gleichgewicht (4.46) zum Zeitpunkt  $t^{(k-1)}$  kann aus

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^* \left( \boldsymbol{\lambda}^{(k-1)} \right) &= w^{(k-1)} \left( \alpha_1^* \left( \boldsymbol{\lambda}^{(k)} - \boldsymbol{\lambda}^{(k-1)} \right) - \alpha_2^* \dot{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)} - \alpha_3^* \ddot{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)} \right)^T \mathbf{M} \\ &\quad - w^{(k-1)} \left( \alpha_4^* \left( \boldsymbol{\lambda}^{(k)} - \boldsymbol{\lambda}^{(k-1)} \right) + \alpha_5^* \dot{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)} + \alpha_6^* \ddot{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)} \right)^T \mathbf{C} \\ &\quad + w^{(k-1)} \boldsymbol{\lambda}^{(k-1)} \mathbf{K}_{\mathbf{T}}^{(k-1)} + \left[ P^{(k-1)} \right]_{(h)} = \mathbf{0} \quad (4.49) \end{aligned}$$

die adjungierte Verschiebung  $\boldsymbol{\lambda}^{(k-1)}$  bei bekannten adjungierten Verschiebungen  $\boldsymbol{\lambda}^{(k)}$ , Geschwindigkeiten  $\dot{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}$  und Beschleunigungen  $\ddot{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}$  berechnet werden.

Da die diskrete adjungierte Zustandsgleichung (4.49) zu jedem Zeitpunkt  $k$  mit einer linearen Steifigkeit  $\mathbf{K}_{\mathbf{T}}^{(k)}$  ausgestattet ist, kann die Lösung des Endwertproblems ohne das Newton-Verfahren durchgeführt werden. Außerdem sind die Systemmatrizen symmetrisch für alle  $k = 0, \dots, m$ :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^T \quad \text{und} \quad \mathbf{K}_{\mathbf{T}}^{(k)} = \mathbf{K}_{\mathbf{T}}^{(k)T}.$$

Das adjungierte Gleichgewicht (4.49) nach  $\boldsymbol{\lambda}^{(k-1)}$  aufgelöst ergibt das adjungierte Lösungsschema:

*Resultat 4.3.3* (Adjungiertes Lösungsschema nach „erst differenzieren – dann diskretisieren“).

Die adjungierte Lösung  $\boldsymbol{\lambda}^{(k-1)}$  wird mit

$$\begin{aligned} w^{(k-1)} \left( -\alpha_1^* \mathbf{M} + \alpha_4^* \mathbf{C} + \mathbf{K}_{\mathbf{T}}^{(k-1)} \right) \boldsymbol{\lambda}^{(k-1)} &= - \left[ P^{(k-1)} \right]_{(h)} \\ &\quad - \left( \alpha_1^* \mathbf{M} - \alpha_4^* \mathbf{C} \right) \boldsymbol{\lambda}^{(k)} \\ &\quad - \left( -\alpha_2^* \mathbf{M} - \alpha_5^* \mathbf{C} \right) \dot{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)} \\ &\quad - \left( -\alpha_3^* \mathbf{M} - \alpha_6^* \mathbf{C} \right) \ddot{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)} \quad (4.50) \end{aligned}$$

schrittweise aus den schon bekannten adjungierten Lösungen, Geschwindigkeiten und Verschiebungen  $\boldsymbol{\lambda}^{(k)}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}$  und  $\ddot{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}$  berechnet.

Durch die analytische Herleitung sind die Endwerte aus (4.30) und (4.31) in der diskretisierten Form vorgegeben

$$\boldsymbol{\lambda}^{(m)} = -\mathbf{M}^{-1} \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \Big|_{t=T} d\Omega \right]_{(h)}, \quad (4.51)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^{(m)} = \mathbf{M}^{-1} \left( \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda}^{(m)} + \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \ddot{\mathbf{u}}} \Big|_{t=T} d\Omega \right]_{(h)} \right). \quad (4.52)$$

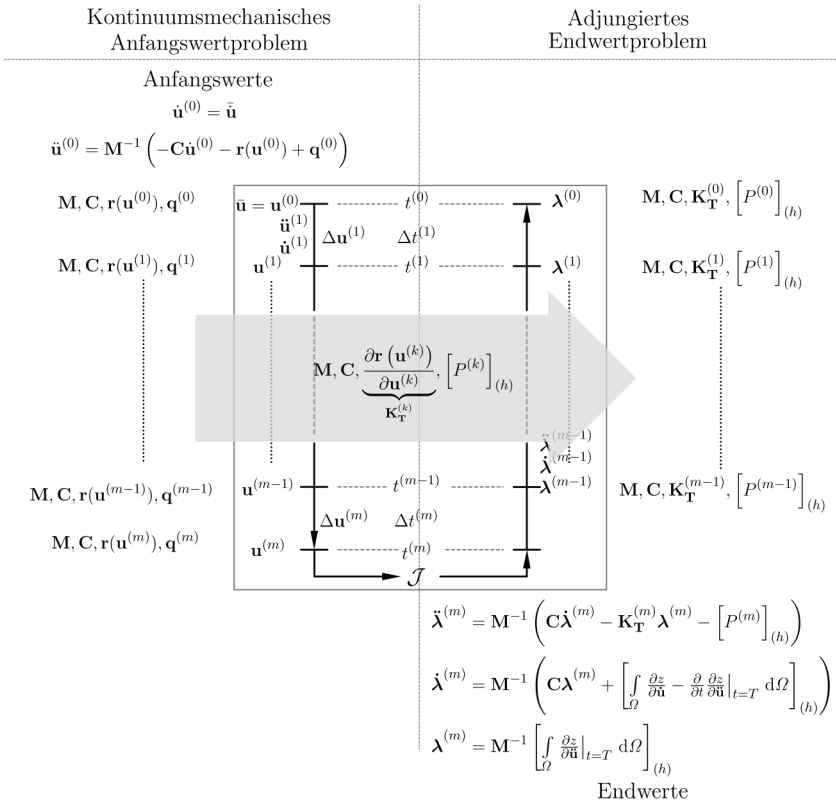
Die Endwerte für die adjungierten Beschleunigungen  $\ddot{\boldsymbol{\lambda}}^{(m)}$  werden mit  $\mathbf{g}^*(\boldsymbol{\lambda}^{(m)})$  berechnet

$$\ddot{\boldsymbol{\lambda}}^{(m)} = \mathbf{M}^{-1} \left( \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\lambda}}^{(m)} - \mathbf{K}_{\mathbf{T}}^{(m)} \boldsymbol{\lambda}^{(m)} - \left[ P^{(m)} \right]_{(h)} \right). \quad (4.53)$$

*Anmerkung 4.3.4 (Adjungierte Geschwindigkeit und adjungierte Beschleunigung). Es ist allgemein verständlich, hier über die adjungierte Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung zu sprechen, obwohl diese in Abhängigkeit vom Funktional  $\mathcal{J}$  oft keine direkte physikalische Interpretation haben.*

Die Abbildung 4.5 verdeutlicht schematisch das Vorgehen zur Berechnung der Zustandslösung  $\mathbf{u}$  und der adjungierten Lösung  $\boldsymbol{\lambda}$ . Auf der linken Seite wird das Anfangsrandwertproblem der Kontinuumsmechanik mit dem Newmark-Verfahren und integriertem Newton-Verfahren iterativ gelöst. Die Massenmatrix  $\mathbf{M}$ , die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$  und die tangentialen Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_{\mathbf{T}}^{(k)}$  zu jedem Zeitpunkt müssen entweder gespeichert oder bei der Rückwärtslösung aus den zeitlichen Verläufen der Spannungen und Dehnungen neu aufgestellt werden. Nach Abschluss der Lösung des Anfangsrandwertproblems werden die Ableitungen des Funktionals nach den Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gebildet. Mit den definierten Endwerten beginnt die Lösung der adjungierten Zustandsgleichung. In jedem Schritt muss ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Nach der Berechnung der Adjungierten zum Zeitpunkt  $t^{(k)}$  werden die adjungierte Geschwindigkeit und die adjungierte Beschleunigung berechnet, bis der Anfangszeitpunkt erreicht wird.

*Anmerkung 4.3.5 (Parallele Lösung für mehrere Funktionale). Die Linearität der Adjungierten macht die gleichzeitige Lösung des Endwertproblems für mehrere Funktionale möglich, wenn sowohl die Pseudolastvektoren als auch die adjungierten Lösungsvektoren nebeneinander gestapelt werden.*



**Abbildung 4.5:** Adjungiertes Ablaufdiagramm „erst differenzieren – dann diskretisieren“, links: Vorwärtslösung des Anfangsrandwertproblems, rechts: Rückwärtslösung des adjungierten Endwertproblems

*Anmerkung 4.3.6 (Effektive Steifigkeitsmatrix in der Rückwärtsrechnung). Mit den Newmark-Konstanten  $\beta = 0.25$  und  $\gamma = 0.5$  sind die adjungierten Konstanten  $\alpha_1^*$  und  $\alpha_4^*$  gleich denen der Zustandslösung:*

$$\alpha_1 = -\alpha_1^* = \frac{4}{(\Delta t^{(k+1)})^2} \quad \text{und} \quad \alpha_4 = \alpha_4^* = \frac{2}{\Delta t^{(k+1)}}. \quad (4.54)$$

*Damit entspricht die linke Seite des adjungierten Lösungsschemas (4.50) der effektiven Steifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{K}}^{(k)}$  aus (3.82). Mit der Speicherung der invertierten*

*effektiven Steifigkeitsmatrix aus der Lösung des Anfangsrandwertproblems, kann die Rückwärtsrechnung beschleunigt werden.*

Das erweiterte Funktional wurde in diesem Abschnitt auf Basis der kontinuierlichen Gleichgewichtsformulierung erweitert und materiell differenziert. Das resultierende Endwertproblem kann mit der impliziten Zeitintegration gelöst werden. Die ausdrückliche Hervorhebung der Reihenfolge „erst differenzieren – dann diskretisieren“ ist bezüglich der zeitlichen Integration zu verstehen.

## 4.4 Erst diskretisieren – dann differenzieren

Im Gegensatz zum Vorgehen im vorangegangenen Abschnitt verfolgen wir in diesem Abschnitt den Entwicklungsansatz für die Adjungierte, der bei den nichtlinearen Sensitivitätenberechnungen mit der Dichtemethode, die im Stand der Forschung in Abschnitt 2.2 vorgestellt wurden, verwendet wird.

Zusätzlich zur zeitlichen Diskretisierung des erweiterten Funktionals  $\hat{\mathcal{J}}$  aus (4.14) werden die Verschiebungs- und Geschwindigkeitsapproximationen der Zeitintegration (3.71) und (3.72) dem erweiterten Funktional zugeschrieben. Da zunächst eine zeitliche Diskretisierung und anschließend die Differenziation bezüglich der Entwurfsvariablen erfolgt, wird dieses adjungierte Lösungsschema „erst diskretisieren – dann differenzieren“ genannt. Die Motivation hinter diesem Vorgehen ist, die Adjungierte ohne die partielle Integration im Zeitbereich zu ermitteln. Dies ist aber nur möglich, wenn der Zusammenhang zwischen den Zeitpunkten durch die Verschiebungs- und Geschwindigkeitsapproximationen hergestellt wird. Ohne diese würde kein Lösungsschema entstehen.

Für die Anwendung der adjungierten Methode erweitern wir das zeitlich diskretisierte Funktional  $[\hat{\mathcal{J}}]^{(t)}$  sowohl mit dem integral bezüglich der Zeit definierten, aber ebenfalls mit den Gewichtungsfaktoren  $w^{(k)}$  zeitlich diskretisierten mechanischen Gleichgewicht auf dem Gebiet mit der Aussparung  $\Omega_r$ , als auch mit den Newmark-



Approximationen (3.71) und (3.72) mit eigenen Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_{\mathbf{v}}^{(k)}$  und  $\lambda_{\mathbf{u}}^{(k)}$ :

$$\begin{aligned}
[\hat{\mathcal{J}}]^{(t)} = & [\mathcal{J}]^{(t)} + \sum_{k=0}^m w^{(k)} \left( \int_{\Omega_r} ({}^u \mathbf{F}^{(k)} u \mathbf{S}^{(k)} \cdot \text{Grad } \lambda^{(k)} + c_d \dot{\mathbf{u}}^{(k)} \cdot \lambda^{(k)} \, d\Omega \right. \\
& \left. + \int_{\Omega_r} \varrho \ddot{\mathbf{u}}^{(k)} \cdot \lambda^{(k)} - \mathbf{f}(t^{(k)}) \cdot \lambda^{(k)} \, d\Omega \right. \\
& \left. - \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\tau}(t^{(k)}) \cdot \lambda^{(k)} \, d\Gamma \right) \\
& + \sum_{k=1}^m \lambda_{\mathbf{u}}^{(k)T} \left( \mathbf{u}^{(k-1)} + (\Delta t^{(k)}) \dot{\mathbf{u}}^{(k-1)} \right. \\
& \left. + \frac{(\Delta t^{(k)})^2}{2} \left( (1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{u}}^{(k-1)} + 2\beta \ddot{\mathbf{u}}^{(k)} \right) - \mathbf{u}^{(k)} \right) \\
& + \sum_{k=1}^m \lambda_{\mathbf{v}}^{(k)T} \left( \dot{\mathbf{u}}^{(k-1)} + (\Delta t^{(k)}) \left( (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}^{(k-1)} + \gamma \ddot{\mathbf{u}}^{(k)} \right) - \dot{\mathbf{u}}^{(k)} \right). \quad (4.55)
\end{aligned}$$

Die materielle Ableitung des erweiterten zeitlich diskretisierten Funktionals  $[\hat{\mathcal{J}}]^{(t)}$  liefert wieder explizite und implizite Ableitungsteile.

*Resultat 4.4.1* (Explizite materielle Ableitung „erst diskretisieren – dann differenzieren“).

Für die explizite materielle Ableitung verbleiben wie im vorherigen Abschnitt die Randintegrale, die nicht weiter aufgelöst werden können:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial [\hat{\mathcal{J}}]^{(t)}}{\partial r} \right)_E &= \left( \frac{\partial [\mathcal{J}]^{(t)}}{\partial r} \right)_E \\
& - \sum_{k=0}^m w^{(k)} \int_{\Gamma_r} ({}^u \mathbf{F}^{(k)} u \mathbf{S}^{(k)} \cdot \text{Grad } \lambda^{(k)} \\
& + c_d \dot{\mathbf{u}}^{(k)} \cdot \lambda^{(k)} + \varrho \ddot{\mathbf{u}}^{(k)} \cdot \lambda^{(k)} - \mathbf{f}^{(k)} \cdot \lambda^{(k)} \, d\Gamma. \quad (4.56)
\end{aligned}$$

Die explizite materielle Ableitung in diesem adjungierten Lösungsschema liefert demnach die zeitliche Diskretisierung der expliziten materiellen Ableitung des adjungierten Lösungsschemas „erst differenzieren – dann diskretisieren“ aus (4.32).

Die impliziten materiellen Ableitungen des erweiterten diskretisierten Funktionals in (4.55) werden zunächst einzeln räumlich diskretisiert. Der infinitesimale Ausschnitt  $\lim_{r \downarrow 0} c_r(\mathbf{X}_0)$  ist eine Nullmenge, so dass die impliziten Ableitungen auf

dem gesamten Gebiet definiert werden können. Die räumlichen Diskretisierungen der einzelnen Terme lauten:

$$\begin{aligned} \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial r} {}^u \mathbf{F}^{(k)} {}^u \mathbf{S}^{(k)} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\lambda}^{(k)} \, d\Omega \right]_{(h)} &= \left[ \int_{\Omega} \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^{(k)}} {}^u \mathbf{F}^{(k)} {}^u \mathbf{S}^{(k)} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \frac{\partial \mathbf{u}^{(k)}}{\partial r} \right\rangle d\Omega \right]_{(h)} \\ &\approx \boldsymbol{\lambda}^{(k)T} \mathbf{K}_{\mathbf{T}}^{(k)} \frac{\partial \mathbf{u}^{(k)}}{\partial r}, \\ \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial r} c_d \dot{\mathbf{u}}^{(k)} \cdot \boldsymbol{\lambda}^{(k)} \, d\Omega \right]_{(h)} &= \left[ \int_{\Omega} \left\langle \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(k)}} c_d \dot{\mathbf{u}}^{(k)} \cdot \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(k)}}{\partial r} \right\rangle d\Omega \right]_{(h)} \\ &\approx \boldsymbol{\lambda}^{(k)T} \mathbf{C} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(k)}}{\partial r}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial r} \rho \ddot{\mathbf{u}}^{(k)} \cdot \boldsymbol{\lambda}^{(k)} \, d\Omega \right]_{(h)} &= \left[ \int_{\Omega} \left\langle \frac{\partial}{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(k)}} \rho \ddot{\mathbf{u}}^{(k)} \cdot \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(k)}}{\partial r} \right\rangle d\Omega \right]_{(h)} \\ &\approx \boldsymbol{\lambda}^{(k)T} \mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(k)}}{\partial r}. \end{aligned}$$

Die äußeren Kräfte  $\mathbf{q}$  sind nach Voraussetzung 3.2.1 auf Seite 40 unabhängig von der Verschiebung und entfallen daher bei der impliziten Ableitung:

$$\left[ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\lambda}^{(k)} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial}{\partial r} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\lambda}^{(k)} \, d\Gamma \right]_{(h)} \approx \mathbf{0}.$$

*Schreibweise* (Räumlich und zeitlich diskretisiertes Funktional). Die Reihenfolge von Diskretisierung und Differenziation ist vertauschbar, so dass der Übersichtlichkeit halber die verkürzende Schreibweise des zeitlich wie räumlich diskretisierten Funktionals  $\mathcal{J}$  und des erweiterten Funktionals  $\hat{\mathcal{J}}$

$$j := \left[ [\mathcal{J}]^{(t)} \right]_{(h)} \quad \text{und} \quad \hat{j} := \left[ [\hat{\mathcal{J}}]^{(t)} \right]_{(h)}$$

gewählt wird.

Die implizite Ableitung des diskreten Funktionals lautet mit der Kettenregel

$$\left(\frac{\partial \hat{j}}{\partial r}\right)_I = \sum_{k=0}^m \frac{\partial j}{\partial \mathbf{u}^{(k)}} \frac{\partial \mathbf{u}^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial j}{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(k)}} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial j}{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(k)}} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(k)}}{\partial r}. \quad (4.57)$$

Wir spalten die Anfangswerte direkt von den jeweiligen Summen der impliziten Ableitungsterme ab. Damit kann die räumliche Diskretisierung der impliziten materiellen Ableitung des erweiterten Funktionals  $[\hat{\mathcal{J}}]^{(t)}$  aus (4.55) angegeben werden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \hat{j}}{\partial r}\right)_I &= \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial j}{\partial \mathbf{u}^{(k)}} \frac{\partial \mathbf{u}^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial j}{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(k)}} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial j}{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(k)}} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(k)}}{\partial r} \right) + \frac{\partial j}{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(0)}} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(0)}}{\partial r} \\ &\quad + \underbrace{\frac{\partial j}{\partial \mathbf{u}^{(0)}} \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial r}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial j}{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(0)}} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(0)}}{\partial r}}_{=0} \\ &\quad + \sum_{k=1}^m w^{(k)} \boldsymbol{\lambda}^{(k)T} \left( \mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(k)}}{\partial r} + \mathbf{C} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(k)}}{\partial r} + \mathbf{K}_{\mathbf{T}}^{(k)} \frac{\partial \mathbf{u}^{(k)}}{\partial r} \right) + w^{(0)} \boldsymbol{\lambda}^{(0)T} \mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(0)}}{\partial r} \\ &\quad + \underbrace{w^{(0)} \boldsymbol{\lambda}^{(0)T} \mathbf{C} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(0)}}{\partial r}}_{=0} + \underbrace{w^{(0)} \boldsymbol{\lambda}^{(0)T} \mathbf{K}_{\mathbf{T}}^{(0)} \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial r}}_{=0} \\ &\quad + \sum_{k=2}^m \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}^{(k)T} \left( \frac{\partial \mathbf{u}^{(k-1)}}{\partial r} + \Delta t^{(k)} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(k-1)}}{\partial r} + \frac{1-2\beta}{2} (\Delta t^{(k)})^2 \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(k-1)}}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \beta (\Delta t^{(k)})^2 \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(k)}}{\partial r} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(k)}}{\partial r} \right) \\ &\quad + \frac{1-2\beta}{2} (\Delta t^{(1)})^2 \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}^{(1)T} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(0)}}{\partial r} + \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}^{(1)T} \beta (\Delta t^{(1)})^2 \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(1)}}{\partial r} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}^{(1)T} \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial r} \\ &\quad + \underbrace{\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}^{(1)T} \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial r}}_{=0} + \underbrace{\Delta t^{(1)} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}^{(1)T} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(0)}}{\partial r}}_{=0} \\ &\quad + \sum_{k=2}^m \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}^{(k)T} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(k-1)}}{\partial r} + (1-\gamma) \Delta t^{(k)} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(k-1)}}{\partial r} + \gamma \Delta t^{(k)} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(k)}}{\partial r} - \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(k)}}{\partial r} \right) \\ &\quad + (1-\gamma) \Delta t^{(1)} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}^{(1)T} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(0)}}{\partial r} + \gamma \Delta t^{(1)} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}^{(1)T} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(1)}}{\partial r} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}^{(1)T} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(1)}}{\partial r} \\ &\quad + \underbrace{\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}^{(1)T} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(0)}}{\partial r}}_{=0}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Da die Anfangswerte der Verschiebung und der Geschwindigkeit nach Voraussetzung 3.2.2 auf Seite 40 nicht vom Gebietsparameter  $r$  abhängig sind, werden die entsprechend unterklammerten Ausdrücke gleich null. Das Ziel der adjungierten

Methode ist die Eliminierung der impliziten Ableitungen. Dazu werden impliziten Summanden nach den Ableitungen  $\frac{\partial \mathbf{u}^{(k)}}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(k)}}{\partial r}$  und  $\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(k)}}{\partial r}$  gruppiert. Die Summanden des Zeitpunkts  $t^{(m)}$  stehen jeweils separat. Für eine bessere Übersicht werden die einzelnen Summanden transponiert:

$$\left(\frac{\partial \hat{j}}{\partial r}\right)_I = \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(k)}}{\partial r}\right)^T \left( \left(\frac{\partial j}{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(k)}}\right)^T + w^{(k)} \mathbf{M} \boldsymbol{\lambda}^{(k)} + \frac{1-2\beta}{2} (\Delta t^{(k+1)})^2 \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}^{(k+1)} \right. \\ \left. + \beta (\Delta t^{(k)})^2 \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}^{(k)} + (1-\gamma) \Delta t^{(k+1)} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}^{(k+1)} + \Delta t^{(k)} \gamma \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}^{(k)} \right) \quad (\text{I})$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(k)}}{\partial r}\right)^T \left( \left(\frac{\partial j}{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(k)}}\right)^T + w^{(k)} \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda}^{(k)} + \Delta t^{(k+1)} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}^{(k+1)} \right. \\ \left. + \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}^{(k+1)} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}^{(k)} \right) \quad (\text{II})$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^{(k)}}{\partial r}\right)^T \left( \left(\frac{\partial j}{\partial \mathbf{u}^{(k)}}\right)^T + w^{(k)} \mathbf{K}_{\mathbf{T}} \boldsymbol{\lambda}^{(k)} + \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}^{(k+1)} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}^{(k)} \right) \quad (\text{III})$$

$$+ \left(\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(m)}}{\partial r}\right)^T \left( \left(\frac{\partial j}{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(m)}}\right)^T + w^{(m)} \mathbf{M} \boldsymbol{\lambda}^{(m)} \right. \\ \left. + \beta (\Delta t^{(m)})^2 \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}^{(m)} + \gamma \Delta t^{(m)} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}^{(m)} \right) \quad (\text{IV})$$

$$+ \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(m)}}{\partial r}\right)^T \left( \left(\frac{\partial j}{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(m)}}\right)^T + w^{(m)} \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda}^{(m)} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}^{(m)} \right) \quad (\text{V})$$

$$+ \left(\frac{\partial \mathbf{u}^{(m)}}{\partial r}\right)^T \left( \left(\frac{\partial j}{\partial \mathbf{u}^{(m)}}\right)^T + w^{(m)} \mathbf{K}_{\mathbf{T}} \boldsymbol{\lambda}^{(m)} - \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}^{(m)} \right) \quad (\text{VI})$$

$$+ \left(\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(0)}}{\partial r}\right)^T \left( \left(\frac{\partial j}{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(0)}}\right)^T + w^{(0)} \mathbf{M} \boldsymbol{\lambda}^{(0)} + \frac{1-2\beta}{2} (\Delta t^{(1)})^2 \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}^{(1)} \right. \\ \left. + (1-\gamma) \Delta t^{(1)} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}^{(1)} \right). \quad (\text{VII})$$

In den abgespaltenen  $(m)$ -Termen (IV) bis (VI) stehen nur Summanden des letzten Zeitpunkts. Nullsetzen der Klammern (V) und (VI) und Einsetzen in (IV) liefert ein Gleichungssystem für den Endwert der Adjungierten  $\boldsymbol{\lambda}^{(m)}$ . Mit diesem können die Lagrange-Multiplikatoren der Geschwindigkeit  $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}^{(m)}$  und der Verschiebung  $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}^{(m)}$  in (V) und (VI) berechnet werden.

Für die Zeitpunkte  $t^{(k)}$  mit  $k = m-1, \dots, 1$  wird mit dem analogen Vorgehen aus (II) und (III) durch Nullsetzen und Einsetzen in (I) die Adjungierte  $\lambda^{(k)}$  berechnet und daraus wiederum die Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_{\mathbf{v}}^{(k)}$  und  $\lambda_{\mathbf{u}}^{(k)}$  gewonnen.

Der verbleibende Anfangswert für die Adjungierte  $\lambda^{(0)}$  wird schließlich durch Elimination des letzten Summanden (VII) berechnet.

Das Vorgehen lässt sich zu folgendem Lösungsschema kompakt zusammenfassen:

*Resultat 4.4.2* (Adjungiertes Lösungsschema nach „erst diskretisieren – dann differenzieren“).

Die adjungierte Lösung  $\lambda^{(k)}$  zum Funktional  $j$  wird durch Lösen der Gleichung

$$\begin{aligned}
 w^{(k)} & \left( \mathbf{M} + \gamma \Delta t^{(k)} \mathbf{C} + \beta \left( \Delta t^{(k)} \right)^2 \mathbf{K}_{\mathbf{T}}^{(k)} \right) \lambda^{(k)} \\
 & = -\beta \left( \Delta t^{(k)} \right)^2 \left( \frac{\partial j}{\partial \mathbf{u}^{(k)}} \right)^T - \gamma \Delta t^{(k)} \left( \frac{\partial j}{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(k)}} \right)^T - \left( \frac{\partial j}{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(k)}} \right)^T \\
 & \quad - \lambda_{\mathbf{u}}^{(k+1)} \left( \frac{1}{2} \left( \Delta t^{(k+1)} \right)^2 - \beta \left( \Delta t^{(k+1)} \right)^2 \right. \\
 & \quad \quad \quad \left. + \beta \left( \Delta t^{(k)} \right)^2 + \gamma \Delta t^{(k)} \Delta t^{(k+1)} \right) \\
 & \quad - \lambda_{\mathbf{v}}^{(k+1)} \left( \Delta t^{(k+1)} - \gamma \Delta t^{(k+1)} + \gamma \Delta t^{(k)} \right) \quad (4.59)
 \end{aligned}$$

mit den Lagrange-Multiplikatoren der Verschiebungsapproximation und der Geschwindigkeitsapproximation nach Newmark

$$\lambda_{\mathbf{v}}^{(k)} = \lambda_{\mathbf{v}}^{(k+1)} + \Delta t^{(k+1)} \lambda_{\mathbf{u}}^{(k+1)} + w^{(k)} \mathbf{C} \lambda^{(k)} + \left( \frac{\partial j}{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(k)}} \right)^T, \quad (4.60)$$

$$\lambda_{\mathbf{u}}^{(k)} = \left( \frac{\partial j}{\partial \mathbf{u}^{(k)}} \right)^T + \lambda_{\mathbf{u}}^{(k+1)} + w^{(k)} \mathbf{K}_{\mathbf{T}}^{(k)} \lambda^{(k)} \quad (4.61)$$

gewonnen.

Die Endwerte sind aus

$$w^{(m)} \left( \mathbf{M} + \gamma \Delta t^{(m)} \mathbf{C} + \beta \left( \Delta t^{(m)} \right)^2 \mathbf{K}_{\mathbf{T}}^{(m)} \right) \boldsymbol{\lambda}^{(m)} \\ = - \left( \beta \left( \Delta t^{(m)} \right)^2 \left( \frac{\partial j}{\partial \mathbf{u}^{(m)}} \right)^T + \gamma \Delta t^{(m)} \left( \frac{\partial j}{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(m)}} \right)^T + \left( \frac{\partial j}{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(m)}} \right)^T \right), \quad (4.62)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}^{(m)} = w^{(m)} \mathbf{K}_{\mathbf{T}}^{(m)} \boldsymbol{\lambda}^{(m)} + \left( \frac{\partial j}{\partial \mathbf{u}^{(m)}} \right)^T \quad (4.63)$$

und

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}^{(m)} = w^{(m)} \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda}^{(m)} + \left( \frac{\partial j}{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(m)}} \right)^T \quad (4.64)$$

zu entnehmen. Als Anfangswert bleibt für die Adjungierte

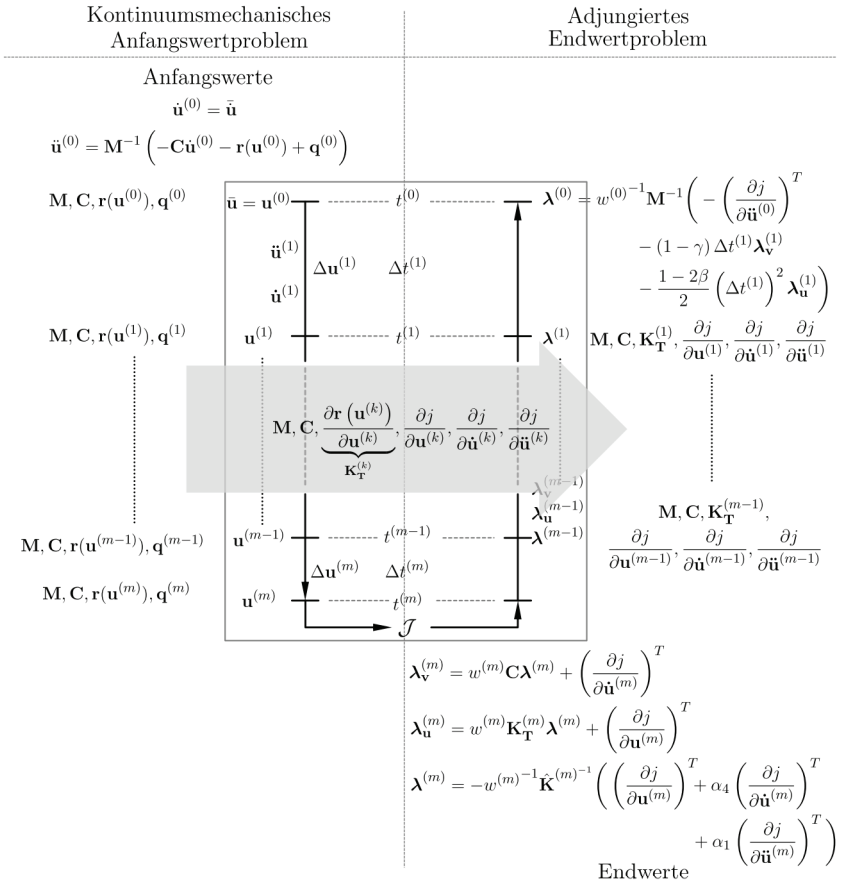
$$\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = w^{(0)-1} \mathbf{M}^{-1} \left( - \left( \frac{\partial j}{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(0)}} \right)^T - (1 - \gamma) \Delta t^{(1)} \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}^{(1)} \right. \\ \left. - \frac{1 - 2\beta}{2} \left( \Delta t^{(1)} \right)^2 \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}^{(1)} \right). \quad (4.65)$$

Wird die Rückwärts-Lösungsvorschrift (4.59) mit  $(\beta(\Delta t^{(k)})^2)^{-1}$  multipliziert, steht auf der linken Seite wie in Anmerkung 4.3.6 die effektive Steifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{K}}^{(k)}$  aus der Lösung des Anfangsrandwertproblems. Sofern diese Matrix invertiert und gespeichert wurde, kann diese hier zur Lösung verwendet werden. Diese rückwärtige Evolutionsgleichung ähnelt der aus Resultat 4.3.3 zwar, allerdings können sie nicht ineinander überführt werden.

Die Dimensionen der Lagrange-Multiplikatoren sind

$$\dim(\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}) = \dim(\mathcal{J}) \cdot \mathbf{L}^{-1} \quad \text{und} \quad \dim(\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}) = \dim(\mathcal{J}) \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}^{-1}. \quad (4.66)$$

Im Ablaufschema 4.5 auf Seite 98 müssen für das adjungierte Lösungsschema „erst diskretisieren – dann differenzieren“ die in Abbildung 4.6 dokumentierten Änderungen vorgenommen werden: Im Anschluss an die Lösung des Anfangsrandwertproblems werden die Pseudolasten  $\frac{\partial j}{\partial \mathbf{u}^{(k)}}$ ,  $\frac{\partial j}{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(k)}}$  und  $\frac{\partial j}{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(k)}}$  ermittelt. Bei der gesamten Rückwärtslösung werden im Nachgang an die Adjungierte zu einem Zeitpunkt anstelle der adjungierten Geschwindigkeit und adjungierten Beschleunigung die Lagrange-Multiplikatoren  $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{u}}^{(k)}$  und  $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{v}}^{(k)}$  ermittelt. Der Anfangswert der Adjungierten muss schließlich gesondert berechnet werden.



**Abbildung 4.6:** Adjungiertes Ablaufdiagramm „erst diskretisieren – dann differenzieren“, links: Vorwärtslösung des Anfangsrandwertproblems, rechts: Rückwärtslösung des adjungierten Endwertproblems

## 4.5 Explizite Ableitungen und Pseudolasten spezieller Funktionale

Die hergeleiteten Lösungsschemata und Gleichungen sind bis auf die Einführung spezieller Funktionale und deren Ableitungen vollständig. In diesem Abschnitt werden drei Funktionale im Speziellen vorgestellt.

Prinzipiell können alle Funktionale, die auch in der linearen Statik verwendet werden, auf dynamische Belastungen erweitert werden. Im Sinne der crashgerechten Karosserieentwicklung ist die Sensitivität für die innere Energie zu ermitteln, so dass die Struktur gezielt erweicht werden kann, um die äußere Kraft und die kinetische Energie in plastische Dehnungsenergie umzuwandeln. In Kombination mit der Verschiebung eines einzelnen Punktes soll es dann möglich sein, klassische Crashanforderungen wie die minimale Beschleunigung des Fahrzeuginsassen beim Aufprall bei gleichzeitiger Sicherung des Überlebensraums zu entwickeln. Für beide Funktionale werden die stetigen impliziten und expliziten Ableitungen nach „erst differenzieren – dann diskretisieren“ und die impliziten Ableitungen nach „erst diskretisieren – dann differenzieren“ entwickelt. Das dritte Funktional beinhaltet das Volumen beziehungsweise die Masse eines Gebiets. Die Sensitivität des Volumens kann ohne die adjungierte Methode direkt bestimmt werden.

### 4.5.1 Innere Energie eines Körpers

Crashstrukturen sollen im Knautschzonenbereich soviel kinetische Energie in Dehnungsenergie umwandeln wie möglich, um die Kräfte und damit auch die Beschleunigungen, die auf den Insassen und auf die sensiblen Strukturen wie Batterien übertragen werden, zu reduzieren.

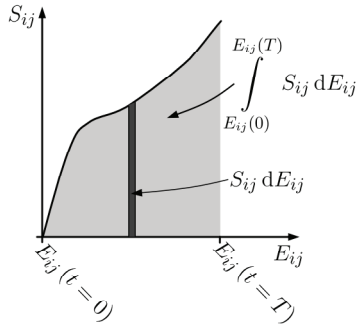
Nach dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik ist die zeitliche Änderung der totalen Energie gleich der mechanischen Leistung aller äußeren Kräfte plus der Wärmezufuhr. Wir setzen für einen Fahrzeugcrash voraus, dass die Wärmezufuhr vernachlässigbar ist. Die von den äußeren Kräften geleistete Arbeit muss also mit der totalen Energie im Gleichgewicht stehen. Die totale Energie wiederum setzt sich aus der inneren Energie und der kinetischen Energie zusammen. Die innere Energie kann als Funktional also ein Maß für die Energie sein, die nicht als kinetische Energie im mechanischen System verbleibt. Anschaulich lässt sich die innere Energie als die von den inneren Kräften verrichtete Arbeit interpretieren, die die Spannungen verrichten, um von einem Verzerrungszustand des Körpers (zum Zeitpunkt  $t = 0$ ) in den nächsten (zum Zeitpunkt  $t = T$ ) zu kommen.

Mit der spezifischen Spannungsleistung  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d}$  und der Beziehung zur Momentankonfiguration (3.22), die in Abschnitt 3.1.7 definiert wurde, kann die innere Energie mit

$$\mathcal{J}_\sigma := \int_0^T \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \, d\Omega_t \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}} \, d\Omega \, dt = \int_{\Omega} \int_{\mathbf{E}(0)}^{\mathbf{E}(T)} \mathbf{S} \cdot \mathbf{dE} \, d\Omega \quad (4.67)$$



sowohl in der Momentan- als auch in der Referenzkonfiguration berechnet werden. Die genaue Herleitung kann beispielsweise in Wriggers 2001 nachvollzogen werden. Für eine Komponente des Skalarprodukts ist die Interpretation der spezifischen inneren Energie, also der auf das Volumen bezogenen inneren Energie, in Abbildung 4.7 dargestellt.



**Abbildung 4.7:** Spezifische innere Energie

Zunächst werden die Pseudolasten für das adjungierte Lösungsschema „erst differenzieren – dann diskretisieren“ hergeleitet. Dann erfolgt die Bestimmung der expliziten Formableitung und abschließend die Ermittlung der Pseudolasten für das adjungierte Lösungsschema „erst diskretisieren – dann differenzieren“.

Die Herleitung der Pseudolasten erfolgt in der Bezugskonfiguration. Wir entwickeln zunächst eine übersichtlichere Schreibweise der inneren Energie. Dazu betrachten wir die Aufspaltung des folgenden Ausdrucks in einen symmetrischen und einen antimetrischen Teil

$$\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} = \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F})}_{\text{symm.}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} - \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F})}_{\text{antim.}}. \quad (4.68)$$

$\dot{\mathbf{E}}$

Der erste Summand auf der rechten Seite entspricht genau der Zeitableitung des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors  $\dot{\mathbf{E}}$  aus (3.18). Nach der Definition des Skalarprodukts mit dem Spuroperator (3.2) verschwindet das Skalarprodukt eines symmetrischen Tensors (in Fall der inneren Energie der 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor  $\mathbf{S}$ ) mit einem antimetrischen Tensor. Wir ersetzen also die Zeitableitung des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors mit (4.68) und stellen

das Skalarprodukt so um, dass ein aus der schwachen Form des Gleichgewichts bekannter Ausdruck entsteht

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}_\sigma(\mathbf{u}(\Omega), (\dot{\mathbf{u}}(\Omega), \Omega)) &= \int_{\Omega} \int_0^T \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}} \, dt \, d\Omega \\
 &\stackrel{(3.18)}{=} \int_{\Omega} \int_0^T \mathbf{S} \cdot \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) \, dt \, d\Omega \\
 &\stackrel{(4.68)}{=} \int_{\Omega} \int_0^T \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} - \underbrace{\mathbf{S} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} - \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F})}_{=0} \, dt \, d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \int_0^T \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \text{Grad } \dot{\mathbf{u}} \, dt \, d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \int_0^T \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \text{Grad } \dot{\mathbf{u}} \, dt \, d\Omega. \tag{4.69}
 \end{aligned}$$

Mit der inneren Funktion  $z(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) := \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \text{Grad } \dot{\mathbf{u}}$  können für das adjungierte Lösungsschema „erst differenzieren – dann diskretisieren“ in (4.50) die Pseudolasten  $[P_\sigma^{(k)}]_{(h)}$  nach (4.42) berechnet werden. Wir betrachten zunächst die Ableitung der inneren Funktion  $z$  nach der Verschiebung. Hier kann mit der Herleitung der Linearisierung der virtuellen inneren Energie in (3.35) gleich die Ableitung angegeben werden

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \text{Grad } \dot{\mathbf{u}}, \phi \right\rangle &= \text{Grad } \phi \mathbf{S} \cdot \text{Grad } \dot{\mathbf{u}} \\
 &+ \mathbf{F} \left\langle \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}, \frac{1}{2} (\text{Grad } \phi^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \text{Grad } \phi) \right\rangle \cdot \text{Grad } \dot{\mathbf{u}}. \tag{4.70}
 \end{aligned}$$

Bei der Ableitung nach der Geschwindigkeit muss zusätzlich noch nach der Zeit differenziert werden

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \text{Grad } \dot{\mathbf{u}}, \phi \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{F} \mathbf{S}) \cdot \text{Grad } \phi \\
 &= \dot{\mathbf{F}} \mathbf{S} \cdot \text{Grad } \phi + \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \cdot \text{Grad } \phi \\
 &= \text{Grad } \dot{\mathbf{u}} \mathbf{S} \cdot \text{Grad } \phi + \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \cdot \text{Grad } \phi. \tag{4.71}
 \end{aligned}$$

Hier besteht die Schwierigkeit, die zeitliche Ableitung des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors analytisch zu berechnen, denn diese hängt wieder von der spezifischen Materialmodellierung ab.

*Voraussetzung 4.5.1* (Zeitabhängigkeit des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors).

In dieser Arbeit wird vereinfachend vorausgesetzt, dass die Zeitableitung des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors implizit über die Zeitableitung des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors berechnet werden kann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}, \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}, \frac{1}{2} (\text{Grad } \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \text{Grad } \dot{\mathbf{u}}) \right\rangle. \end{aligned}$$

Mit dieser Vereinfachung kann die Ableitung nach der Geschwindigkeit (4.71) weiter aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \text{Grad } \dot{\mathbf{u}}, \phi \right\rangle &= \text{Grad } \dot{\mathbf{u}} \mathbf{S} \cdot \text{Grad } \phi \\ &+ \mathbf{F} \left\langle \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}, \frac{1}{2} (\text{Grad } \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \text{Grad } \dot{\mathbf{u}}) \right\rangle \cdot \text{Grad } \phi. \end{aligned}$$

Dies entspricht, bis auf wenige Umformungen mit den Identitäten des Spuoperators aus Abschnitt 3.1.2, der Ableitung der inneren Funktion nach der Verschiebung in (4.70). Die Pseudolasten sind damit gleich null für alle Zeitpunkte:

$$\begin{aligned} \left( [P_\sigma^{(k)}]_{(h)} \right)^T \phi &= \left[ \int_\Omega \frac{\partial z}{\partial \mathbf{u}} \cdot \phi - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \cdot \phi \, d\Omega \right] \Big|_{(h)} \Big|_{t=t^{(k)}} \\ &= \left[ \int_\Omega \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \text{Grad } \dot{\mathbf{u}}, \phi \right\rangle - \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \text{Grad } \dot{\mathbf{u}}, \phi \right\rangle \, d\Omega \right] \Big|_{(h)} \Big|_{t=t^{(k)}} = 0. \end{aligned}$$

Da das Funktional der inneren Energie unabhängig von der Beschleunigung ist, bleibt für die Endwerte des adjungierten Endwertproblems nach (4.30) und (4.31) nur noch die Ableitung der inneren Funktion  $z$  nach den Geschwindigkeiten

$$\int_\Omega \boldsymbol{\lambda}_\sigma(T) \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}} \, d\Omega = 0, \quad (4.72)$$

$$\int_\Omega -\varrho \dot{\boldsymbol{\lambda}}_\sigma(T) \cdot \boldsymbol{\phi}(T) + \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\phi}(T) \, d\Omega = 0. \quad (4.73)$$

Beim Endwert der adjungierten Geschwindigkeit tritt die virtuelle innere Energie auf, deren Diskretisierung aus (3.63) übernommen werden kann. Ohne Pseudolasten ist das adjungierte Gleichgewicht nach 4.46 mit den Endwerten sich selbst überlassen. Dies kann prinzipiell als eine freie Schwingung mit veränderlicher Steifigkeit  $\mathbf{K}_{\mathbf{r}}^{(k)}$  interpretiert werden. Im Zusammenhang mit den praktischen Beispielen in Kapitel 6 wird auf den Schwingungscharakter der Adjungierten der inneren Energie nochmals genauer eingegangen.

Der Randintegral-Term der expliziten materiellen Ableitung kann zunächst nicht weiter vereinfacht werden

$$\left(\frac{\partial \mathcal{J}_\sigma}{\partial \mathbf{r}}\right)_E = - \int_0^T \int_{\Gamma_r} \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \text{Grad } \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma \, dt. \quad (4.74)$$

Die diskretisierte innere Energie lässt sich mit der Definition (4.69) und der räumlichen Diskretisierung der virtuellen inneren Energie (3.63) auf Seite 63 angeben

$$j_\sigma = \sum_{k=0}^m w^{(k)} \dot{\mathbf{u}}^{(k)T} \mathbf{r}(\mathbf{u}^{(k)}). \quad (4.75)$$

Die einzelnen diskreten impliziten Ableitungsterme können daraus durch die Tangentensteifigkeit und den Vektor der inneren Kräfte berechnet werden.

*Resultat 4.5.1* (Ableitungen der inneren Energie).

Die Pseudolast der inneren Energie für das adjungierte Lösungsschema „erst differenzieren – dann diskretisieren“ in (4.50) ist gleich dem Nullvektor für jeden Zeitpunkt:

$$\left[P_\sigma^{(k)}\right]_{(h)} = \mathbf{0} \quad \text{für } k = 0, \dots, m. \quad (4.76)$$

Die Endwerte sind die räumlichen Diskretisierungen der kontinuierlichen Formen in (4.72), (4.73). Diese sind nach Resultat 4.3.3 auf Seite 96

$$\boldsymbol{\lambda}_\sigma^{(m)} = \mathbf{0}, \quad (4.77)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_\sigma^{(m)} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{u}^{(m)}), \quad (4.78)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\lambda}}_\sigma^{(m)} = \mathbf{M}^{-1} \left( \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{u}^{(m)}) \right). \quad (4.79)$$

Mit der expliziten materiellen Ableitung kann der funktionspezifische Teil der Topologischen Ableitung bestimmt werden

$$\left( \frac{\partial \mathcal{J}_\sigma}{\partial \mathbf{r}} \right)_E = - \int_0^T \int_{\tilde{\Gamma}_r} \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \text{Grad } \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma \, dt. \quad (4.80)$$

In diskretisierter Form lauten die Pseudolasten für das adjungierte Lösungsschema „erst diskretisieren – dann differenzieren“ in Resultat 4.4.2 (Seite 104):

$$\left( \frac{\partial j_\sigma}{\partial \mathbf{u}^{(k)}} \right)^T = w^{(k)} \mathbf{K}_T^{(k)} \dot{\mathbf{u}}^{(k)}, \quad (4.81)$$

$$\left( \frac{\partial j_\sigma}{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(k)}} \right)^T = w^{(k)} \mathbf{r}(\mathbf{u}^{(k)}). \quad (4.82)$$

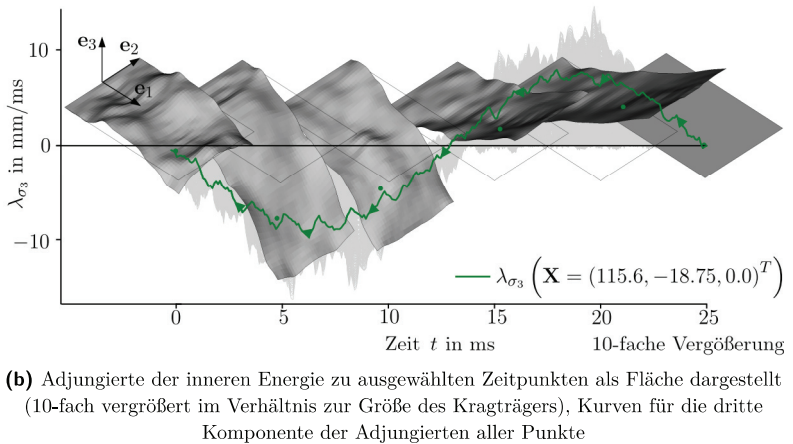
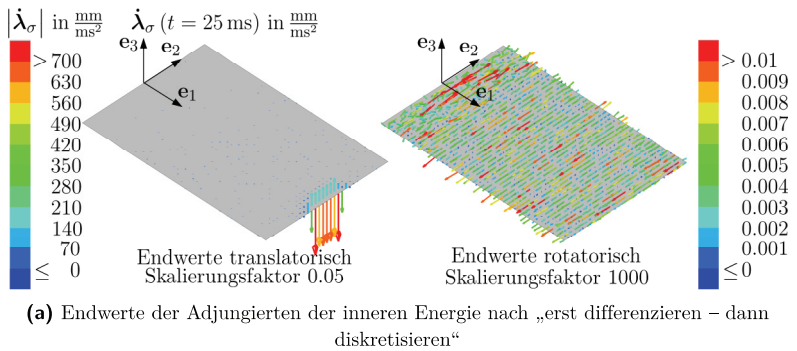
Die innere Energie hat die Dimension einer Energie, die Adjungierte hat dann entsprechend zu (4.19) in Bemerkung 4.3.1 auf Seite 85 die Dimension einer Geschwindigkeit  $\dim(\boldsymbol{\lambda}_\sigma) = \text{L} \cdot \text{T}^{-1}$ .

*Anmerkung 4.5.1 (Pseudolast auf Basis des diskretisierten Funktional). Wird die räumliche und zeitliche Diskretisierung des Funktional für die Berechnung der Pseudolasten  $[P_\sigma^{(k)}]_{(h)}$  für das adjungierte Lösungsschema „erst differenzieren – dann diskretisieren“ verwendet, so ist das Ergebnis ebenfalls der Nullvektor. Allerdings ist die zugrunde liegende vereinfachende Voraussetzung 4.5.1 nicht mehr im Detail sichtbar:*

$$\begin{aligned} [P_\sigma^{(k)}]_{(h)} &= \left( \frac{\partial j_\sigma}{\partial \mathbf{u}^{(k)}} \right)^T - \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial j_\sigma}{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(k)}} \right)^T \\ &= w^{(k)} \left( \mathbf{K}_T^{(k)} \dot{\mathbf{u}}^{(k)} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}(\mathbf{u}^{(k)}) \right) \\ &= w^{(k)} \left( \mathbf{K}_T^{(k)} \dot{\mathbf{u}}^{(k)} - \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u}^{(k)})}{\partial \mathbf{u}^{(k)}} \frac{\partial \mathbf{u}^{(k)}}{\partial t} \right) \\ &= w^{(k)} \left( \mathbf{K}_T^{(k)} \dot{\mathbf{u}}^{(k)} - \mathbf{K}_T^{(k)} \dot{\mathbf{u}}^{(k)} \right). \end{aligned}$$

*Beispiel 4.5.1 (Pseudolast und Adjungierte der inneren Energie).*

In Abbildung 4.8a sind für die Biegung des Kragträgers aus Beispiel 4.5.2 die translatorischen und rotatorischen Endwerte der adjungierten Geschwindigkeit (4.78) des adjungierten Lösungsschemas „erst differenzieren – dann diskretisieren“ gezeigt.

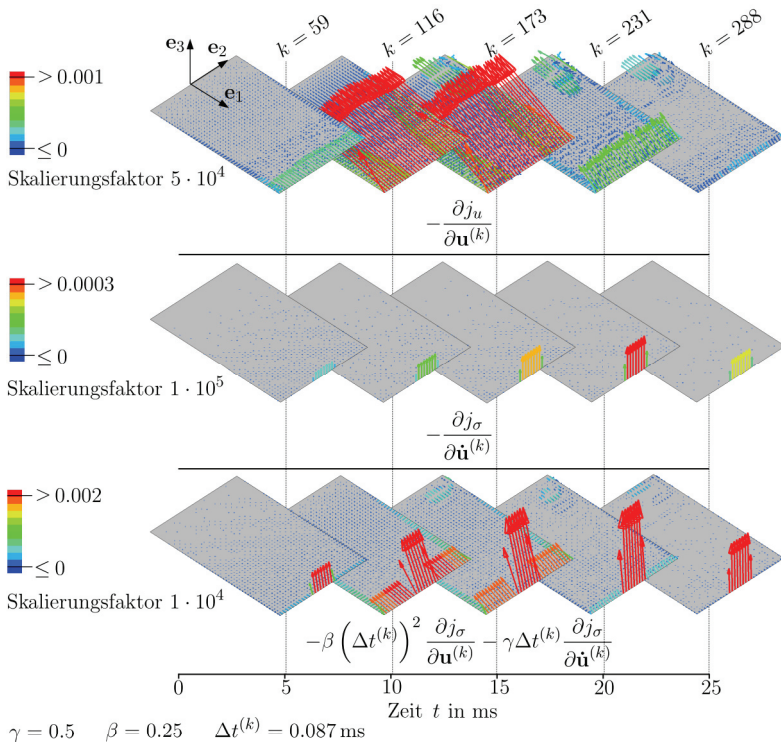


**Abbildung 4.8:** Endwerte und Verlauf der Adjungierten der inneren Energie nach dem adjungierten Lösungsschema „erst differenzieren – dann diskretisieren“

Bei den translatorischen Endwerten auf der linken Seite zeigt der Pfeil an jedem Knoten in die Richtung der Geschwindigkeit und die Vektorlänge und -farbe gibt den Betrag der Geschwindigkeit an. Die Länge ist im Verhältnis zur Größe des Kragträgers mit dem Faktor 0.05 skaliert. Die Darstellung der adjungierten rotatorischen Endgeschwindigkeiten erfolgt auf der rechten Seite als Vektor der resultierenden Rotationsachse an jedem Knoten. Die Vektorlänge und -farbe gibt die Rotationsgeschwindigkeit und die Rotationsachse an. Die Vektorlänge ist skaliert mit Faktor 1000. In Abwesenheit von Dämpfung ist die adjungierte Endbeschleunigung der inneren Energie gleich null. Auch die Pseudolasten sind im adjungierten Lösungsschema „erst differenzieren – dann diskretisieren“ nach (4.76) gleich null.

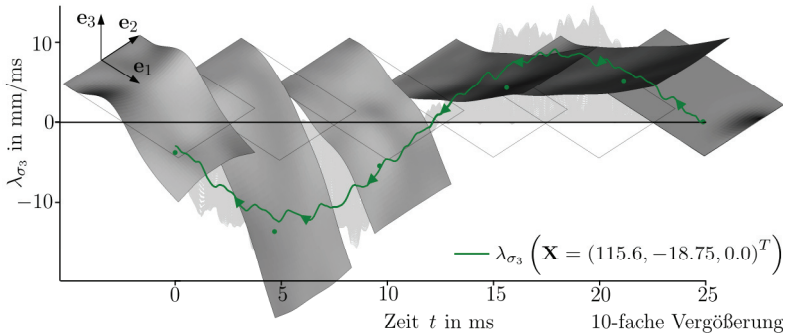
Bei den translatorischen Endwerten ist zu beobachten, dass die Richtungen innerhalb kurzer Distanzen wechseln. Die rotatorischen Endwerte sind durch Rotationen um die  $e_2$ -Achse dominiert. Die resultierende Adjungierte ist in Abbildung 4.8b als Verschiebung zu sechs ausgewählten Zeitpunkten in 10-facher Vergrößerung im Verhältnis zur Größe des Kragträgers dargestellt. Wie im Beispiel des Verschiebungsfunktionalis ist für einen ausgewählten Punkt (grün markiert) der Verlauf der dritten Komponenten der Adjungierten als Kurve hervorgehoben. Im Hintergrund sind die Kurven der dritten Komponente aller Punkte als graue Kurven zu sehen.

Für das adjungierte Lösungsschema „erst diskretisieren – dann differenzieren“ sind die translatorischen Pseudolasten  $-\frac{\partial j_\sigma}{\partial \mathbf{u}^{(k)}}$  und  $-\frac{\partial j_\sigma}{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(k)}}$  zu ausgewählten Zeitpunkten in Abbildung 4.9 gezeigt. Der resultierende Lastvektor in der untersten Reihe wird von den inneren Kräften im Bereich der Krafteinleitung, die die Biegung verursachen, dominiert.



**Abbildung 4.9:** Translatorische Pseudolast für die innere Energie nach dem adjungierten Lösungsschema „erst diskretisieren – dann differenzieren“

Die in Abbildung 4.10 dargestellte Adjungierte ist im Vergleich zur Adjungierten nach dem adjungierten Lösungsschema „erst differenzieren – dann diskretisieren“ qualitativ glatter, auch wenn prinzipiell ein ähnlicher Verlauf vorliegt. Aufgrund der fehlenden Materialinformation kann hier nicht ausgeschlossen werden, dass der unruhigere Verlauf mit der Vereinfachung in Voraussetzung 4.5.1 begründet werden kann.



**Abbildung 4.10:** Adjungierte der inneren Energie („erst diskretisieren – dann differenzieren“) zu ausgewählten Zeitpunkten als Fläche dargestellt (10-fach vergrößert im Verhältnis zur Größe des Kragträgers), Kurven für die dritte Komponente der Adjungierten aller Punkte

## 4.5.2 Verschiebung eines Einzelpunktes

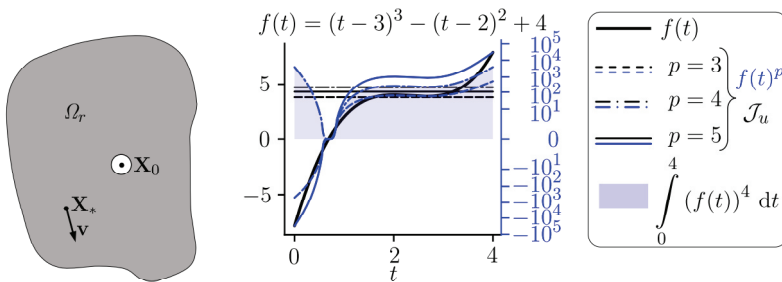
Damit im Falle einer elastischen Rückfederung die maximale Verschiebung eines Punktes zu einem beliebigen Zeitpunkt erfasst werden kann, wird das Verschiebungsfunktional mit einer Abwandlung der  $p$ -Norm für Funktionen konstruiert. Dazu betrachten wir den Punkt  $\mathbf{X}_*$  in Abbildung 4.11a, dessen maximale Verschiebung in Richtung  $\mathbf{v}$  im Funktional erfasst werden soll ( $\max_{t \in [0, T]} \mathbf{u}(\mathbf{X}_*, t) \cdot \mathbf{v}$ ). Diese Verschiebung konstruieren wir mit

$$\mathcal{J}_u(\mathbf{u}(\Omega)) = \left( \frac{1}{T} \int_0^T \left( \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{v} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_*} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.83)$$



Dieses Funktional entspricht nicht exakt der Definition der  $p$ -Norm für Funktionen. Die Abwandlung durch den Faktor  $\frac{1}{t}$  sorgt dafür, dass das Funktional die Dimension einer Verschiebung hat. Auf den Betrag wird zugunsten der Stetigkeit der Ableitung nach der Verschiebung verzichtet. Je größer der Exponent  $p$  gewählt wird, desto stärker werden große Verschiebungen gewichtet. Dem Exponenten sind nur numerische Grenzen durch die Darstellbarkeit der Zahlen gesetzt. Die Topologische Ableitung des Punktes  $\mathcal{T}\mathcal{J}_u(\mathbf{X}_0)$  gibt dann an, welchen Einfluss die Existenz des Punktes  $\mathbf{X}_0$  auf die Verschiebung des Punktes  $\mathbf{X}_*$  in Richtung  $\mathbf{v}$  hat.

In Abbildung 4.11b ist der Effekt des Exponenten für eine einfache Funktion aufgezeigt. Der Graph der Funktion ist als schwarze dicke durchgezogene Linie dargestellt. Die blauen Linien zeigen die Graphen der Funktion hoch  $p$ . Für  $p = 4$  ist das Integral als Fläche unter dem Graphen skizziert. Der Wert des Funktional  $\frac{1}{4} \int_0^4 (f(t))^p dt$  ist für die verschiedenen Exponenten  $p = 3, 4, 5$  jeweils als horizontale schwarze Linie eingezeichnet. Durch den zeitlichen Gewichtungsfaktor  $\frac{1}{t}$  liegt der Wert des Funktional nicht auf dem maximalen Funktionswert. Bei der Verwendung des Funktional als Restriktion in der Optimierung muss also ein Grenzwert entsprechend angepasst werden.



(a) Ort und Richtung der Einzelpunktverschiebung

(b) Abgewandelte  $p$ -Norm am Beispiel einer Funktion

**Abbildung 4.11:** Konstruktion der maximalen punktuellen Verschiebung

Wir betrachten zunächst die zeitliche und räumliche Diskretisierung des Funktional, da diese Diskretisierungen auch für die Ermittlung der Pseudolasten des Lösungsschemas „erst differenzieren – dann diskretisieren“ benötigt werden. Im Anschluss an die Berechnung der expliziten Ableitung werden noch die Pseudolasten für das Lösungsschema „erst diskretisieren – dann differenzieren“ bestimmt.

Die räumliche Diskretisierung geschieht mit einem Vektor  $\mathbf{l} = (0 \cdots \mathbf{v}^T \cdots 0)^T$ , bei dem an den Freiheitsgraden des Knotens  $\mathbf{X}_*$  die entsprechenden Einträge des Richtungsvektors  $\mathbf{v}$  stehen, ansonsten sind alle anderen Einträge gleich null. Das zeitlich wie räumlich diskretisierte Verschiebungsfunktional wird damit zu

$$j_u = \left( \frac{1}{T} \sum_{k=0}^m w^{(k)} (\mathbf{l}^T \mathbf{u}^{(k)})^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.84)$$

Für die implizite Ableitung des Funktionals  $\mathcal{J}_u$  wird zunächst mit der Kettenregel und dem Satz über die differenzierbare Abhängigkeit vom Parameter (siehe Anhang B.3) differenziert

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathcal{J}_u}{\partial r} \right)_I &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathcal{J}_u(\mathbf{u}(\Omega)), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right\rangle \\ &= \frac{1}{p} \left( \frac{1}{T} \int_0^T \left( \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{v} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_*} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}-1} \\ &\quad \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \left\langle p \left( \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{v} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_*} \right)^{p-1} \mathbf{v}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right\rangle \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_*} dt \\ &= \frac{1}{T} \mathcal{J}_u(\mathbf{u}(\Omega))^{1-p} \int_0^T \left( \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{v} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_*} \right)^{p-1} \mathbf{v} \cdot \phi(\mathbf{X}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_*} dt. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Das Funktional  $\mathcal{J}_u(\mathbf{u}(\Omega))$  in (4.85) wird durch die diskretisierte Form aus (4.84) ersetzt. Die räumliche Diskretisierung im verbleibenden Zeitintegral erfolgt ebenfalls mit dem Vektor  $\mathbf{l}$ :

$$[P_u^{(k)}]_{(h)} = \frac{w^{(k)}}{T} \left( \frac{\mathbf{l}^T \mathbf{u}^{(k)}}{j_u} \right)^{p-1} \mathbf{l}.$$

Das Verschiebungsfunktional ist nicht explizit abhängig vom Gebiet  $\Omega$  und damit auch nicht explizit vom Formparameter  $r$ . Die explizite Ableitung des Verschiebungsfunktional ist folglich

$$\left( \frac{\partial \mathcal{J}_u}{\partial r} \right)_E = 0.$$

Für die Ermittlung der Pseudolasten für den Zeitpunkt  $k$  des adjungierten Lösungsschemas „erst diskretisieren – dann differenzieren“ ergibt sich durch Differenziation des diskretisierten Funktionals (4.84) nach der Verschiebung  $\mathbf{u}^{(k)}$  mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial j_u}{\partial \mathbf{u}^{(k)}} &= \frac{1}{p} \left( \frac{1}{T} \sum_{n=0}^m w^{(n)} (\mathbf{1}^T \mathbf{u}^{(n)})^p \right)^{\frac{1}{p}-1} \frac{1}{T} p w^{(k)} (\mathbf{1}^T \mathbf{u}^{(k)})^{p-1} \mathbf{1}^T \\ &= \frac{w^{(k)}}{T} \left( \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{u}^{(k)}}{j_u} \right)^{p-1} \mathbf{1}^T. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Die Pseudolasten der beiden adjungierten Lösungsschemata unterscheiden sich nicht, da im Funktional nur eine Verschiebungsabhängigkeit gegeben ist. Zum Zeitpunkt der maximalen Verschiebung ist auch die Pseudolast maximal. Je größer der Exponent  $p$ , desto schneller werden die Pseudolasten kleiner.

*Resultat 4.5.2 (Ableitungen des Verschiebungsfunktional).*

Die Endwerte der Adjungierten und der adjungierten Geschwindigkeit für das Lösungsschema „erst differenzieren – dann diskretisieren“ sind aufgrund der Unabhängigkeit des Verschiebungsfunktional von der Geschwindigkeit und Beschleunigung gleich null:

$$\lambda_u^{(m)} = \dot{\lambda}_u^{(m)} = \mathbf{0}.$$

Die implizite Formableitung des Verschiebungsfunktional in stetiger Form und damit die Pseudolasten für das adjungierte Lösungsschema „erst differenzieren – dann diskretisieren“ in Resultat 4.3.3 (Seite 96) und die Pseudolasten für das adjungierte Lösungsschema „erst diskretisieren – dann differenzieren“ in Resultat 4.4.2 (Seite 104) unterscheiden sich nicht:

$$[P_u^{(k)}]_{(h)} = \left( \frac{\partial j_u}{\partial \mathbf{u}^{(k)}} \right)^T = \frac{w^{(k)}}{T} \left( \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{u}^{(k)}}{j_u} \right)^{p-1} \mathbf{1}. \quad (4.87)$$

Die adjungierte Beschleunigung wird mit der Pseudolast zum Endzeitpunkt aus (4.53) ermittelt:

$$\ddot{\lambda}_u^{(m)} = -\frac{w^{(m)}}{T} \left( \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{u}^{(m)}}{j_u} \right)^{p-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{1}.$$

Mit der expliziten materiellen Ableitung kann der funktionspezifische Teil der Topologischen Ableitung in stetiger Form in (4.33) für alle Punkte identisch null bestimmt werden:

$$\lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{d |c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr} \right)^{-1} \left( \frac{\partial \mathcal{J}_u}{\partial r} \right)_E = 0. \quad (4.88)$$

Das Verschiebungsfunktional hat die Dimension der Verschiebung  $\dim(\mathcal{J}_u) = \mathbf{L}$ . Die zum Verschiebungsfunktional gehörige Adjungierte (mit dem unteren Index  $u$  gekennzeichnet) hat dann entsprechend zu (4.19) auf Seite 85 die Dimension  $\dim(\boldsymbol{\lambda}_u) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}^{-1}$ .

Die hier gezeigte Modellierung ist nur eine von vielen Möglichkeiten zur Bestimmung der Verschiebung eines Einzelpunktes. Wie an der beispielhaften Funktion in Abbildung 4.11b schon zu erkennen ist, muss bei der Anwendung der Verschiebungsverlauf und die Rolle des Funktionals in der Optimierung berücksichtigt werden. Treten Verschiebungen entgegen der Messrichtung  $\mathbf{v}$  auf, muss in der Modellierung definiert werden, wie diese bewertet werden sollen. Die Schwierigkeit der Konstruktion des Funktionals liegt dabei mehr bei der kontinuierlichen Beschreibung als bei der zeitlichen Diskretisierung. Statt der Verschiebung eines Einzelpunktes, kann im diskretisierten Vektor  $\mathbf{l}$  im Falle einer Schalenmodellierung auch ein rotatorischer Freiheitsgrad gemessen werden und dessen maximale Verdrehung als Funktional dienen.

*Anmerkung 4.5.2 (Verschiebung linear elastisch). Das Verschiebungsfunktional kann in der zeitunabhängigen Form ohne die zeitliche  $p$ -Norm formuliert werden*

$$\mathcal{J}_u^{\text{lin}} = \mathbf{u}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{v} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{x}_*}.$$

*Die explizite Ableitung ist wie bei der zeitlichen Form ebenfalls gleich null*

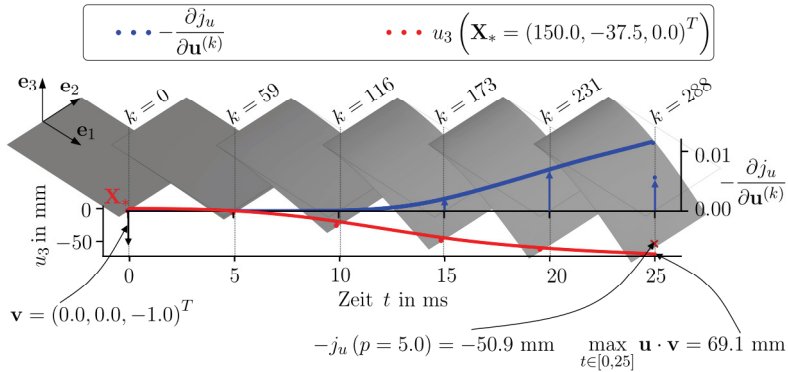
$$\left( \frac{\partial \mathcal{J}_u^{\text{lin}}}{\partial r} \right)_E = 0.$$

*Für die implizite Ableitung verbleibt letztendlich nur der Vektor am Verschiebungspunkt*

$$\left( \frac{\partial \mathcal{J}_u^{\text{lin}}}{\partial r} \right)_I = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}) \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{x}_*}.$$

*Beispiel 4.5.2* (Pseudolast und Adjungierte des Verschiebungsfunktional).

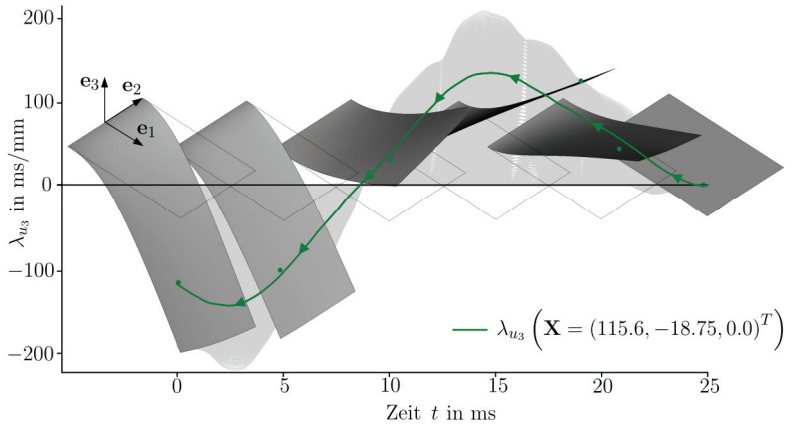
In Abbildung 4.12 ist die Biegung eines Kragträgers zu sehen. Für die Verschiebung des rot markierten Punktes in negativer  $\mathbf{e}_3$ -Richtung werden die Pseudolasten  $-\frac{\partial j_u}{\partial \mathbf{u}^{(k)}}$  mit (4.86) für  $p = 5$  ermittelt. Da diese bereits das Integrationsgewicht  $w^{(k)}$  beinhalten, ist der Pseudolastvektor zum Endzeitpunkt mit der Trapezregel und konstanter Zeitschrittweite  $\Delta t^{(k)} = 0.087$  ms nur halb so groß, wie zum vorletzten Zeitpunkt. Die Pseudolastvektoren sind für ausgewählte Zeitpunkte als blaue Pfeile in Abbildung 4.12 aufgetragen. Der Pseudolastvektor wirkt immer an der Stelle des Punktes, dessen Verschiebung vom Funktional erfasst werden soll. In der Abbildung sind diese Vektorpfeile auf der unverformten Geometrie passend zum Diagramm dargestellt. An der Darstellung des Beispiels ist gut zu erkennen, dass die äußere Belastung des Anfangsrandwertproblems unerheblich für die Berechnung der Pseudolasten ist, sondern nur der Verschiebungszustand benötigt wird.



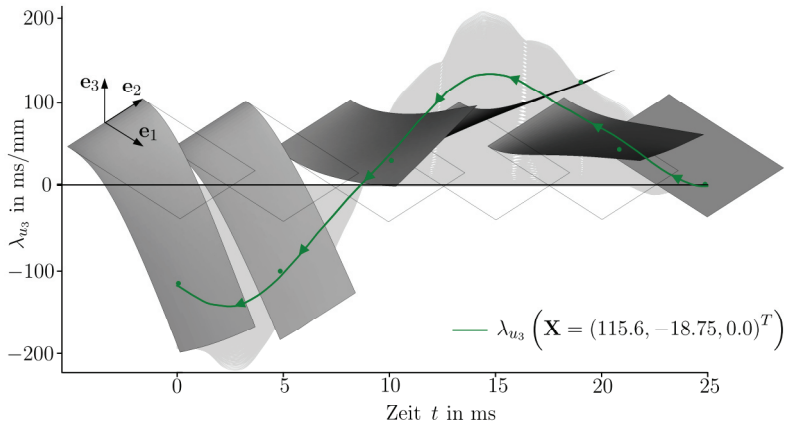
**Abbildung 4.12:** Verschiebungsfunktional und Pseudolasten am Beispiel eines Kragträgers

In Abbildung 4.13a ist die Lösung der Adjungierten nach dem adjungierten Lösungsschema „erst differenzieren – dann diskretisieren“ mit dem Exponenten  $p = 5$  dargestellt als Verschiebung (also als graue verformte Fläche), da so alle translatorischen Komponenten  $\lambda_{u_i}$  gleichzeitig erfasst werden können. Zum Endzeitpunkt  $T = 25$  ms ist die Adjungierte gleich null. Beispielhaft ist für einen ausgewählten Punkt  $\mathbf{X} = (115.6, -18.75, 0.0)^T$  des Kragträgers, der nicht der Einzelverschiebungspunkt ist, die dritte Komponente der Adjungierten  $\lambda_{u_3}$  als grüne Kurve dargestellt. Der Punkt selbst ist als grüner Punkt hervorgehoben. Da bei der Verschiebungsdarstellung der grauen Flächen alle Richtungen berücksichtigt

werden, liegen die grünen Punkte zum Teil neben der Kurve auf gleicher Höhe. Im Hintergrund sind die dritten Komponenten der Adjungierten aller Punkte des Kragträgers dargestellt.



(a) „erst differenzieren – dann diskretisieren“



(b) „erst diskretisieren – dann differenzieren“

**Abbildung 4.13:** Adjungierte des Verschiebungsfunktionals zu ausgewählten Zeitpunkten als Fläche dargestellt und Kurven für die dritte Komponente der Adjungierten aller Punkte mit dem Exponenten  $p = 5$

Verglichen mit dem Lösungsschema „erst diskretisieren – dann differenzieren“ in Abbildung 4.13a kann qualitativ kein Unterschied der Adjungierten ausgemacht werden. Der vorhandene quantitative Unterschied kann schon in der Berechnung des Endwertes erfasst werden. Während nach dem adjungierten Lösungsschema „erst differenzieren – dann diskretisieren“ die Adjungierte zum Endzeitpunkt für alle Punkte gleich null ist ( $\lambda_u^{(m)} = \mathbf{0}$ ), wird die Adjungierte zum Endzeitpunkt nach „erst diskretisieren – dann differenzieren“ aus der allgemeinen Endwertdefinition (4.62) mit der Pseudolast zum Endzeitpunkt (4.87) durch

$$\lambda_u^{(m)} = -\frac{1}{T} \left( \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{u}^{(m)}}{j_u} \right)^{p-1} \left( \hat{\mathbf{K}}^{(m)} \right)^{-1} \mathbf{1}$$

berechnet. Im Verhältnis zum weiteren Verlauf der Adjungierten ist der Unterschied zwischen den beiden Lösungsschemata gering.

### 4.5.3 Volumen des Körpers

Für die klassische Kostenfunktion der Masse, respektive des Volumens  $\mathcal{J}_V = |\Omega|$  des Körpers, kann die Topologische Ableitung entweder direkt mit der Formableitung (4.5) des Gebiets mit der Aussparung und den Ableitungen der Volumina der Ausschnittsfunktionen (4.11) und (4.12) durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}_V(\Omega \setminus \overline{c_r(\mathbf{X}_0)})}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} (|\Omega| - |c_r(\mathbf{X}_0)|) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} |\Omega| - \frac{\partial}{\partial r} |c_r(\mathbf{X}_0)| \\ &= \begin{cases} -2\pi r h & \text{für Zylinder-,} \\ -2(d-1)\pi r^{d-1} & \text{für Kugelaussparungen,} \end{cases} \end{aligned}$$

bestimmt oder ebenso konsistent mit der materiellen Ableitung der Definition des Volumens 3.1.5 hergeleitet werden:

$$\mathcal{T}\mathcal{J}_V(\mathbf{X}_0) = \lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{d(|c_r(\mathbf{X}_0)|)}{dr} \right)^{-1} \underbrace{\left( \int_{\Omega_r} \frac{\partial}{\partial r} 1 \, d\Omega - \int_{\Gamma_r} 1 \, d\Gamma \right)}_{=0} = -1.$$

Für die Berechnung der Sensitivität ist in diesem Fall keine adjungierte Lösung und auf Grund der räumlichen und zeitlichen Konstanz auch keine diskrete Formulierung erforderlich.

*Resultat 4.5.3 (Ableitung des Volumens).*

Die Topologische Ableitung des Volumens kann direkt ohne adjungierte Rechnung angegeben werden

$$\mathcal{T}\mathcal{J}_V = -\lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{d \overline{c_r(\mathbf{X}_0)}}{dr} \right)^{-1} \int_{\Gamma_r} 1 \, d\Gamma = -1.$$

Die Ableitung ist also negativ und konstant für alle Punkte des Gebiets.

## 4.6 Zusammenfassung der analytischen Herleitung

Wir haben in diesem Kapitel zunächst die Topologische Ableitung aus der Formableitung entwickelt, so dass mit der materiellen Ableitung die Adjungierte Methode angewendet werden kann. Die impliziten Ableitungsteile der materiellen Ableitung werden dabei mithilfe der Adjungierten eliminiert.

Diese wird dazu entweder mit dem adjungierten Lösungsschema „erst differenzieren – dann diskretisieren“ in Algorithmus 2 oder mit dem adjungierten Lösungsschema „erst diskretisieren – dann differenzieren“ in Algorithmus 3 berechnet. Die beiden Vorgehen unterscheiden sich in der Konzeption der adjungierten Lösung.

Beim adjungierten Lösungsschema „erst differenzieren – dann diskretisieren“ wird mit partieller Integration im Zeitbereich eine rein analytische Formulierung eines Endwertproblems entwickelt, die dann mit einem Zeitintegrationsschema diskret gelöst wird. Als Zeitintegrationsschema wird dabei, wie für die Lösung des Anfangsrandwertproblems auch, die implizite Zeitintegration verwendet.

Im Gegensatz dazu wird beim adjungierten Lösungsschema „erst diskretisieren – dann differenzieren“ das Zeitintegrationsschema schon zur Entwicklung des Endwertproblems der Adjungierten verwendet. Die unterschiedlichen Lösungsschemata lassen sich nicht ineinander überführen.

Die Topologische Ableitung selbst wird dann aus den verbleibenden expliziten Ableitungsteilen der materiellen Ableitung ermittelt.

Für drei Funktionale im Speziellen wurden die Pseudolasten für die adjungierten Lösungsschemata sowie die Topologische Ableitung entwickelt, so dass diese bis auf verbleibende Randintegrale ausgewertet werden kann. Die Berechnung dieser Randintegrale ist in rein analytischer Form nicht möglich. Im nächsten Kapitel wird daher eine Möglichkeit vorgestellt, um die Integrale numerisch auszuwerten.



Durch die Linearität der adjungierten Lösungsvorschriften können die Adjungierten zu mehreren Funktionalen simultan in einer Rückwärts-Rechnung ermittelt werden. Der numerische Aufwand ist bei der Rückwärtsrechnung geringer als bei der Lösung des Anfangsrandwertproblems. Werden schon invertierte Matrizen der Vorwärtsrechnung gespeichert, können diese bei der adjungierten Rückwärtsrechnung den Lösungsprozess nochmals beschleunigen. Allerdings steht die Speicherung der Matrizen und damit die Geschwindigkeit der Lösung immer im Konflikt mit dem benötigten Speicherplatz. Die Adjungierte ist abhängig vom Funktional, aber nicht von den Entwurfsvariablen. Mit der adjungierten Lösung ist prinzipiell die Berechnung verschiedener Sensitivitäten wie beispielsweise der Formableitung oder der Sensitivität bezüglich der Schalendicke möglich, sofern für diese auch explizite Beschreibungen vorliegen.

Der Unterschied der beiden Lösungsschemata wird auch in Jensen et al. 2014 und in Fernandez und Tortorelli 2018 an Beispielen mit Feder-Masse-Schwingern mit einem und zwei Freiheitsgraden untersucht. Dem adjungierten Lösungsschema „erst differenzieren – dann diskretisieren“ wird dabei eine „Inkonsistenz“ bei der Überprüfung mit dem Differenzenquotienten bescheinigt. Eine Begründung für diese Abweichung kann in der Literatur aktuell nicht gefunden werden.

Welche Gleichgewichte letztendlich mit Lagrange-Multiplikatoren zum erweiterten Funktional gehören sollten, wird in der Literatur zur nichtlinear transienten Sensitivitätenberechnung unterschiedlich gehandhabt. In Ivarsson et al. 2018 wird beispielsweise das konstitutive Materialgesetz mit einem eigenen Lagrange-Multiplikator zur Lösung der adjungierten Gleichung verwendet. In Jung und Gea 2004 wird zusätzlich noch die Definition des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors aus (3.9) mit einem eigenen Lagrange-Multiplikator versehen.

Für die Berechnung der Pseudolasten der inneren Energie für das adjungierte Lösungsschema „erst differenzieren – dann diskretisieren“ musste eine Besonderheit der Materialformulierung angenommen werden. Diese vereinfachende Voraussetzung 4.5.1 der Zeitabhängigkeit des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors auf Seite 110 ist durchaus diskutabel und muss zukünftig mit einer besseren Kenntnis der Materialformulierung ersetzt werden. In den Pseudolasten des adjungierten Lösungsschemas „erst diskretisieren – dann differenzieren“ ist diese Vereinfachung nicht vorhanden.

---

**Algorithmus 2** Berechnung der adjungierten Lösung nach „erst differenzieren – dann diskretisieren“

---

- 1 **For** alle Zeitpunkte  $k = 0, \dots, m$  **Do**
  - 2 Berechne funktionspezifische Pseudolasten  $[P^{(k)}]_{(t)}$  beispielsweise nach (4.87) und (4.76)
  - 3 **End For**
  - 4 Setze Endwert der Adjungierten  $\lambda^{(m)}$  nach (4.51)
  - 5 Setze Endwerte adjungierten Geschwindigkeit  $\dot{\lambda}^{(m)}$  und Beschleunigung  $\ddot{\lambda}^{(m)}$  nach (4.52) und (4.53)
  - 6 **For**  $k = m, \dots, 1$  **Do**
  - 7 Berechne Adjungierte  $\lambda^{(k-1)}$  nach (4.50)
  - 8 Berechne adjungierte Geschwindigkeit  $\dot{\lambda}^{(k-1)}$  nach (4.47)
  - 9 Berechne adjungierte Beschleunigung  $\ddot{\lambda}^{(k-1)}$  nach (4.48)
  - 10 **End For**
- 

---

**Algorithmus 3** Berechnung der adjungierten Lösung nach „erst diskretisieren – dann differenzieren“

---

- 1 **For** alle Zeitpunkte  $k = 0, \dots, m$  **Do**
  - 2 Berechne funktionspezifische Pseudolasten  $\frac{\partial j}{\partial \mathbf{u}^{(k)}}$ ,  $\frac{\partial j}{\partial \dot{\mathbf{u}}^{(k)}}$  und  $\frac{\partial j}{\partial \ddot{\mathbf{u}}^{(k)}}$  beispielsweise nach (4.87) und (4.81)
  - 3 **End For**
  - 4 Setze Endwert der Adjungierten  $\lambda^{(m)}$  nach (4.62)
  - 5 Setze Endwerte der Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_{\mathbf{u}}^{(m)}$  und  $\lambda_{\mathbf{v}}^{(m)}$  nach (4.63) und (4.64)
  - 6 **For**  $k = m - 1, \dots, 1$  **Do**
  - 7 Berechne Adjungierte  $\lambda^{(k)}$  nach (4.59)
  - 8 Berechne Geschwindigkeits-Lagrange-Multiplikator  $\lambda_{\mathbf{v}}^{(k)}$  nach (4.61)
  - 9 Berechne Verschiebungs-Lagrange-Multiplikator  $\lambda_{\mathbf{u}}^{(k)}$  nach (4.60)
  - 10 **End For**
  - 11 Berechne Anfangswert  $\lambda^{(0)}$  nach (4.65)
-



# 5 Numerischer Lösungsansatz für die Randintegrale der Topologischen Variation

Bei der Herleitung in Kapitel 4 wurde bis auf die Auswertung der Randintegrale der expliziten materiellen Ableitung auf dem Aussparungsrand ein rein analytisches Berechnungsschema für die Topologische Ableitung entwickelt. Ziel dieses Kapitels ist es, diese Randintegrale so weit wie möglich analytisch zu lösen und, wann immer das nicht mehr möglich ist, ein numerisches Berechnungsmodell anzugeben. Vereinfachende Annahmen, die den Berechnungsmodellen zugrunde liegen, werden dabei besonders hervorgehoben und am Schluss dieses Kapitels hinsichtlich des Verbesserungspotenzials diskutiert.

Die Ableitung der gemischt adjungierten Energie (4.35) und die explizite Ableitung der inneren Energie (4.80) beinhalten den 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor  $\mathbf{S}$  auf dem Rand der Aussparung. Hierfür ist bei großen Verzerrungen und nichtlinearem Materialverhalten keine analytische Beschreibung bekannt. Für die Entwicklung eines Berechnungsmodells wird im ersten Teil dieses Kapitels die analytische Beschreibung der Spannungen auf dem Aussparungsrand bei kleinen Verschiebungen und Verzerrungen und linear elastischem Materialverhalten erläutert. Anhand dieser Beschreibung kann mit dem Übergang zu nichtlinearem Materialverhalten die Grenze der analytischen Spannungsfunktionen aufgezeigt werden. Aus einer phänomenologischen Materialbeschreibung werden geeignete Materialinterpolationen und damit auch Berechnungsmodelle für die Ableitung der gemischt adjungierten Energie und für den expliziten Ableitungsterm der inneren Energie entwickelt, die aus der analytischen Spannungsfunktion hervorgehen.

Für die Ableitungen des Dämpfungsterms, des Trägheitsterms und der Volumenkkräfte werden am Ende des Kapitels eigene Vereinfachungen gezeigt.

## 5.1 Randintegrale unter linear elastischem Materialverhalten und kleinen Verschiebungen

Die kompakte Herleitung der Spannungen auf dem Rand einer Topologischen Variation erfolgt in der Theorie kleiner Deformationen und linear elastischem Materialverhalten. Zunächst werden die Schnittgrößen definiert, die das Spannungsfeld um einen Lochausschnitt beschreiben. Durch Superposition von Scheiben und Plattenbelastung und mit Resultaten der höheren Elastizitätstheorie kann auf die Spannung in Umfangsrichtung am Lochrand geschlossen werden. Die Grenzen der linear elastischen Formeln werden bei Überschreiten der Fließgrenze durch die Kerbwirkung des Lochs aufgezeigt.

### 5.1.1 Schnittgrößen der Schalenformulierung

Wir betrachten das infinitesimale zylindrische Loch um den Punkt  $\mathbf{X}_0$  in einem Schalen-Körper. Das Einbringen der Aussparung ist eine Störung des homogenen Spannungszustands in dem Schalenausschnitt, der durch die Kräfte  $f_{xx}$ ,  $f_{xy}$  und  $f_{yy}$  und Momente  $m_{xx}$ ,  $m_{xy}$ , und  $m_{yy}$  in Abbildung 5.1 freigeschnitten wird. Der Ausschnitt ist dabei sehr groß im Verhältnis zum Dimensionierungsparameter  $r$ . Wir nennen diesen Ausschnitt *Mikrozelle*, da er das mechanische Verhalten auf mikroskopischer Ebene abbildet. Alle Größen der Mikrozelle werden auf das lokale Basissystem  $\mathcal{E}^{\text{loc}} = \{\mathbf{e}_1^{\text{loc}}, \mathbf{e}_2^{\text{loc}}, \mathbf{N}\}$  bezogen angegeben, dessen Konstruktion mit den kovarianten Basisvektoren in (3.52) angegeben wird.

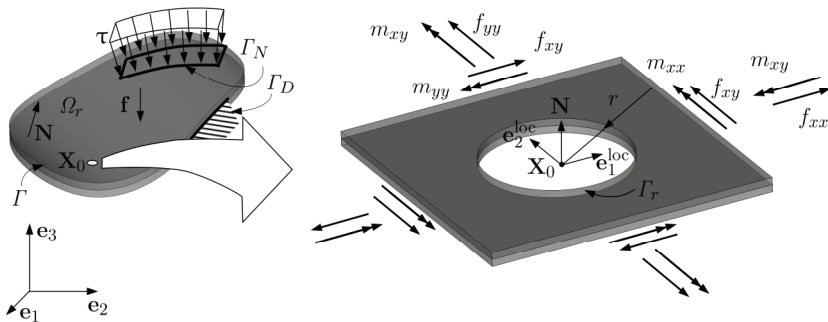


Abbildung 5.1: Charakterisierung des Lochrands durch Schnittgrößen

Die Schalenformulierung ist im linear Elastischen einfacher als dies in Abschnitt 3.3 dieser Arbeit für Schalen allgemein erläutert wurde: Während im linear Elastischen bei der Überlagerung oder auch *Superposition* der Plattenbiegesteifigkeit und der Steifigkeit für den ebenen Spannungszustand das Schalenelement auf ein Plattenbiegeelement *plus* ein Element für den ebenen Spannungszustand reduziert wird, sind Plattenbiegung und Membranspannung bei der allgemeinen Schalenformulierung in Abschnitt 3.3 gekoppelt.

Anhand der ausgewählten Schnittgrößen ist zu erkennen, dass im Folgenden als vereinfachende Annahme hier der ebene Spannungszustand in der Schale verwendet wird, bei dem kein Elastizitätsgesetz für die transversalen Schubspannungen  $\sigma_{xz}$  und  $\sigma_{yz}$  existiert.

Die Schnittgrößen werden wie folgt berechnet: Die aus den Spannungen resultierenden Momente pro Längeneinheit werden durch Integration der Spannung mal Hebelarm, das ist die Dickenkoordinate  $z$ , bezüglich der Dickenkoordinate gewonnen:

$$m_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z \, dz, \quad m_{yy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} z \, dz \quad \text{und} \quad m_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z \, dz. \quad (5.1)$$

Die resultierenden Kräfte pro Längeneinheit werden durch die Integration der Spannung bezüglich der Dickenkoordinate berechnet:

$$f_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \, dz, \quad f_{yy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} \, dz \quad \text{und} \quad f_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} \, dz. \quad (5.2)$$

Die Schnittgrößen werden aus dem Cauchyschen Spannungstensor berechnet, da dieser die wahre Spannung, also Kraft pro tatsächliche Fläche, umfasst. Bei kleinen Verschiebungen gehen Bezugs- und Momentankonfiguration ineinander über und die Verzerrungs- und Spannungsmaße werden nicht mehr unterschieden.

Die Berechnung der Schnittgrößen aus den Spannungen erfolgt auf Basis der finiten Elemente durch numerische Integration an den Dickenintegrationspunkten mit den Integrationsgewichten aus der Schalenformulierung, die beispielsweise in Tabelle 3.2 auf Seite 62 angegeben sind.

## 5.1.2 Analytische Lösungen der Spannungen am Lochrand

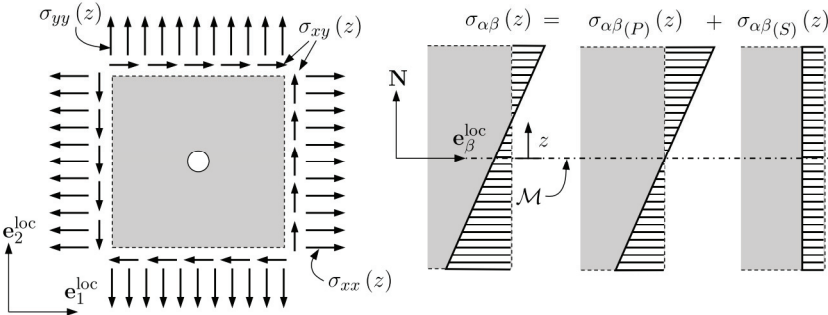
Sowohl für ein Loch in einer Platte unter Momentenbelastung als auch für ein Loch in einer Scheibe unter Membranspannung existieren analytische Lösungen für die

Spannung am Lochrand. Da der Rand der Topologischen Variation belastungsfrei ist, treten am Lochrand keine Schub- und Normalspannungen auf, sondern nur Spannungen in Umfangsrichtung. Wir leiten an dieser Stelle die Spannungen am Lochrand aus den Schnittgrößen (5.1) und (5.2) her.

*Schreibweise* (Scheiben- und Plattenanteil). Wir führen nun eine Dekomposition der Spannungen in einen Scheiben- ( $S$ ) und einen Plattenanteil ( $P$ ) durch. Die Dekomposition erfolgt in einen in der Dickenkoordinate konstanten Spannungsteil, den Scheibenspannungsanteil  $\sigma_{\alpha\beta(S)}$ , und einen Anteil linear in der Dickenkoordinate, den Plattenanteil  $\sigma_{\alpha\beta(P)}$  ( $z$ ):

$$\sigma_{\alpha\beta}(z) = \sigma_{\alpha\beta(P)}(z) + \sigma_{\alpha\beta(S)}.$$

Die Indizes  $\alpha$  und  $\beta$  stehen für die ebenen Schub- und Normalkomponenten des Spannungstensors. Diese Dekomposition ist in Abbildung 5.2 schematisch dargestellt.



**Abbildung 5.2:** Spannungsdekomposition

Aufgrund des linearen Elastizitätsgesetzes, ist die Spannung linear über die Plattendicke verteilt. In der Literatur wird daher oft das resultierende Moment durch eine Spannung an der Plattenoberseite ausgedrückt

$$\sigma_{\alpha\beta(P)}\left(z = \frac{h}{2}\right) = \frac{6 m_{\alpha\beta}}{h^2}. \tag{5.3}$$

Die lineare Verteilung

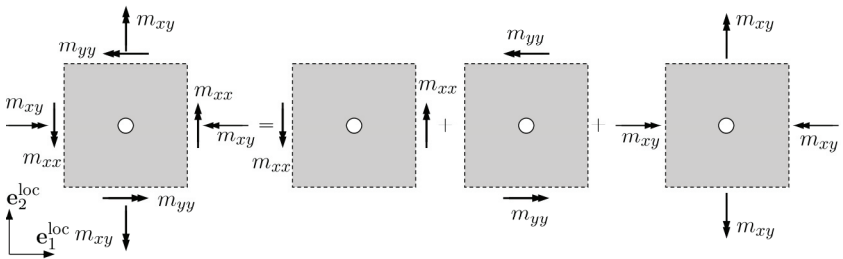
$$\sigma_{\alpha\beta(P)}(z) = \sigma_{\alpha\beta(P)}\left(z = \frac{h}{2}\right) \frac{2}{h} z = \frac{6 m_{\alpha\beta}}{h^2} \frac{2}{h} z = \frac{12 m_{\alpha\beta}}{h^3} z \tag{5.4}$$

erzeugt bei der Integration in (5.1) genau das Moment  $m_{\alpha\beta}$ , aber bei der Integration in (5.2) keine Kraft. Der konstante Scheibenanteil der äußeren Spannung wird ermittelt durch den Mittelwert der Spannung über die Scheibendicke

$$\sigma_{\alpha\beta(s)} = \frac{f_{\alpha\beta}}{h}. \quad (5.5)$$

Der Scheibenanteil erzeugt bei der Integration der Spannung in (5.2) die Kraft  $f_{\alpha\beta}$ , bei der Integration in (5.1) aber kein Moment.

Wir betrachten zunächst den Plattenanteil und dessen Einfluss auf die Spannung am Lochrand. Die gesamte Plattenbelastung der Mikrozelle wird durch Superposition der elementaren Momente wie in Abbildung 5.3 gewonnen.



**Abbildung 5.3:** Resultierende Momente durch Superposition elementarer Momente

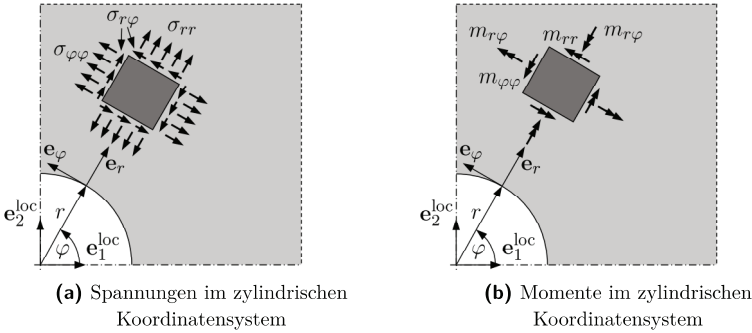
Zur Beschreibung der Spannungen und Momente auf dem Rand der Aussparung ist die Verwendung des lokalen Zylinderkoordinatensystems

$$\mathcal{Z}^{\text{loc}} = \left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{c} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{array} \right), \mathbf{N} \\ \mathcal{E}^{\text{loc}} \end{array} \right\}$$

von Vorteil.

*Schreibweise* (Größen im Zylinderkoordinatensystem). Die Kräfte, Momente und Komponenten der Spannungen und Verzerrungen im lokalen Zylinderkoordinatensystem  $\mathcal{Z}^{\text{loc}}$  werden mit den Polarkoordinaten-Indizes  $r$  in radialer Richtung und  $\varphi$  in Umfangsrichtung gekennzeichnet. Die Komponenten des Spannungstensors und die Momente sind in Abbildung 5.4 gezeigt. Die Richtung des Zylinderkoordinatensystems ist ortsabhängig von der Umfangskoordinate  $\varphi$  und nicht raumfest.





**Abbildung 5.4:** Lokales Zylinderkoordinatensystem

Mit der Methode der komplexen Potentiale kann nach Sawin 1956 von den äußeren Momenten auf die Momente am Lochrand geschlossen werden. Unter Verwendung der Kirchhoffschen Plattentheorie ist das Moment am Lochrand  $m_{\varphi\varphi}|_{\Gamma_r}$  im Zylinderkoordinatensystem unter reiner Biegebelastung durch das Biegemoment  $m_{xx}$  mit

$$m_{\varphi\varphi}|_{\Gamma_r} = m_{xx} \left[ 1 - \frac{2(1 + \nu)}{3 + \nu} \cos 2\varphi \right]$$

gegeben. Der griechische Buchstabe  $\nu$  steht dabei für die Querkontraktion, dies ist hier der einzige benötigte Materialparameter. Für die zweite Momentenbelastung durch das Biegemoment  $m_{yy}$  wird lediglich eine Koordinatentransformation von  $\varphi$  benötigt. Bei Belastung durch das Torsionsmoment  $m_{xy}$  in Abbildung 5.3 rechts entsteht am Lochrand das Moment

$$m_{\varphi\varphi}|_{\Gamma_r} = m_{xy} \frac{4(1 + \nu)}{3 + \nu} \sin 2\varphi.$$

Durch Superposition der Momente  $m_{xx}$ ,  $m_{yy}$  (aus  $m_{xx}$  um  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$  verdreht) und des Torsionsmoments  $m_{xy}$  ergibt sich ein Moment am Lochrand von

$$m_{\varphi\varphi}|_{\Gamma_r} = m_{xx} \left[ 1 - \frac{2(1 + \nu)}{3 + \nu} \cos 2\varphi \right] + m_{yy} \left[ 1 + \frac{2(1 + \nu)}{3 + \nu} \cos 2\varphi \right] + m_{xy} \frac{4(1 + \nu)}{3 + \nu} \sin 2\varphi. \quad (5.6)$$

Daraus wird mit der in der Dickenkoordinate linearen Verteilung der Spannung wie in (5.4) auf die Umfangsspannung am Lochrand geschlossen, die genau das Moment  $m_{\varphi\varphi}|_{\Gamma_r}$  erzeugt:

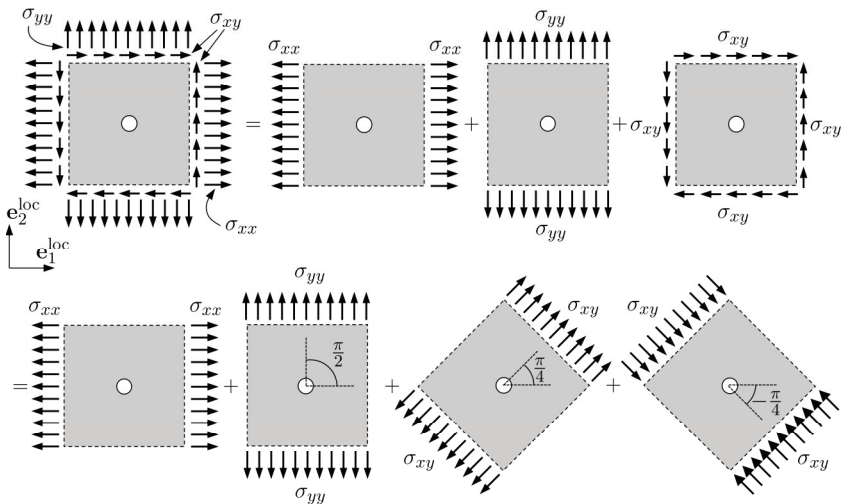
$$\sigma_{\varphi\varphi^{(p)}}(\varphi, z)|_{\Gamma_r} = 12 \frac{m_{\varphi\varphi}}{h^3} z. \quad (5.7)$$

Da der Lochrand belastungsfrei ist, können keine Normal- und Schubspannungen auftreten, wodurch auch kein Torsionsmoment  $m_{r\varphi}$  und kein Moment um den Lochrand  $m_{rr}$  entstehen kann.

Für die Scheibenbelastung wird von der Spannung  $\sigma_{\alpha\beta(s)}$  auf die Spannung in Umfangsrichtung am Lochrand geschlossen. Die Spannung in Umfangsrichtung entlang des Lochrandes unter einachsigen Zug kann mit der Airyschen Spannungsfunktion wie in Becker und Gross 2002 hergeleitet werden:

$$\sigma_{\varphi\varphi(s)}(\varphi) \Big|_{\Gamma_r} = \sigma_{xx} [1 - 2 \cos 2\varphi] .$$

Eine aufwändige Herleitung mit der Methode der komplexen Potentiale ist dafür nicht erforderlich. Der allgemeine ebene Spannungszustand  $\sigma_{xx(s)}$ ,  $\sigma_{yy(s)}$  und  $\sigma_{xy(s)}$  wird durch die vier superponierten Spannungszustände in Abbildung 5.5 zusammengesetzt. Dies sind die Spannung durch einachsigen Zug  $\sigma_{xx}$  (Abbildung 5.5 unten links), die um  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$  gedrehte einachsige Spannung  $\sigma_{yy}$  (Abbildung 5.5 unten, 2. von links) und die Zug- und Druck-Spannung (Abbildung 5.5 unten rechts), die den reinen Schub ersetzen. Der reine Schub wird mit der Normalspannung  $\sigma_{xy}$  um  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$  gedreht und der Normalspannung  $-\sigma_{xy}$  um  $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{4}$  gedreht erzeugt.



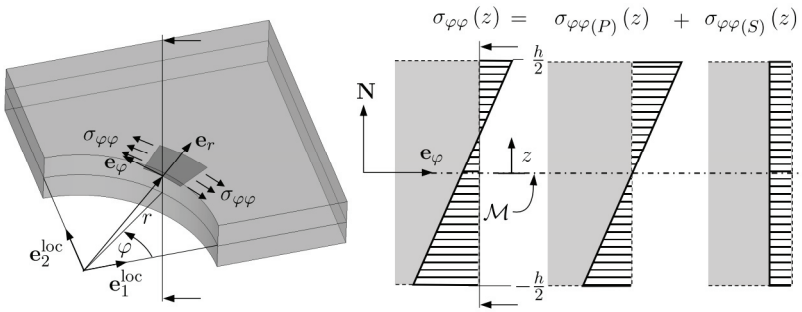
**Abbildung 5.5:** Überlagerung der Spannungszustände um den allgemeinen Spannungszustand abzubilden

Die Superposition aller Umfangsspannungen der Scheibenbelastung liefert die in der Dickenkoordinate konstante resultierende Umfangsspannung

$$\sigma_{\varphi\varphi(S)}(\varphi) \Big|_{\Gamma_r} = \sigma_{xx} [1 - 2 \cos 2\varphi] + \sigma_{yy} [1 + 2 \cos 2\varphi] - 4\sigma_{xy} \sin 2\varphi. \quad (5.8)$$

Die gesamte Spannung in Umfangsrichtung wird aus dem Scheiben- und dem Plattenspannungsteil (5.8) und (5.7) superponiert. Auch am Lochrand ergibt sich damit eine Zusammensetzung aus einem linearen und einem konstanten Teil, wie in Abbildung 5.6 dargestellt:

$$\sigma_{\varphi\varphi}(\varphi, z) \Big|_{\Gamma_r} = \sigma_{\varphi\varphi(S)}(\varphi) \Big|_{\Gamma_r} + \sigma_{\varphi\varphi(P)}(\varphi, z) \Big|_{\Gamma_r}. \quad (5.9)$$



**Abbildung 5.6:** Additive Berechnung der Spannung am Lochrand

*Anmerkung 5.1.1 (Spannung in der Umgebung des Lochs). In der Literatur werden prinzipiell zwei Vorgehen bei der Herleitung der Topologischen Ableitung verwendet (van Dijk et al. 2013): Sokolowski und Żochowski 1999 verwenden zwar auch die Verbindung zur Formableitung, jedoch wird das Randintegral in der materiellen Ableitung (4.10) nicht ausgewertet, sondern wird mit dem Übergang zum Limes der Topologischen Ableitung null, wenn die innere Funktion  $z$  beschränkt ist. Die Auswertung der zweiten Ableitung bringt dann die Topologische Ableitung. Allerdings ist dafür die Spannungsauswertung nicht nur auf dem Lochrand, sondern auch in einer Umgebung des Lochs nötig. Diese Methode ist mittlerweile in der linearen Theorie weiter verbreitet, da die analytischen Lösungen für alle Spannungskomponenten in der Umgebung des Lochs existieren.*

*Bei Eschenauer et al. 1994, Céa et al. 2000 und Burger et al. 2004 beispielsweise wird die Sensitivität über die Formableitung eines infinitesimalen Lochs direkt verwendet, so wie das auch in dieser Arbeit geschieht.*

### 5.1.3 Linear elastisches Materialverhalten

Für die Ermittlung der Spannungsverteilung wurde von den Materialeigenschaften bis zu diesem Punkt nur die Querkontraktion  $\nu$  benötigt. Für den Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen betrachten wir nun das Elastizitätsgesetz.

Der lineare Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und dem linearisierten Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  wird durch die konstitutive Gleichung

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (5.10)$$

mit dem Elastizitätstensor  $\mathbb{C}$  beschrieben.

*Schreibweise* (Tensoren vierter Stufe). Tensoren vierter Stufe, wie der Elastizitätstensor  $\mathbb{C}$ , werden mit Doppelstrich geschrieben, der Einheitstensor vierter Stufe mit  $\mathbb{1}$ .

Verschiedene Symmetrieeigenschaften reduzieren die Anzahl der unabhängigen Komponenten des Elastizitätstensors  $\mathbb{C}$  von  $3^4$  auf 21 und erlauben eine Darstellung mit den Laméschen Konstanten  $\psi$  und  $\mu$ :

$$\mathbb{C} = 2\mu\mathbb{1} + \psi(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}), \quad \mathbb{C}^{-1} = \frac{1}{2\mu} \left[ \mathbb{1} - \frac{\psi}{2\mu + d\psi} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right],$$

mit  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  und  $\psi = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  und dem Elastizitätsmodul  $E$ . Bei isotropem Materialverhalten und aufgrund der Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors kann das Elastizitätsgesetz in Voigtscher Notation in Vektor- und Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1-\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

und kompakt in symbolischer Schreibweise mit der Elastizitätsmatrix  $\mathbf{D}$  als

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

geschrieben werden. Die Spannung ist bei diesem linearen Gesetz nur eine Funktion der Verzerrung. Be- und Entlastung liegen auf dem gleichen Spannungspfad. Der Elastizitätstensor ist konstant.

*Schreibweise* (Tensoren in Voigtscher Notation). Durch die eindeutige Schreibweise mit der Elastizitätsmatrix  $\mathbf{D}$  und dem Elastizitätstensor  $\mathbb{C}$ , unterscheiden wir die Schreibweise der Tensoren  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}$  nicht von der Voigtschen Notation, da die Tensoren mit der Elastizitätsmatrix nur in Voigtscher Notation vorliegen können. Es besteht hier keine Verwechslungsgefahr.

Das Elastizitätsgesetz für die Kirchhoffsche Plattentheorie gleicht dem Elastizitätsgesetz des ebenen Spannungszustands (ESZ). Mit den Annahmen der Schubstarrheit  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$  und vernachlässigbar kleinen Normalspannungen in Dickenrichtung  $\sigma_{zz}$ , eingesetzt in das Elastizitätsgesetz (5.11), ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{D}_{(\text{ESZ})}} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Dieses Materialgesetz gilt wieder nur im lokalen tangentialen Platten- beziehungsweise Scheibenkoordinatensystem.

Im Zylinderkoordinatensystem am Lochrand ist der Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen in Umfangs- und Radialrichtung entsprechend

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \\ \varepsilon_{r\varphi} \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Der Elastizitätstensor für den ebenen Spannungszustand ist dann

$$\mathbb{C}_{(\text{ESZ})} = 2\mu \mathbb{1} + \psi_{(\text{ESZ})}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}), \quad \mathbb{C}_{(\text{ESZ})}^{-1} = \frac{1}{2\mu} \left[ \mathbb{1} - \frac{\psi_{(\text{ESZ})}}{2\mu + d\psi_{(\text{ESZ})}}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right],$$

mit  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  und  $\psi_{(\text{ESZ})} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}$ . Die inverse Elastizitätsmatrix des ebenen Spannungszustands ist

$$\mathbf{D}_{(\text{ESZ})}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{pmatrix},$$

womit sich die Verzerrungen in Abhängigkeit der Spannungen ausdrücken lassen:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_{(\text{ESZ})}^{-1} \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.14)$$

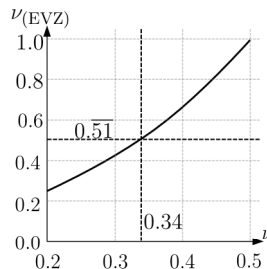
Die Scheibenkinematik entspricht eigentlich dem ebenen Verzerrungszustand (EVZ) und nicht dem ebenen Spannungszustand. Beim ebenen Verzerrungszustand verschwinden alle Verzerrungskomponenten in Dickenrichtung:  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ . Die Normalspannung  $\sigma_{zz}$  ist im Allgemeinen von null verschieden und kann durch die Querkontraktion aus den ebenen Spannungen berechnet werden  $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ . Mit dem sogenannten *Ersatz-Elastizitätsmodul*  $E_{(\text{EVZ})} = \frac{E}{1-\nu^2}$  und der *Ersatz-Querkontraktion*  $\nu_{(\text{EVZ})} = \frac{\nu}{1-\nu}$  kann das Elastizitätsgesetz für den ebenen Verzerrungszustand analog zu (5.12) mit

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E_{(\text{EVZ})}}{1 - \nu_{(\text{EVZ})}^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu_{(\text{EVZ})} & 0 \\ \nu_{(\text{EVZ})} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu_{(\text{EVZ})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

beschrieben werden (siehe Becker und Gross 2002).

Die genaue Modellierung und Berechnung von Schalen ist vom Finite-Elemente-Berechnungsprogramm abhängig. So gibt es Modellierungen in denen aktiv die Querschubverzerrungen unterdrückt werden, so dass die Annahme des ebenen Spannungszustands für Schalen im Linearen eine sehr gute Näherung ist (Wriggers 2001).

Die Spannungen am Lochrand sind nur durch die Querkontraktion vom Material abhängig. Der effektive Unterschied der Ersatz-Querkontraktion und der Querkontraktion kann im Graph der Ersatz-Querkontraktion in Abbildung 5.7 abgelesen werden. Bei einer Querkontraktion  $\nu = 0.34$  ist die Ersatz-Querkontraktion  $\nu_{(\text{EVZ})} = 0.5\overline{1}$  und bei  $\nu = 0.5$  ist  $\nu_{(\text{EVZ})} = 1.0$ .



**Abbildung 5.7:** Querkontraktion ebener Verzerrungszustand

Anmerkung 5.1.2 (Lineare Topologische Ableitung). Mit dem Elastizitätsgesetz können die Pseudolasten und die Adjungierte für die lineare Topologische Ableitung berechnet werden: Wir betrachten dazu die impliziten Ableitungsterme im adjungierten Gleichgewicht (4.39) in Anmerkung 4.3.3 auf Seite 93. Der linearisierte Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ist linear in der Verschiebung und damit ist auch die Spannung linear in der Verschiebung. Mit dem symmetrischen Elastizitätstensor  $\mathbb{C}$  kann das Skalarprodukt umgeformt werden

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda})), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right\rangle \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) \\
 &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right\rangle \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) \\
 &\stackrel{\phi = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r}}{=} \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) \\
 &= \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbb{C}^T \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) \\
 &= \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\lambda}) .
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Aus der rein geometrischen Information  $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda})$ , die von der Dimension her keine Verzerrung sein muss sondern abhängig vom Funktional ist, entsteht mit dem Elastizitätstensor eine „Spannung“  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\lambda})$ , die ebenfalls nicht die Dimension einer Spannung haben muss. Die räumliche Diskretisierung für das Integral auf dem Körper erfolgt mit der linearen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  aus Anmerkung 3.4.1 auf Seite 3.4.1.

Mit (5.16) beschreibt der adjungierte lineare Gleichgewichtoperator  $G^{\star \text{lin}}$  aus (4.39) wieder ein klassisches Randwertproblem der Form (3.33).

Im Falle linear elastischen Materialverhaltens und kleiner Verschiebungen und Verzerrungen kann die innere Energie noch vereinfacht werden. Die Formulierung der inneren Energie in der Momentankonfiguration mit der spezifischen Spannungsleistung in (4.67) geht für kleine Verschiebungen in die Beschreibung mit dem linearisierten Elastizitätstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , der in (3.11) definiert wurde, über. Mit dem Elastizitätsgesetz (5.10) kann die innere Energie ohne das Zeit- oder das Verzerrungsintegral ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}^{\text{lin}} &= \int_0^T \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \, d\Omega \, dt \stackrel{\text{lin.}}{=} \int_0^T \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega \, dt = \int_{\Omega} \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{d} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega .
 \end{aligned}$$

In diesem Zusammenhang wird die innere Energie auch als Formänderungsenergie bezeichnet. Die Pseudo-Last der Formänderungsenergie lässt sich vereinfachen:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial \mathcal{J}_\sigma^{\text{lin}}}{\partial r} \right)_I &= \frac{1}{2} \int_\Omega \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right\rangle d\Omega \\
 &= \frac{1}{2} \int_\Omega \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right\rangle \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right\rangle d\Omega \\
 &= \frac{1}{2} \int_\Omega \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right\rangle \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) d\Omega \\
 &= \frac{1}{2} \int_\Omega \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) d\Omega \\
 &= \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) d\Omega.
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Das lineare adjungierte Gleichgewichtsfunktional der inneren Energie kann durch die Pseudolast (5.16) und (5.17) eingesetzt in (4.39) angegeben werden

$$\left\langle G^{\star \text{lin}}(\boldsymbol{\lambda}_\sigma^{\text{lin}}(\Omega), \Omega), \boldsymbol{\phi} \right\rangle = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\lambda}_\sigma^{\text{lin}}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) d\Omega = 0.$$

Die Lösung für die Adjungierte ist somit ohne weitere Berechnung

$$\boldsymbol{\lambda}_\sigma^{\text{lin}} = -\mathbf{u}.$$

Für das Verschiebungsfunktional aus Anmerkung 4.5.2 auf Seite 119 muss die adjungierte Zustandsgleichung gelöst werden. Diese ergibt sich aus der Ableitung des um das lineare Gleichgewicht erweiterten Funktionals

$$\begin{aligned}
 \left\langle G^{\star \text{lin}}(\boldsymbol{\lambda}_u^{\text{lin}}(\Omega), \Omega), \boldsymbol{\phi} \right\rangle &= \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}) \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_*} + \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\lambda}_u^{\text{lin}}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\phi}) d\Omega \\
 &\approx \mathbf{1}^T \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\lambda}_u^{\text{lin}T} \mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = 0.
 \end{aligned}$$

Da die Volumenkräfte von der Verschiebung nicht abhängen können, spielen diese bei der Lösung des adjungierten Gleichgewichts keine Rolle. Die Adjungierte des linearen Verschiebungsfunktional ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\lambda}_u^{\text{lin}} + \mathbf{1} = \mathbf{0}.$$

Die Dimensionen der linearen Adjungierten sind

$$\dim(\boldsymbol{\lambda}_\sigma^{\text{lin}}) = \text{L} \quad \text{und} \quad \dim(\boldsymbol{\lambda}_u^{\text{lin}}) = \text{T}^2 \cdot \text{M}^{-1}.$$



Die explizite Ableitung der inneren Energie ist

$$\left(\frac{\partial \mathcal{J}_\sigma^{\text{lin}}}{\partial r}\right)_E = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_r} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\Gamma. \quad (5.18)$$

Damit kann die Topologische Ableitung für das Energie-Funktional bis auf die Auflösung des Randintegrals schon angegeben werden

$$\mathcal{TJ}_\sigma^{\text{lin}} = \lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{d |c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr} \right)^{-1} \frac{1}{2} \int_{\Gamma_r} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - 2\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma. \quad (5.19)$$

Und die Topologische Ableitung des Verschiebungsfunktionals im linearen ist

$$\mathcal{TJ}_u^{\text{lin}} = -\lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{d |c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr} \right)^{-1} \int_{\Gamma_r} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}_u^{\text{lin}}) - \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\lambda}_u^{\text{lin}} \, d\Gamma. \quad (5.20)$$

Die Auflösung erfolgt speziell für die Schalenformulierung mit den Umfangsspannungen (5.9) in den Abschnitten 5.3 und 5.4.

### 5.1.4 Erweiterung auf nichtlineare Problemstellungen

Betrachtet man eine Schale unter großer Durchbiegung, so krümmt sich die Struktur und ist dann sowohl durch Membran- als auch durch Biegespannungen gekennzeichnet. Durch diese Kopplung ist die getrennte Betrachtung von Platten- und Scheibenbelastung nicht mehr möglich. Auch die in Abschnitt 5.1.2 beschriebenen Lochspannungen haben ihre Gültigkeit nur unter den Voraussetzungen kleiner Verzerrungen und linear elastischen Materialverhaltens. In diesem Abschnitt gehen wir im Speziellen auf die durch nichtlineares Materialverhalten induzierte Gültigkeitsgrenze ein.

Der sogenannte *Spannungskonzentrationsfaktor*<sup>1</sup>  $k$  wird durch das Verhältnis der maximal auftretenden Umfangsspannung am Aussparungsrand

$$\sigma^* = \max_{\varphi \in [0, 2\pi], z \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \sigma_{\varphi\varphi}(\varphi, z)$$

zur Spannung in der Mikrozele ohne Aussparung  $\sigma_0$  beschrieben:

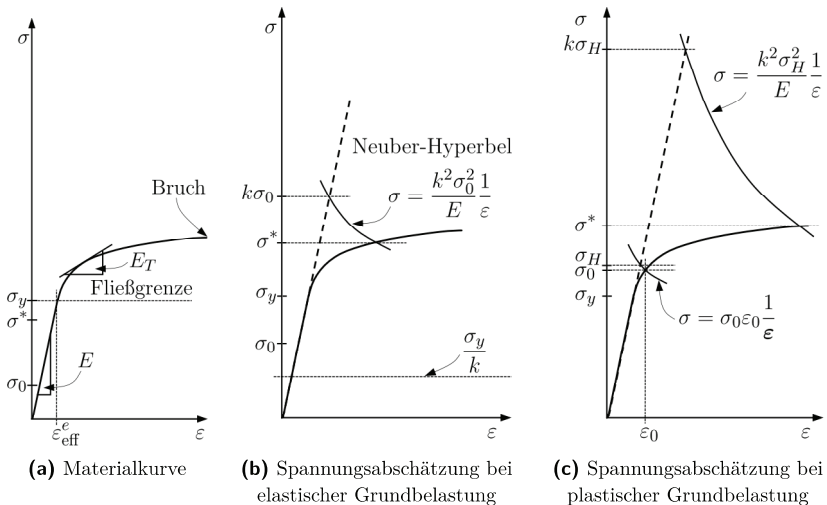
$$k = \frac{\sigma^*}{\sigma_0}.$$

<sup>1</sup>auch „Kerbfaktor“ oder „Formzahl“ genannt

Exemplarisch betrachten wir eine Mikrozeile, die nur durch die Spannung  $\sigma_{xx(s)} = \sigma_0$ , also durch eine einachsige Zugspannung belastet wird. Der Spannungskonzentrationsfaktor kann aus der Formel für die Umfangsspannung der Scheibenbelastung (5.8) ermittelt werden. Das Maximum nimmt die Umfangsspannung bei  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  an. In diesem Fall ist  $k = 3$ .

Wir diskutieren diesen Spannungskonzentrationsfaktor nun anhand des nichtlinearen Materialverhaltens. Eine allgemeine Spannungs-Dehnungs-Kurve für duktiles Materialverhalten mit linear elastischem Materialgesetz bis zur Fließgrenze<sup>2</sup>  $\sigma_y$  und isotroper Verfestigung bei plastischer Verformung bis zum Bruch ist in Abbildung 5.8a skizziert. Unstetige Verläufe der Spannungs-Dehnungs-Kurve, die beispielsweise bei weichen Stählen durch Fließen nach Erreichen der Streckgrenze auftreten, werden hier nicht berücksichtigt.

Die eingezeichnete Spannung  $\sigma_0$  erzeugt am Rand der Aussparung in der Mikrozeile eine maximale Umfangsspannung  $\sigma^* = 3\sigma_0$ . In Abbildung 5.9a ist eine Mikrozeile unter einachsigem Zug dargestellt. Die Einfärbung nach der von Miseschen Vergleichsspannung wird hier gewählt, da diese am Lochrand gleich der Umfangsspannung ist und in hinreichender Entfernung von der Aussparung dem homogenen Spannungszustand der äußeren Spannungsbelastung entspricht.



**Abbildung 5.8:** Spannungsabschätzung nach Neuber

<sup>2</sup>Der Index  $y$  steht für die englische Übersetzung *yield stress*. In der deutschsprachigen Literatur wird zum Teil auch die Bezeichnung  $\sigma_F$  verwendet (Gross und Seelig 2016).

von Misesche Vergleichsspannung  
in GPa

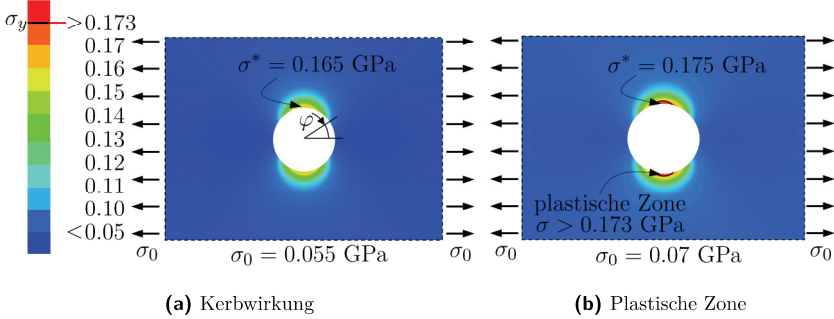


Abbildung 5.9: Spannungsverteilung am Lochrand unter einachsigen Zug

Übersteigt die äußere Spannung die Grenze  $\sigma_0 > \frac{\sigma_y}{k}$ , dann läge nach der linearen Theorie die maximale Umfangsspannung am Aussparungsrand oberhalb der Fließgrenze, bei genügend großer Spannung  $\sigma_0$  sogar oberhalb der Bruchspannung, wie in Abbildung 5.8b eingezeichnet. Zunächst erzeugt die außen angelegte Spannung plastische Dehnung im Kerbgrund bei  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ , wodurch die Umfangsspannung nicht auf das dreifache der äußeren Spannung ansteigen kann. In Abbildung 5.9b ist die plastische Zone hervorgehoben und die maximale Umfangsspannung für dieses Beispiel angegeben. Obwohl die plastische Zone klein ist, ist der Unterschied zwischen der erwarteten dreifachen äußeren Spannung und der tatsächlichen maximalen Spannung sehr groß. Für diesen Fall existiert zwar eine Näherungslösung von Sawin 1956, die noch die Spannungsverteilung am Lochrand angeben kann, allerdings nur für den Fall einer konstanten Fließgrenze (ideal plastisches Materialverhalten), also ohne isotrope Verfestigung. Die Spannungsberechnungen aus Abschnitt 5.1.2 können nicht mehr zur exakten Berechnung der Integrale herangezogen werden. Mit der *Neuber-Regel* (nach Neuber 1961) kann zumindest noch eine Abschätzung der maximalen Spannung angegeben werden:

Wäre die außen angelegte Spannung  $\sigma_0$  ohne das Loch noch elastisch zu ertragen, so ergibt sich die Spannung im Kerbgrund aus dem Schnittpunkt der *Neuber-Hyperbel*  $\sigma = \frac{k^2 \sigma_0^2}{E} \frac{1}{\epsilon}$  mit der Spannungs-Dehnungs-Kurve, wie in Abbildung 5.8b skizziert.

Für den Fall, dass die angelegte Spannung  $\sigma_0$  auch ohne Loch nicht mehr elastisch ertragen würde, wird zunächst ausgehend von der Spannung  $\sigma_0$  auf der Spannungs-Dehnungs-Kurve der Schnittpunkt  $\sigma_H$  der Neuberhyperbel  $\sigma = \sigma_0 \epsilon_0 \frac{1}{\epsilon}$  mit der verlängerten elastischen Geraden gesucht, wie in Abbildung 5.8c darge-

stellt. Diese elastische vergrößerte Nennspannung  $\sigma_H$  wird mit dem Kerbfaktor multipliziert und ausgehend von dieser Spannung auf der elastischen Geraden wieder die Neuber-Hyperbel mit der Spannungs-Dehnungs-Kurve geschnitten, so wie im Fall der elastisch ertragbaren Spannung.

Weitere Untersuchungen aus dem Bereich der Betriebsfestigkeit beschäftigen sich ebenfalls mit der Abschätzung der maximal auftretenden Spannung, wie beispielsweise die Arbeiten von Seeger und Heuler 1980; Hoffmann und Seeger 1985a; Hoffmann und Seeger 1985b und Hoffmann und Seeger 1989.

Die Grenze der analytischen Formeln bei der Berechnung der Topologischen Ableitung liegt in den Randintegralen. Es wird auf dem ganzen Aussparungsrand der Spannungsverlauf benötigt, nicht nur isoliert am Punkt der maximalen Umfangsspannung. Im Unterschied zur linearen Statik und Dynamik, wenn die Verschiebungen klein sind und das lineare Elastizitätsgesetz gilt, können der explizite Ableitungsterm der inneren Energie (4.34) und die Ableitung der gemischt adjungierten Energie (4.35) bei geometrischer Nichtlinearität und nichtlinearem Materialverhalten also nicht weiter analytisch vereinfacht werden.

In Weider und Schumacher 2016 wird zur numerischen Auswertung das Mikrozellenmodell eingeführt. Dieses Modell ersetzt das Randintegral der expliziten materiellen Ableitung der inneren Energie durch ein Berechnungsmodell, das nur vom Material und der Schalendicke abhängig das gesamte Randintegral abbildet und damit für beliebige Lastfälle gültig ist. In einem separaten Simulationsmodell einer Scheibe mit Loch wird unter verschiedenen Zug- und Druckbelastungen das Integral der spezifischen inneren Energie auf dem Rand ausgewertet. Eine hohe Anzahl an Rechnungen von variablen Spannungskombinationen ist die Grundlage für ein Meta-Modell mit kubischen Splines, das dann bei der Auswertung der Sensitivität in Abhängigkeit der Schnittgrößen des Anfangsrandwertproblems direkt den (negativen) expliziten Ableitungsterm der inneren Energie (4.74) liefert.

Bei der Ableitung der gemischt adjungierten Energie muss neben dem Deformationsgradienten  ${}^u\mathbf{F}$  und der Spannung der Zustandslösung  ${}^u\mathbf{S}$  auch der Gradient der Adjungierten Grad  $\boldsymbol{\lambda}$  ausgewertet werden können. Da letzterer von den Pseudolasten des Funktionals abhängt, kann das Berechnungsmodell nicht mehr wie in Weider und Schumacher 2016 für beliebige Lastfälle aufgestellt werden.

## 5.2 Materialinterpolation bei plastischer Dehnung

Mit dem Ziel, die linearen Formeln für die Umfangsspannung (5.6) und (5.8) näherungsweise mit veränderten Materialparametern auch für nichtlineares Materialverhalten zu verwenden, entwickeln wir in diesem Abschnitt eine phänomenologische Materialinterpolation. Die grundsätzliche Idee dabei ist: Zu jedem Zeitpunkt liegt durch die linearisierte Lösung mittels impliziter Zeitintegration ein temporär lineares Materialverhalten vor, das mit der Materialinterpolation nachgebildet wird.

*Annahme 5.2.1* (Temporär linear elastisches Materialverhalten).

Die adjungierte Lösung  $\lambda$  verhält sich zum Zeitpunkt  $t^{(k)}$  aufgrund der Berechnung mit der Tangentensteifigkeit  $\mathbf{K}_T^{(k)}$  zeitlich begrenzt (temporär) linear.

Das temporäre Material in der tangentialen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T^{(k)}$  wird durch den Tangentenmodul  $E_T$  und eine effektive Querkontraktion  $\nu_{\text{eff}} \in [\nu, 0.5]$  charakterisiert.

Zunächst wird die Materialinterpolation für die Querkontraktion gezeigt und anschließend die Berechnung des Tangentenmoduls erläutert.

Die Querkontraktion  $\nu$  wird nur für den elastischen Bereich eines Materials angegeben. Da plastische Dehnungen volumenkonstant sind, ist die Querkontraktion für reine plastische Dehnung gleich 0.5. Bei plastischer Dehnung dominiert der plastische Anteil sehr schnell die Gesamtdehnung, da der elastische Dehnungsbereich bei metallischen Werkstoffen nur sehr klein ist. Bei zunehmender plastischer Dehnung muss also die effektive Querkontraktion  $\nu_{\text{eff}}$  von der elastischen Querkontraktion  $\nu$  auf die plastische Querkontraktion 0.5 ansteigen.

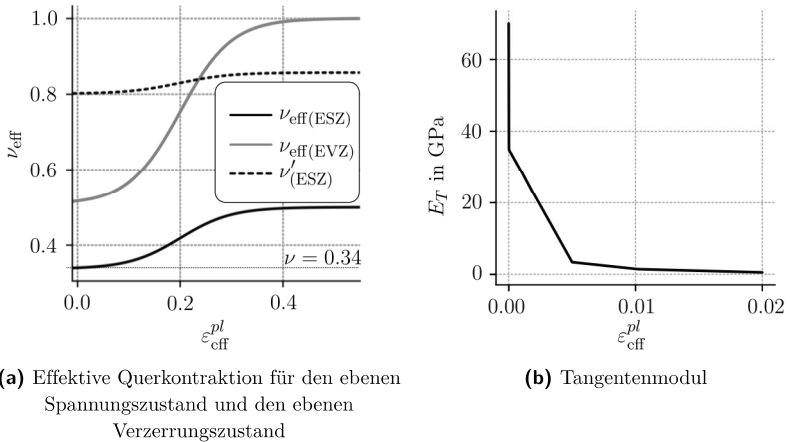
Die effektive plastische Dehnung  $\varepsilon_{\text{eff}}^{\text{pl}}$  wird bei der Materialberechnung im Finite-Elemente-Berechnungsprogramm inkrementell aufsummiert und liegt als einachsige Vergleichsdehnung für jeden Integrationspunkt vor. Mit einer stetig differenzierbaren Sprungfunktion mit der Konstanten  $s_1$  für die Steilheit, der Konstanten  $s_2$  für die Verschiebung entlang der Achse der plastischen Dehnung und der Fließverzerrung  $\varepsilon_{\text{eff}}^e = \frac{\sigma_y}{E}$  wird beim Erreichen der Fließgrenze und damit bei beginnender nichtproportionaler plastischer Dehnung ein glatter Übergang auf die plastische Querkontraktion erreicht

$$\nu_{\text{eff}(\text{ESZ})} := \frac{0.5 + \nu}{2} + \frac{0.5 - \nu}{2} \tanh \left( s_1 \left( \varepsilon_{\text{eff}}^{\text{pl}} - s_2 \varepsilon_{\text{eff}}^e \right) \right). \quad (5.21)$$

In den folgenden Beispielen werden die Konstanten mit  $s = 10$  und  $s_2 = 75$  gewählt. Der Vollständigkeit halber geben wir die interpolierte Ersatz-Querkontraktion auch für den ebenen Verzerrungszustand an:

$$\nu_{\text{eff(EVZ)}} := \frac{1.0 + \nu(\text{EVZ})}{2} + \frac{1.0 - \nu(\text{EVZ})}{2} \tanh\left(s_1 \left(\varepsilon_{\text{eff}}^{\text{pl}} - s_2 \varepsilon_{\text{eff}}^e\right)\right). \quad (5.22)$$

Hier wären auch einfachere stetige Modellierungen denkbar, allerdings erhöht dies die Gefahr möglicher nichtglatter Übergänge in der Topologischen Ableitung bei der späteren Anwendung. In Abbildung 5.10a sind die Graphen der effektiven Querkontraktion für den ebenen Spannungszustand und für den ebenen Verzerrungszustand bei einer elastischen Querkontraktion von  $\nu = 0.34$  skizziert.



**Abbildung 5.10:** Materialinterpolation

*Schreibweise.* Für den bei der Momentenberechnung häufig auftretenden Faktor wird noch eine Abkürzung eingeführt:

$$\nu'_{\text{(ESZ)}} := \frac{2(1 + \nu_{\text{eff(ESZ)}})}{3 + \nu_{\text{eff(ESZ)}}}.$$

Die Erhöhung der Fließgrenze in Abhängigkeit der effektiven plastischen Dehnung, also die Verfestigung, ist in dem in dieser Arbeit verwendeten Aluminium-Materialmodell<sup>3</sup> als stückweise lineare Funktion gegeben.

<sup>3</sup>Typ \*MAT\_024 in LS-Dyna®

Eine Tabelle gibt Wertepaare  $(\varepsilon_{\text{eff}}^{pl}, \tilde{\sigma}_y)$  der effektiven plastischen Dehnung und der effektiven Spannung an. Die effektive Spannung ist während des Fließens gleich der zeitlich lokalen Fließspannung  $\tilde{\sigma}_y$ . Zwischen den Wertepaaren wird linear interpoliert. Der plastische Modul  $E_p$  wird als die Steigung dieser Kurve genommen. Dieser ist also zwischen zwei Stützstellen konstant:

$$E_p = \frac{\Delta \tilde{\sigma}_y (\varepsilon_{\text{eff}}^{pl})}{\Delta \varepsilon_{\text{eff}}^{pl}}. \tag{5.23}$$

In Abbildung 5.11 sind die Wertepaare aus der Tabelle als Graph der stückweise linearen Funktion der Fließgrenze dargestellt. Alle weiteren verwendeten Materialparameter sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst.

Der Tangentenmodul  $E_T$  der Spannungs-Dehnungs-Kurve in Abbildung 5.8a spiegelt die lokale Steigung der Spannung bezüglich der Gesamtverzerrung wider. Der plastische Modul  $E_p$  ist die Steigung der Spannung bezüglich der effektiven plastischen Dehnung wie in Abbildung 5.11. Nach Bathe 2002 kann der Tangentenmodul  $E_T$  aus dem plastischen Modul berechnet werden:

$$E_T = \frac{E_p E}{E_p + E}. \tag{5.24}$$

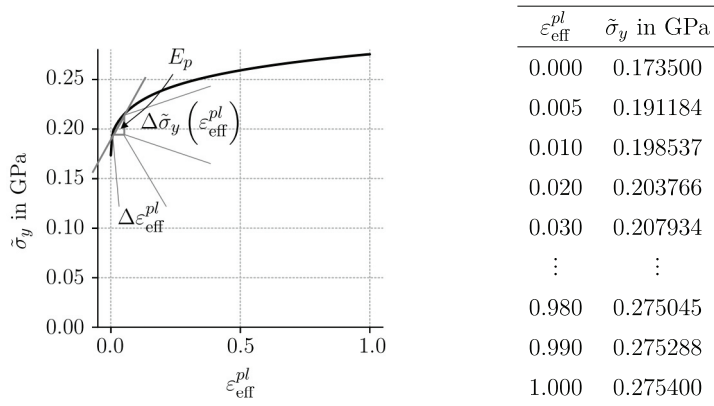
Dieser Tangentenmodul wird erst bei Erreichen der plastischen Dehnung verwendet. Ohne plastische Dehnung wird der Elastizitätsmodul  $E$  verwendet, so dass sich schließlich der in Abbildung 5.10b dargestellte Verlauf der effektiven Tangentensteifigkeit ergibt.

**Tabelle 5.1:** Materialparameter des verwendeten Aluminiums

Materialparameter		
Elastizitätsmodul	$E$	70.0 GPa
Querkontraktion	$\nu$	0.34
Dichte	$\rho$	$2.75 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$

Mit den Interpolationen der effektiven Querkontraktion (5.21) und des Tangentenmoduls (5.24) wird für jeden Dickenintegrationspunkt ein diskreter Wert ermittelt. Für das „durchschnittliche elastische Verhalten“ werden der durchschnittliche Tangentenmodul und die durchschnittliche effektive Querkontraktion verwendet

$$\bar{E}_T := \frac{1}{n_{\text{NIP}}} \sum_{k=1}^{n_{\text{NIP}}} E_T(z), \quad \bar{\nu} := \frac{1}{n_{\text{NIP}}} \sum_{k=1}^{n_{\text{NIP}}} \nu_{\text{eff}}(z) \quad \text{und} \quad \bar{\nu}' := \frac{2(1 + \bar{\nu})}{3 + \bar{\nu}}. \tag{5.25}$$



**Abbildung 5.11:** Fließgrenze über effektiver plastischer Dehnung

Anders als beim integrativen Durchschnitt mit numerischer Integration bezüglich der Dickenkoordinate und anschließender Division durch die Schalendicke, werden die Schalenober- und -unterseite gleich mit der Schalenmittelfläche gewichtet. Bei der numerischen Integration würde der Einfluss der plastischen Dehnung verloren gehen, der – wenn durch Biegung induziert – an der Schalenober- und -unterseite am größten ist. Dort ist der Abfall in der Tangentensteifigkeit daher am deutlichsten.

Die hier entwickelte Materialinterpolation versteht sich als die Interpolation der Materialeigenschaften unter plastischer Verformung und ist nicht zu verwechseln mit Materialinterpolationen bei Dichtemethoden, wo die Materialeigenschaften auf ein künstliches Material mit geringerer Dichte übertragen werden.

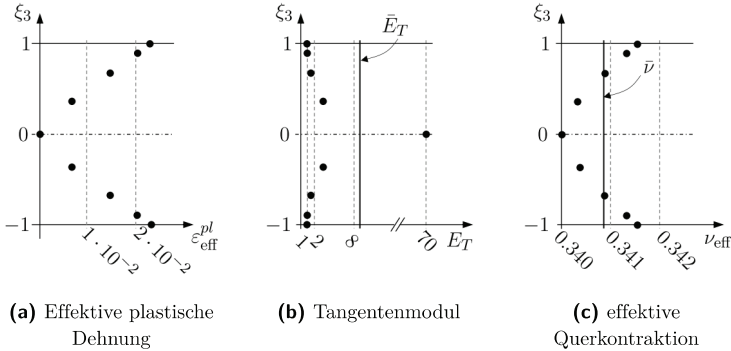
Da die tatsächliche Materialberechnung im Finite-Elemente-Berechnungsprogramm geschieht, ohne dass der Benutzer die Daten einsieht, basiert diese Interpolation nur auf den phänomenologischen Beobachtungen. Bei genauerer Kenntnis der Materialberechnung können die Materialinterpolationen deutlich verbessert werden.

*Beispiel 5.2.1* (Materialinterpolation).

Bei der Lösung des Anfangsrandwertproblems der Kontinuumsmechanik wird für jeden Integrationspunkt die effektive plastische Dehnung ermittelt. In Abbildung 5.12a ist diese beispielhaft für einen Zeitpunkt in Abhängigkeit der Dickenparametrisierung



dargestellt. Im Diagramm in Abbildung 5.12b sind die Werte der Interpolationsformeln des Tangentenmoduls (5.24) und in Abbildung 5.12c der effektiven Querkontraktion (5.21) aufgetragen. Außerdem ist in den Diagrammen jeweils die gemittelte Materialeigenschaft  $\bar{E}_T$  und  $\bar{\nu}$  aus (5.25) markiert. Schon bei kleinen plastischen Dehnungen fällt der Tangentenmodul sehr schnell bis auf Werte im Bereich von 1 ab, während die effektive Querkontraktion sehr viel träger ansteigt und in diesem Beispiel in keinem Integrationspunkt die plastische Querkontraktion von 0.5 erreicht.



**Abbildung 5.12:** Temporäre Materialinterpolation auf Basis der Lösung des Anfangsrandwertproblems

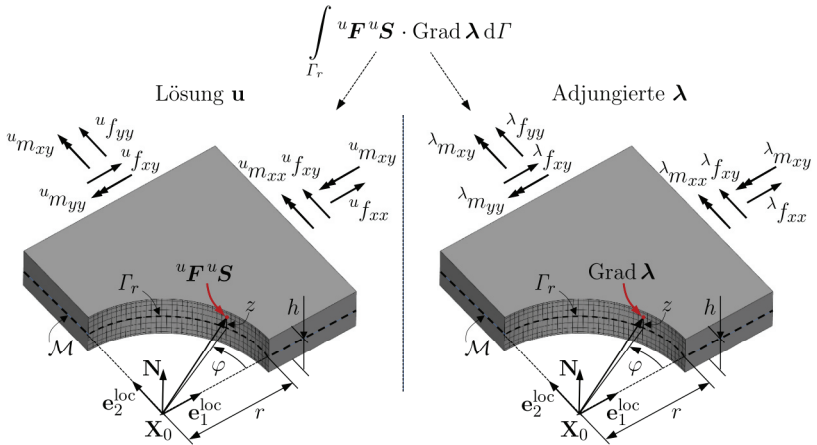
### 5.3 Berechnungsmodell der Ableitung der gemischt adjungierten Energie

Die Materialinterpolation soll nun zur Auswertung der Randintegrale der materiellen Ableitung verwendet werden. Wir betrachten zuerst die Ableitung der gemischt adjungierten Energie

$$- \left( \frac{d |c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr} \right)^{-1} \int_0^T \int_{\Gamma_r} {}^u \mathbf{F} {}^u \mathbf{S} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma \, dt.$$

Diese ist einerseits vom Deformationsgradienten  ${}^u \mathbf{F}$  und dem 2. Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor  ${}^u \mathbf{S}$  der Lösung des Anfangsrandwertproblems, andererseits

vom Gradienten der Adjungierten Grad  $\lambda$  abhängig. In Abbildung 5.13 ist die Dekomposition in die Zustands- und die adjungierte Lösung und die jeweiligen resultierenden Schnittgrößen an der Mikrozelle gezeigt.



**Abbildung 5.13:** Dekomposition der Ableitung der gemischt adjungierten Energie in Zustands- und adjungierte Lösung auf dem Rand der Aussparung

### 5.3.1 Konstruktion der Koordinatensysteme in den Momentankonfigurationen der Verschiebung und der Adjungierten

Beziehen wir das Randintegral auf die Momentankonfiguration des Anfangswertproblems, kann mit der Skalarprodukteigenschaft und dem symmetrischen Cauchyschen Spannungstensor (3.32) die Ableitung der gemischt adjungierten Energie auf dem durch die Verschiebung  $\mathbf{u}$  verzerrten Lochrand formuliert werden

$$\int_{\Gamma_r} {}^u \mathbf{F}^u \mathbf{S} \cdot \text{Grad } \lambda \, d\Gamma = \int_{\Gamma_r(t)} {}^u \boldsymbol{\sigma} \cdot \lambda \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Gamma. \quad (5.26)$$

Aus der Lösung des adjungierten Endwertproblems wird der Gradient der Adjungierten, beziehungsweise der adjungierte infinitesimale Verzerrungstensor  $\lambda \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\lambda)$  benötigt.

Anhand der Spannungslösungen aus Abschnitt 5.1.2 liegt es nahe, auch ein Berechnungsmodell für die Ableitung der gemischt adjungierten Energie in Abhängigkeit der vorliegenden Schnittgrößen zu konstruieren. In beiden Fällen sollen die Größen am Aussparungsrand in Abhängigkeit der Schnittgrößen aus einem Berechnungsmodell entnommen und dann als Skalarprodukt auf dem Lochrand integriert werden.

Die adjungierten Lochrandgrößen müssten dann noch auf den Lochrand in der Momentankonfiguration des Anfangsrandwertproblems transformiert werden. Des Weiteren müsste, um eine gemeinsame Parametrisierung des Lochrandes zu erreichen, die genaue Verzerrung des Lochrandes durch die Verschiebung bekannt sein. Bekannt ist jedoch nur die makroskopische Verschiebung der Mikrozelle, nicht die Verformung des Lochs durch die Verzerrung. Daher treffen wir die vereinfachende Annahme, dass die Integration auf einem unverzerrten Loch  $\Gamma_r$  durchgeführt wird. Dieser Aspekt wird auch am Ende des Kapitels bei der Berechnung der Ableitung des Trägheitsterms nochmals aufgegriffen.

*Annahme 5.3.1 (Undeformierte Aussparung).*

Die Integration der Ableitung der gemischt adjungierten Energie und im Weiteren auch der expliziten Ableitung der inneren Energie wird mit der Transformationsformel für die Integration auf Untermannigfaltigkeiten (siehe Anhang B.1.2) auf dem undeformierten Zylinderausschnitt durchgeführt

$$\int_{\Gamma_r(t)} u_{\sigma} \cdot \lambda_{\varepsilon} d\Gamma \approx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} u_{\sigma} \cdot \lambda_{\varepsilon} r d\varphi dz. \quad (5.27)$$

Die Zusammenführung der Spannungen aus dem Anfangsrandwertproblem mit dem adjungierten linearisierten Verzerrungstensor geschieht im schalentangentialen Koordinatensystem  $\mathcal{E}^{\text{loc}}$ , das in (3.53) auf Seite 53 definiert wurde. Sowohl für die Verschiebung  $\mathbf{u}$  als auch für die Adjungierte  $\boldsymbol{\lambda}$  ist dieses Koordinatensystem nicht mehr schalentangential in der jeweiligen Momentankonfiguration. Da die Adjungierte und die Verschiebung keine Gemeinsamkeit haben müssen, wird die Lage des Tangentenvektors  $\mathbf{A}_1$ , aus dem der Vektor  $\mathbf{e}_1^{\text{loc}}$  ermittelt wird, als Bezugslage verwendet. Dadurch ist eine gemeinsame Parametrisierung mit der Winkellage  $\varphi = 0$  auf dem Tangentenvektor festgelegt. In Abbildung 5.14 ist skizziert, wie der Tangentenvektor  $\mathbf{A}_1$  in die Momentankonfigurationen  ${}^u\mathbf{a}_1$  und  ${}^{\lambda}\mathbf{a}_1$  transformiert und dort zur Konstruktion der Basissysteme verwendet wird. Die

Basissysteme sind zeit- und ortsabhängig und müssen sowohl für die Verschiebung als auch für die Adjungierte berechnet werden.

Die Tangentenvektoren in der Momentankonfiguration des Anfangsrandwertproblems werden mit

$${}^u\mathbf{e}_1^{\text{loc}} = \frac{{}^u\mathbf{a}_1}{\|{}^u\mathbf{a}_1\|_2}, \quad {}^u\mathbf{n} = \frac{{}^u\mathbf{a}_1 \times {}^u\mathbf{a}_2}{\|{}^u\mathbf{a}_1 \times {}^u\mathbf{a}_2\|_2} \quad \text{und} \quad {}^u\mathbf{e}_2^{\text{loc}} = {}^u\mathbf{n} \times {}^u\mathbf{e}_1^{\text{loc}}$$

ermittelt und bilden in der Reihenfolge

$${}^u\mathcal{E}^{\text{loc}} = \{ {}^u\mathbf{e}_1^{\text{loc}}, {}^u\mathbf{e}_2^{\text{loc}}, {}^u\mathbf{n} \}$$

das Orthonormalsystem  ${}^u\mathcal{E}^{\text{loc}}$ . Die Transformation von Matrizen und Tensoren vom globalen kartesischen Koordinatensystem in das lokale Orthonormalsystem erfolgt mit der Matrix  ${}^u\mathbf{E}^{\text{loc}}$ , die sich aus dem 3-Tupel der Basisvektoren zusammensetzt:

$${}^u\mathbf{E}^{\text{loc}} = ( {}^u\mathbf{e}_1^{\text{loc}}, {}^u\mathbf{e}_2^{\text{loc}}, {}^u\mathbf{n} ). \quad (5.28)$$

*Schreibweise* (Tensoren bezüglich eines Basissystems). Werden Tensoren in einem anderen als dem globalen kartesischen Koordinatensystem dargestellt, werden sie mit einem Index links unten mit dem Bezugssystem versehen  ${}^u\mathcal{E}^{\text{loc}}$ .

Die Darstellung eines Tensors  $\mathbf{T}$  bezüglich der lokalen Basis wird durch die Ähnlichkeitstransformation

$${}^u\mathcal{E}^{\text{loc}} \mathbf{T} = {}^u\mathbf{E}^{\text{loc}T} {}_{\mathcal{E}^{\text{glob}}} \mathbf{T} {}^u\mathbf{E}^{\text{loc}} \quad (5.29)$$

ermittelt (siehe zum Beispiel Göllmann 2020).

Äquivalent dazu wird das Basissystem für die Adjungierte durch die adjungierten Tangentenvektoren

$${}^\lambda\mathbf{e}_1^{\text{loc}} = \frac{{}^\lambda\mathbf{a}_1}{\|{}^\lambda\mathbf{a}_1\|_2}, \quad {}^\lambda\mathbf{n} = \frac{{}^\lambda\mathbf{a}_1 \times {}^\lambda\mathbf{a}_2}{\|{}^\lambda\mathbf{a}_1 \times {}^\lambda\mathbf{a}_2\|_2} \quad \text{und} \quad {}^\lambda\mathbf{e}_2^{\text{loc}} = {}^\lambda\mathbf{n} \times {}^\lambda\mathbf{e}_1^{\text{loc}}$$

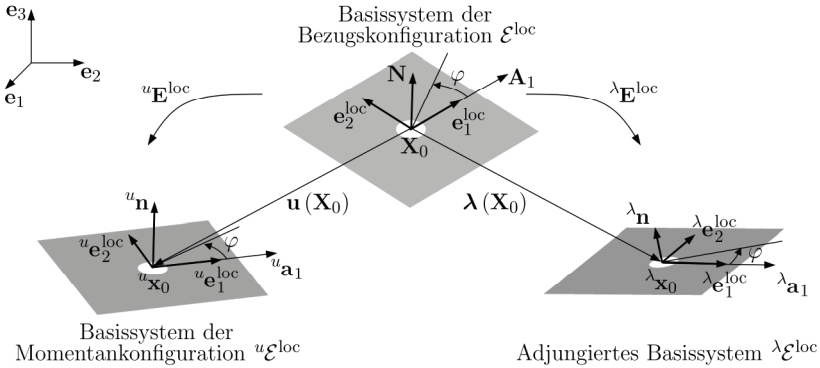
definiert. Die Vektoren bilden in der Reihenfolge

$${}^\lambda\mathcal{E}^{\text{loc}} = \{ {}^\lambda\mathbf{e}_1^{\text{loc}}, {}^\lambda\mathbf{e}_2^{\text{loc}}, {}^\lambda\mathbf{n} \}$$

das adjungierte Orthonormalsystem  ${}^\lambda\mathcal{E}^{\text{loc}}$ . Die Ermittlung der adjungierten Tangentenvektoren  ${}^\lambda\mathbf{a}_1$  und  ${}^\lambda\mathbf{a}_2$  wird bei der Konstruktion des adjungierten linearisierten Verzerrungstensors erläutert. Die Transformationsmatrix für das adjungierte Basissystem ist entsprechend das 3-Tupel aus den adjungierten Basisvektoren

$${}^\lambda\mathbf{E}^{\text{loc}} = ( {}^\lambda\mathbf{e}_1^{\text{loc}}, {}^\lambda\mathbf{e}_2^{\text{loc}}, {}^\lambda\mathbf{n} ). \quad (5.30)$$

Bisher haben wir alle Vektoren und Tensoren im globalen kartesischen Koordinatensystem dargestellt. Für die richtige Umrechnung in die unterschiedlichen Basissysteme müssen die Tensoren den schalentangentialen Systemen eindeutig zugeordnet werden.



**Abbildung 5.14:** Gemeinsames Bezugskordinatensystem  $\mathcal{E}^{\text{loc}}$  für die Spannungen und den adjungierten Deformationsgradienten

Wir betrachten im nächsten Abschnitt zunächst nur den Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  des Anfangsrandwertproblems auf dem Rand der Aussparung und im darauf folgenden Abschnitt nur den adjungierten linearisierten Verzerrungstensor  $\lambda \boldsymbol{\varepsilon}$ .

### 5.3.2 Spannungstensor auf dem Aussparungsrand

In Abschnitt 5.1.4 wurden die analytischen Lösungen diskutiert, um im Falle linear elastischen Materialverhaltens und kleinen Verzerrungen aus den Schnittgrößen auf die Spannung am Lochrand schließen zu können. Für große Verzerrungen wurde in Abschnitt 5.2 eine phänomenologische Materialinterpolation entwickelt, die nun für die Berechnung des Spannungstensors auf dem Rand der Aussparung eingesetzt wird.

Aus der numerischen Lösung des Anfangsrandwertproblems (3.31) ist das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  für alle Knoten des Finite-Elemente-Netzes und der Cauchysche Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$  für alle Integrationspunkte bekannt. Außerdem liegt für jeden Integrationspunkt ein skalarer Wert der effektiven plastischen Dehnung  $\varepsilon_{\text{eff}}^{\text{pl}}$  vor. Alle Größen sind im Folgenden elementbezogen. Die gesamte Konstruktion gilt jedoch sowohl für eine räumlich diskretisierte als auch für eine kontinuierliche

Lösung des Anfangsrandwertproblems. Zugunsten der Übersichtlichkeit wird der Element-Index <sup>(e)</sup> weggelassen.

Die Transformation der Spannungen in das lokale tangentielle Schalenkoordinatensystem  ${}^u\mathbf{E}^{\text{loc}}$  wird zunächst vorgenommen, um eine Darstellung des Spannungstensors ohne Spannungen in Normalenrichtung der Schale zu erhalten:

$${}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}{}^u\boldsymbol{\sigma}(z) = {}^u\mathbf{E}^{\text{loc}T} \boldsymbol{\sigma}(z) {}^u\mathbf{E}^{\text{loc}}.$$

*Anmerkung 5.3.1* (Lokales Koordinatensystem des Finite-Elemente-Berechnungsprogramms). Hier sei darauf hingewiesen, dass im Speziellen das Finite-Elemente-Berechnungsprogramm LS-Dyna<sup>®</sup> die Spannungen bei der Simulation immer in einem eigenen Elementkoordinatensystem der Momentankonfiguration berechnet und auch bezüglich dieses Koordinatensystems ausgibt. Daher müssen diese Ausgaben zunächst in das globale kartesische Koordinatensystem transformiert werden, bevor die Transformation in das lokale schalentangentielle Koordinatensystem  ${}^u\mathcal{E}^{\text{loc}}$  erfolgt.

Die reduzierten Schnittgrößen können mit (5.1) und (5.2) und numerischer Integration aus den Spannungen bestimmt werden. Das sind die Momente und Kräfte pro Längeneinheit

$$\begin{aligned} {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}{}^u m_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}{}^u \sigma_{xx}(z) z \, dz, & {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}{}^u f_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}{}^u \sigma_{xx}(z) \, dz, \\ {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}{}^u m_{yy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}{}^u \sigma_{yy}(z) z \, dz, & {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}{}^u f_{yy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}{}^u \sigma_{yy}(z) \, dz, \\ {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}{}^u m_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}{}^u \sigma_{xy}(z) z \, dz, & {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}{}^u f_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}{}^u \sigma_{xy}(z) \, dz. \end{aligned}$$

Die numerische Integration bezüglich der Dickenkoordinate erfolgt mit der Lobatto-Integration mit den Integrationsgewichten aus Tabelle 3.2 auf Seite 62:

$$\begin{aligned} {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}{}^u m_{\alpha\beta} &\approx \left(\frac{h}{2}\right)^2 \sum_{i=1}^{n_s} \xi_{3i} w_i^{(p)} {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}{}^u \sigma_{\alpha\beta} \left(\xi_{3i} \frac{h}{2}\right), \\ {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}{}^u f_{\alpha\beta} &\approx \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n_s} w_i^{(p)} {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}{}^u \sigma_{\alpha\beta} \left(\xi_{3i} \frac{h}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Die durchschnittlichen Spannungen für den Scheibenanteil werden nach (5.5) aus den Kräften ermittelt:

$${}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}\sigma_{\alpha\beta(s)} = \frac{{}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}f_{\alpha\beta}}{h} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_z} w_i^{(p)} {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}\sigma_{\alpha\beta} \left( \xi_{3i} \frac{h}{2} \right). \quad (5.32)$$

*Annahme 5.3.2* (Lineare Berechnung der Spannungen in Umfangsrichtung). Die Berechnung der Umfangsspannung am Rand der Aussparung für Schalen und Platten können mit der Materialinterpolation aus Abschnitt 5.2 aus dem Linearen übernommen und superponiert werden.

Dann kann mit den äußeren Spannungen und Momenten die Spannung am Lochrand  ${}^u\sigma_{\varphi\varphi}(\varphi, z)|_{\Gamma_r}$  durch die Superposition der Scheiben- und Plattenlösung wie in (5.9) berechnet werden:

$$\begin{aligned} {}^u\sigma_{\varphi\varphi}(\varphi, z)|_{\Gamma_r} = & \\ & {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}\sigma_{xx(s)} (1 - 2 \cos 2\varphi) + {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}\sigma_{yy(s)} (1 + 2 \cos 2\varphi) - 4 {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}\sigma_{xx(s)} \sin 2\varphi \\ & + \frac{12}{h^3} z \left( {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}m_{xx} (1 - \bar{\nu}' \cos 2\varphi) + {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}m_{yy} (1 + \bar{\nu}' \cos 2\varphi) \right. \\ & \left. + 2 {}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}m_{xy} \bar{\nu}' \sin 2\varphi \right). \end{aligned}$$

Die übrigen Komponenten des Spannungstensors am Rand der Aussparung sind gleich null, da der Rand frei von äußeren Belastungen ist.

### 5.3.3 Adjungierter linearisierter Verzerrungstensor am Lochrand

Für die adjungierte Lösung existieren keine Schnittgrößen wie dies in der Abbildung 5.13 auf der rechten Seite suggeriert wird, denn bei der Lösung des adjungierten Systems werden keine Spannungen berechnet. Dem Gradienten der Adjungierten Grad  $\lambda$  und dem adjungierten linearisierten Verzerrungstensor  $\varepsilon(\lambda)$  wurden zwar mechanische Namen gegeben, sie sind aber rein mathematische Definitionen ohne physikalische Interpretation. Wir konstruieren daher jetzt adjungierte Spannungen, um über den Umweg der Schnittgrößen und der Spannungsfunktion auf dem Aussparungsrand letztendlich den adjungierten linearisierten Verzerrungstensor auf dem Aussparungsrand zu bestimmen.

Wir betrachten hier direkt die räumlich diskretisierte adjungierte Lösung in einem finiten Element. Die Adjungierte der Mittelfläche im Element wird durch die Adjungierte  $\lambda_I$  und die adjungierte Rotation  ${}^\lambda\theta_I$  an den Elementknoten des finiten Elements mit den Ansatzfunktionen  $N_I$  und den isoparametrischen Koordinaten  $\xi$  abgebildet

$$\lambda^{(e)} = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi) \lambda_I \quad \text{und} \quad {}^\lambda\theta^{(e)} = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi) {}^\lambda\theta_I. \quad (5.33)$$

Die adjungierten Tangentenvektoren und Richtungsableitungen der Rotation

$${}^\lambda\mathbf{a}_\alpha^{(e)} = \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha}(\xi_\beta) \lambda_I \quad \text{und} \quad {}^\lambda\theta_{,\alpha}^{(e)} = \sum_{I=1}^4 N_{I,\alpha}(\xi_\beta) {}^\lambda\theta_I \quad (5.34)$$

ermöglichen die Berechnung der Rodrigues-Rotation  ${}^\lambda\mathbf{R}$  mit (3.41), der Richtungsableitung der Rotation  ${}^\lambda\mathbf{R}_{,\alpha}$  mit (3.49) und damit schließlich auch des Direktors  ${}^\lambda\mathbf{d} = {}^\lambda\mathbf{R}\mathbf{N}$  und der Richtungsableitung des Direktors  ${}^\lambda\mathbf{d}_{,\alpha}$  mit (3.48).

Auch an dieser Stelle gilt die gesamte Konstruktion sowohl für räumlich diskretisierte als auch für kontinuierliche Lösungen der Adjungierten. Zugunsten der Übersichtlichkeit wird der Element-Index  $(e)$  wieder weggelassen.

Die Definitionen der kovarianten Basisvektoren (3.46) und (3.47) werden ebenfalls auf die adjungierte Momentankonfiguration übertragen:

$$\begin{aligned} {}^\lambda\mathbf{g}_\alpha &= \lambda_{\mathbf{a}_\alpha} + \frac{h}{2} \xi_3 {}^\lambda\mathbf{d}_{,\alpha}, \\ {}^\lambda\mathbf{g}_3 &= \frac{h}{2} {}^\lambda\mathbf{d}. \end{aligned}$$

Mit der Definition des Deformationsgradienten als dyadisches Produkt der ko- und kontravarianten Basisvektoren der Schale (3.51) kann dann auch der adjungierte Deformationsgradient

$${}^\lambda\mathbf{F}(z) = {}^\lambda\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad (5.35)$$

bestimmt werden. Die kontravarianten Basisvektoren der Bezugskonfiguration  $\mathbf{G}^i$  sind nicht von der Adjungierten abhängig. Mit der Definition des Verschiebungsgradienten (3.8) kann daraus schließlich auch der Gradient der Adjungierten

$$\text{Grad } \lambda(z) = {}^\lambda\mathbf{F}(z) - \mathbf{1}$$

berechnet werden. Beide Größen sind nach Anmerkung 3.3.1 linear in der Dickenkoordinate  $z = \frac{h}{2}\xi_3$ . Nun wird der Verschiebungsgradient in das lokale tangential Koordinatensystem transformiert

$${}_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} \text{Grad } \lambda(z) = {}^\lambda\mathbf{E}^{\text{loc}T} \text{Grad } \lambda(z) {}^\lambda\mathbf{E}^{\text{loc}}.$$



Der adjungierte linearisierte Verzerrungstensor wird daraus mit der klassischen Definition (3.11) berechnet

$${}_{\lambda\mathcal{E}^{\text{loc}}}\lambda\boldsymbol{\varepsilon}(z) = \frac{1}{2} \left( {}_{\lambda\mathcal{E}^{\text{loc}}}\text{Grad } \boldsymbol{\lambda}(z) + {}_{\lambda\mathcal{E}^{\text{loc}}}\text{Grad } \boldsymbol{\lambda}^T(z) \right). \quad (5.36)$$

Bis zu dieser Stelle wurden die linear elastischen Annahmen 5.2.1 und 5.3.2 für die Adjungierte noch nicht verwendet.

*Annahme 5.3.3* (Kirchhoffsche Plattentheorie und ESZ).

Für die Berechnung der adjungierten Spannungen können die Kirchhoffsche Plattentheorie und die Annahmen des ebenen Spannungszustands der Scheibe verwendet werden.

Der Index (ESZ) für die Querkontraktion wird im Rest des Kapitels der Übersichtlichkeit halber nicht ausgeschrieben. Wenn der ebene Verzerrungszustand der Berechnung zugrunde gelegt werden soll, können in den folgenden Herleitungen der Tangentenmodul durch den Ersatz-Tangentenmodul und die effektive Querkontraktion durch die Ersatz-Querkontraktion ersetzt werden.

Mit dem Elastizitätsgesetz für die Kirchhoffsche Platte und den ebenen Spannungszustand (5.12) werden die ebenen adjungierten Spannungen berechnet. Als Elastizitätsmodul wird jetzt der Tangentenmodul  $E_T(z)$  aus (5.24) auf Basis der effektiven plastischen Dehnung des Anfangsrandwertproblems verwendet. Die effektive Querkontraktion  $\nu_{\text{eff}}(z)$  wird mit der Sprungfunktion (5.21) ermittelt. Sowohl der Tangentenmodul und die effektive Querkontraktion als auch der adjungierte linearisierte Verzerrungstensor sind von der Dickenkoordinate  $z$  abhängig. Die adjungierten Spannungen sind damit

$${}_{\lambda\mathcal{E}^{\text{loc}}}\begin{pmatrix} \lambda\sigma_{xx}(z) \\ \lambda\sigma_{yy}(z) \\ \lambda\sigma_{xy}(z) \end{pmatrix} = \frac{E_T(z)}{1 - (\nu_{\text{eff}}(z))^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu_{\text{eff}}(z) & 0 \\ \nu_{\text{eff}}(z) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu_{\text{eff}}(z) \end{pmatrix} {}_{\lambda\mathcal{E}^{\text{loc}}}\begin{pmatrix} \lambda\varepsilon_{xx}(z) \\ \lambda\varepsilon_{yy}(z) \\ \lambda\varepsilon_{xy}(z) \end{pmatrix}.$$

Eventuell vorhandene Querschubspannungen werden durch die Annahme der Kirchhoffschen Plattentheorie vernachlässigt. Die Spannungen sind das Zwischenresultat, um von der äußeren Belastung auf den Lochrand schließen zu können. Jetzt können die in Abbildung 5.13 dargestellten *adjungierten Schnittgrößen* berechnet werden.

Dies geschieht mit den Definitionen (5.1) für die Momente und (5.2) für die Kräfte

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} m_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} \lambda \sigma_{xx}(z) z \, dz, & \lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} f_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} \lambda \sigma_{xx}(z) \, dz, \\ \lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} m_{yy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} \lambda \sigma_{yy}(z) z \, dz, & \lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} f_{yy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} \lambda \sigma_{yy}(z) \, dz, \\ \lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} m_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} \lambda \sigma_{xy}(z) z \, dz, & \lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} f_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} \lambda \sigma_{xy}(z) \, dz. \end{aligned}$$

Auch für die adjungierten Schnittgrößen erfolgt die numerische Integration bezüglich der Dickenkoordinate mit der Lobatto-Integration (Tabelle 3.2). Aus den Kräften werden direkt für den Scheibenanteil mit (5.5) die durchschnittlichen Spannungen berechnet

$$\lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} \lambda m_{\alpha\beta} \approx \left(\frac{h}{2}\right)^2 \sum_{i=1}^{n_z} \xi_{3i} w_i^{(p)} \lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} \lambda \sigma_{\alpha\beta} \left(\xi_{3i} \frac{h}{2}\right), \quad (5.37)$$

$$\lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} \lambda \sigma_{\alpha\beta(s)} \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_z} w_i^{(p)} \lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} \lambda \sigma_{\alpha\beta} \left(\xi_{3i} \frac{h}{2}\right). \quad (5.38)$$

Dann kann zusammen mit den Momenten die adjungierte Dehnung am Lochrand in Umfangsrichtung  $\lambda_{\varepsilon_{\varphi\varphi}}(\varphi, z)|_{\Gamma_r}$  durch die Superposition (5.9) und das inverse Elastizitätsgesetz (5.14) mit dem durchschnittlichen Tangentenmodul  $\bar{E}_T$  und der durchschnittlichen effektiven Querkontraktion  $\bar{\nu}$  und  $\bar{\nu}'$  aus (5.25) berechnet werden

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon_{\varphi\varphi}}(\varphi, z)|_{\Gamma_r} &= \\ \frac{1}{\bar{E}_T} &\left[ \lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} \lambda \sigma_{xx(s)} (1 - 2 \cos 2\varphi) + \lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} \lambda \sigma_{yy(s)} (1 + 2 \cos 2\varphi) - 4 \lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} \lambda \sigma_{xy(s)} \sin 2\varphi \right. \\ &+ \frac{12}{h^3} z \left( \lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} \lambda m_{xx} (1 - \bar{\nu}' \cos 2\varphi) + \lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} \lambda m_{yy} (1 + \bar{\nu}' \cos 2\varphi) \right. \\ &\left. \left. + 2 \lambda_{\mathcal{E}^{\text{loc}}} \lambda m_{xy} \bar{\nu}' \sin 2\varphi \right) \right]. \quad (5.39) \end{aligned}$$

Da der Lochrand des Anfangsrandwertproblems spannungsfrei ist, ist die konkrete Auswertung der adjungierten Radialdehnung und adjungierten Schubverformung am Lochrand nicht notwendig. Diese verschwinden im Skalarprodukt mit Komponenten der Radialspannung und der Schubspannung des Anfangsrandwertproblems  $u_{\sigma_{rr}}(\varphi, z)|_{\Gamma_r} = u_{\sigma_{r\varphi}}(\varphi, z)|_{\Gamma_r} = 0$ .

### 5.3.4 Zusammenführung von Spannung und adjungierter Dehnung

Die adjungierte linearisierte Verzerrung und die adjungierten Schnittgrößen treten ab hier immer im lokalen adjungierten tangentialen Schalenkoordinatensystem  ${}^\lambda \mathcal{E}^{\text{loc}}$  auf. Mit dem linken oberen Index der Adjungierten  ${}^\lambda$  ist die Bezeichnung eindeutig. Auf den Index des Basissystems wird daher im Folgenden sowohl für die Adjungierte als auch für die Lösung des Anfangsrandwertproblems verzichtet.

Mit den Ergebnissen der beiden vorhergehenden Abschnitte können Spannung und adjungierte Dehnung auf dem Lochrand zusammengeführt und integriert werden. Die Integration erfolgt nach der vereinfachenden Annahme 5.3.1 auf dem undeformierten Aussparungsrand

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_r(t)} u_{\sigma_{\varphi\varphi}} {}^\lambda \varepsilon_{\varphi\varphi} d\Gamma &\approx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} u_{\sigma_{\varphi\varphi}} {}^\lambda \varepsilon_{\varphi\varphi} r d\varphi dz \\
 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \left[ u_{\sigma_{xx(s)}} (1 - 2 \cos 2\varphi) + u_{\sigma_{yy(s)}} (1 + 2 \cos 2\varphi) - 4 u_{\sigma_{xy(s)}} \sin 2\varphi \right. \\
 &\quad \left. + \frac{12}{h^3} z \left( {}^u m_{xx} (1 - \bar{\nu}' \cos 2\varphi) + {}^u m_{yy} (1 + \bar{\nu}' \cos 2\varphi) + 2 {}^u m_{xy} \bar{\nu}' \sin 2\varphi \right) \right] \\
 &\quad \cdot \frac{1}{E_T} \left[ \lambda_{\sigma_{xx(s)}} (1 - 2 \cos 2\varphi) + \lambda_{\sigma_{yy(s)}} (1 + 2 \cos 2\varphi) - 4 \lambda_{\sigma_{xy(s)}} \sin 2\varphi \right. \\
 &\quad \left. + \frac{12}{h^3} z \left( \lambda m_{xx} (1 - \bar{\nu}' \cos 2\varphi) + \lambda m_{yy} (1 + \bar{\nu}' \cos 2\varphi) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2 \lambda m_{xy} \bar{\nu}' \sin 2\varphi \right) \right] r d\varphi dz \\
 &= 2\pi r h \frac{1}{E_T} \left( 3 {}^u \sigma_{xx(s)} \lambda_{\sigma_{xx(s)}} - {}^u \sigma_{xx(s)} \lambda_{\sigma_{yy(s)}} - {}^u \sigma_{yy(s)} \lambda_{\sigma_{xx(s)}} \right. \\
 &\quad \left. + 3 {}^u \sigma_{yy(s)} \lambda_{\sigma_{yy(s)}} + 8 {}^u \sigma_{xy(s)} \lambda_{\sigma_{xy(s)}} \right) \\
 &\quad + 2\pi r h \frac{6}{E_T h^4} \left( 2 \left( {}^u m_{xx} + {}^u m_{yy} \right) \left( \lambda m_{xx} + \lambda m_{yy} \right) \right. \\
 &\quad \left. + (\bar{\nu}')^2 \left( {}^u m_{xx} - {}^u m_{yy} \right) \left( \lambda m_{xx} - \lambda m_{yy} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 4 (\bar{\nu}')^2 {}^u m_{xy} \lambda m_{xy} \right). \tag{5.40}
 \end{aligned}$$

Vor beiden Summanden steht der Faktor der Zylindermantelfläche, der bei der Auswertung der Topologischen Ableitung mit der Ableitung der Ausschnittsfunktion

nach dem Lochparameter verschwindet. Die zeitliche Integration erfolgt schließlich noch numerisch, beispielsweise mit der Trapezregel.

*Resultat 5.3.1* (Berechnungsmodell der Ableitung der gemischt adjungierten Energie).

Die Ableitung der gemischt adjungierten Energie wird durch die Transformation in die Momentankonfiguration mit dem Cauchyschen Spannungstensor und dem adjungierten linearisierten Verzerrungstensor ermittelt.

Für die Berechnung der Umfangsspannung aus der Lösung des Anfangsrandwertproblems werden die Umfangsspannungen für Schalen und Platten aus dem Linearen übernommen und superponiert. Die Materialinterpolation des temporär linear elastischen Materialverhaltens, deren Eigenschaften in Abschnitt 5.2 entwickelt wurden, wird sowohl bei der Spannung als auch bei der adjungierten Dehnung eingesetzt.

Unter der Annahme des ebenen Spannungszustands und der Kirchhoffschen Plattentheorie wird über konstruierte adjungierte Spannungen mit den adjungierten linearen Umfangsspannungen schließlich der adjungierte linearisierte Verzerrungstensor am Rand der Aussparung ermittelt und gemeinsam mit der Umfangsspannung des Anfangsrandwertproblems integriert.

Die Ableitung der gemischt adjungierten Energie wird schließlich durch die numerische Integration des Zeitintegrals

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{d|c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr} \right)^{-1} \int_0^T \int_{\Gamma_r} \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \text{Grad } \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma \, dt \\
& \approx - \frac{1}{2\pi r h} \int_0^T \int_{\Gamma_r} {}^u \sigma_{\varphi\varphi} \lambda_{\varepsilon_{\varphi\varphi}} \, d\Gamma \, dt \\
& = - \int_0^T \left[ \frac{1}{\bar{E}_T} \left( ({}^u \sigma_{xx(s)} + {}^u \sigma_{yy(s)}) (\lambda_{\sigma_{xx(s)}} + \lambda_{\sigma_{yy(s)}}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2 ({}^u \sigma_{xx(s)} - {}^u \sigma_{yy(s)}) (\lambda_{\sigma_{xx(s)}} - \lambda_{\sigma_{yy(s)}}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 8 {}^u \sigma_{xy(s)} \lambda_{\sigma_{xy(s)}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{6}{\bar{E}_T h^4} \left( 2 ({}^u m_{xx} + {}^u m_{yy}) (\lambda_{m_{xx}} + \lambda_{m_{yy}}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{4(1+\bar{\nu})^2}{(3+\bar{\nu})^2} ({}^u m_{xx} - {}^u m_{yy}) (\lambda_{m_{xx}} - \lambda_{m_{yy}}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{16(1+\bar{\nu})^2}{(3+\bar{\nu})^2} {}^u m_{xy} \lambda_{m_{xy}} \right) \right] dt \quad (5.41)
\end{aligned}$$

gewonnen. Für jeden Zeitpunkt wird für jeden Flächenintegrationspunkt jedes Elements zunächst dickenabhängig der adjungierte linearisierte Verzerrungstensor berechnet. Dann erfolgt die Berechnung der adjungierten Schnittgrößen und der Schnittgrößen aus dem Anfangsrandwertproblem. Mit numerischer Integration bezüglich der Zeit wird dann für jeden Flächenintegrationspunkt die Topologische Ableitung berechnet.

In der Literatur zur Berechnung der linearen Topologischen Ableitung werden immer der Scheiben- und der Plattenteil getrennt voneinander betrachtet (Schumacher 1995, Bojczuk und Mróz 2008 und Amstutz und Novotny 2011). An dem hier entwickelten Berechnungsmodell für die Ableitung der gemischt adjungierten Energie kann sehr gut die Trennbarkeit von Scheiben- und Plattenverhalten und anschließende Superposition aufgrund der Linearität in der Dickenkoordinate bei der Integration gezeigt werden. Im Linearen verschwinden alle gemischten Terme aus Scheiben- und Plattenschnittgrößen bei der Integration bezüglich der Schalendicke.

Anmerkung 5.3.2 (Lineare Topologische Ableitung des Verschiebungsfunktional). Bei kleinen Verschiebungen gehen Bezugs- und Momentankonfiguration ineinander über. Als Basis für die Mikrozele dient daher das schalentangente Koordinatensystem in der Bezugsconfiguration  $\mathcal{E}^{loc}$ . Die Schnittgrößen für  $\mathbf{u}$  und  $\boldsymbol{\lambda}_u^{\text{lin}}$  werden ohne vereinfachende Annahmen analog zum nichtlinearen Berechnungsmodell ermittelt. Für das Verschiebungsfunktional verbleibt in Abwesenheit von Volumenkräften für die Topologische Ableitung

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\mathcal{J}_u^{\text{lin}} = & -\frac{1}{E} \left( ({}^u\sigma_{xx(s)} + {}^u\sigma_{yy(s)}) ({}^\lambda\sigma_{xx(s)} + {}^\lambda\sigma_{yy(s)}) \right. \\ & \left. + 2 ({}^u\sigma_{xx(s)} - {}^u\sigma_{yy(s)}) ({}^\lambda\sigma_{xx(s)} - {}^\lambda\sigma_{yy(s)}) + 8 {}^u\sigma_{xy(s)} {}^\lambda\sigma_{xy(s)} \right) \\ & - \frac{6}{Eh^4} \left( 2 ({}^um_{xx} + {}^um_{yy}) ({}^\lambda m_{xx} + {}^\lambda m_{yy}) \right. \\ & + \frac{4(1+\nu)^2}{(3+\nu)^2} ({}^um_{xx} - {}^um_{yy}) ({}^\lambda m_{xx} - {}^\lambda m_{yy}) \\ & \left. + \frac{16(1+\nu)^2}{(3+\nu)^2} {}^um_{xy} {}^\lambda m_{xy} \right). \end{aligned} \quad (5.42)$$

## 5.4 Berechnungsmodell der expliziten Ableitung der inneren Energie

Für den expliziten Ableitungsterm der inneren Energie

$$-\lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{d |c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr} \right)^{-1} \int_0^T \int_{\Gamma_r} \mathbf{FS} \cdot \text{Grad } \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma \, dt$$

wird analog zum Berechnungsmodell der Ableitung der gemischt adjungierten Energie das Integral auf dem Aussparungsrand in der Momentankonfiguration betrachtet

$$\int_{\Gamma_r} \mathbf{FS} \cdot \text{Grad } \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_r(t)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \, d\Gamma.$$

Um dieses Integral auswerten zu können müssen auch hier die vereinfachenden Annahmen der Gültigkeit der linearen Formeln für die Umfangsspannung auf dem Rand der Aussparung (Annahme 5.3.2) und der Integration auf dem unverformten Lochrand (Annahme 5.3.1) angenommen werden.

Da hier keine Abhängigkeit von der adjungierten Lösung mehr gegeben ist, kann das gesamte Integral in Abhängigkeit der Schnittgrößen der Lösung des Anfangsrandwertproblems ausgewertet werden.

*Annahme 5.4.1* (Verzerrungsgeschwindigkeitstensor und Dehnungsrate).

Über den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor  $\mathbf{d}$  auf dem Rand der Aussparung kann auch mit den linearen Formeln keine Aussage getroffen werden, da dieser Tensor in der Momentankonfiguration definiert ist. Für die Berechnung des expliziten Ableitungsteils der inneren Energie setzen wir vereinfachend voraus, dass Verzerrungsgeschwindigkeitstensor und Dehnungsrate annähernd gleichbehandelt werden können und sich insbesondere bei der Integration auf dem unverformten Aussparungsrand nicht unterscheiden:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\text{grad } \dot{\mathbf{u}} + \text{grad } \dot{\mathbf{u}}^T) \approx \frac{1}{2} (\text{Grad } \dot{\mathbf{u}} + \text{Grad } \dot{\mathbf{u}}^T) = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (5.43)$$

und

$$\int_{\Gamma_r(t)} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \, d\Gamma \approx \int_{\Gamma_r} \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \, d\Gamma. \quad (5.44)$$

Mit dieser vereinfachenden Annahme können wir auf das Ergebnis der Integration der Ableitung der gemischt adjungierten Energie (5.40) zurückgreifen. Statt des adjungierten linearisierten Verzerrungstensors  $\lambda_{\varepsilon_{\varphi\varphi}}$  wird die Dehnrate  $\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}$  integriert. Da die Differenziation bezüglich der Zeit linear ist, kann mit den linearen Formeln aus Abschnitt 5.1.2 auch von den Spannungsraten  $\dot{\sigma}_{\alpha\beta(s)}$  und den Zeitableitungen der Momente  $\dot{m}_{\alpha\beta}$  auf die Dehnrate am Lochrand geschlossen werden. Mit der Materialinterpolation aus Abschnitt 5.2 kann das Integral auf dem Aussparungsrand durch die Schnittgrößen angegeben werden

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_r} \sigma_{\varphi\varphi} \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} \, d\Gamma &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \sigma_{\varphi\varphi} \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} \, r \, d\varphi \, dz \\ &= \frac{1}{E_\Gamma} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \sigma_{\varphi\varphi} \dot{\sigma}_{\varphi\varphi} \, r \, d\varphi \, dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi r h \frac{1}{\bar{E}_T} \left( 3\sigma_{xx(s)} \dot{\sigma}_{xx(s)} - \sigma_{xx(s)} \dot{\sigma}_{yy(s)} - \sigma_{yy(s)} \dot{\sigma}_{xx(s)} \right. \\
&\quad \left. + 3\sigma_{yy(s)} \dot{\sigma}_{yy(s)} + 8\sigma_{xy(s)} \dot{\sigma}_{xy(s)} \right) \\
&+ 2\pi r h \frac{6}{\bar{E}_T h^4} \left( 2(m_{xx} + m_{yy}) (\dot{m}_{xx} + \dot{m}_{yy}) \right. \\
&\quad \left. + (\bar{\nu}')^2 (m_{xx} - m_{yy}) (\dot{m}_{xx} - \dot{m}_{yy}) \right. \\
&\quad \left. + 4(\bar{\nu}')^2 m_{xy} \dot{m}_{xy} \right). \tag{5.45}
\end{aligned}$$

Die Auswertung setzt voraus, dass die Spannungsraten der Lösung des Anfangswertproblems durch das Finite-Elemente-Berechnungsprogramm zur Verfügung gestellt werden oder durch genaue Kenntnis der Materialformulierung aus den Simulationsergebnissen berechnet werden können. Ist dies nicht der Fall, kann beispielsweise durch eine Näherung mit dem Differenzenquotienten aus den Spannungen aufeinanderfolgender Zeitpunkte die Spannungsraten näherungsweise bestimmt werden. Da dies für jeden Integrationspunkt und jede Komponente des Tensors für jeden Zeitpunkt ausgewertet werden müsste, vereinfachen wir die Berechnung des expliziten Ableitungsterms weiter.

Anhand eines Terms aus dem Scheibenanteil in (5.45) kann mit partieller Integration im Zeitbereich

$$\int_0^T \frac{1}{\bar{E}_T(t)} \sigma_{\alpha\beta(s)} \dot{\sigma}_{\alpha\beta(s)} dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\bar{E}_T(t)} \sigma_{\alpha\beta(s)}^2 \right]_{t=0}^{t=T} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\bar{E}_T(t)} \right) \sigma_{\alpha\beta(s)}^2 dt}_{\text{wird vernachlässigt}}$$

die Spannungsraten eliminiert werden. Auch in dieser Form ist noch eine unbekannte Zeitableitung aus der Materialformulierung vorhanden, die nun bei der Berechnung des expliziten Ableitungsteils der inneren Energie vernachlässigt wird.

Anschaulich lässt sich dies folgendermaßen darstellen: Die spezifische Energie wird von der Spannung  $\sigma_{\alpha\beta(s)}$  verrichtet, um vom Dehnungszustand  $\varepsilon_{\alpha\beta(s)}(0)$  in den Dehnungszustand  $\varepsilon_{\alpha\beta(s)}(T)$  zu kommen. Dies ist in Abbildung 5.15 als die gesamte Fläche

$$\int_{\varepsilon_{\alpha\beta(s)}(0)}^{\varepsilon_{\alpha\beta(s)}(T)} \sigma_{\alpha\beta(s)} d\varepsilon_{\alpha\beta(s)}$$

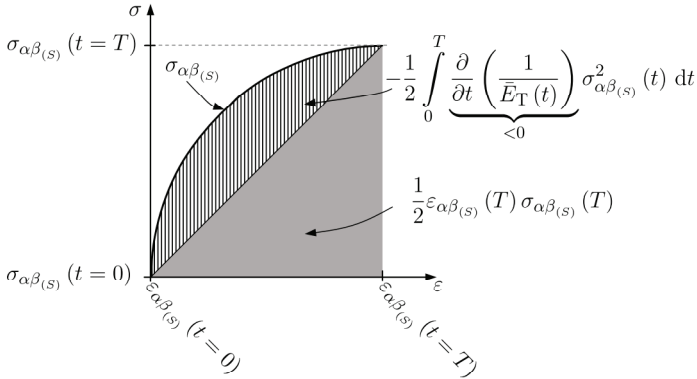
unter der Kurve skizziert.



Mit Substitution und partieller Integration im Zeitbereich

$$\begin{aligned}
 \int_{\varepsilon_{\alpha\beta(s)}(0)}^{\varepsilon_{\alpha\beta(s)}(T)} \sigma_{\alpha\beta(s)} d\varepsilon_{\alpha\beta(s)} &= \int_0^T \sigma_{\alpha\beta(s)} \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta(s)} dt \\
 &= \int_0^T \frac{1}{\bar{E}_T(t)} \sigma_{\alpha\beta(s)} \dot{\sigma}_{\alpha\beta(s)} dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \underbrace{\varepsilon_{\alpha\beta(s)} \sigma_{\alpha\beta(s)}}_{\frac{1}{\bar{E}_T} \sigma_{\alpha\beta(s)}^2} \right]_{t=0}^{t=T} - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\bar{E}_T(t)} \right) \sigma_{\alpha\beta(s)}^2 dt
 \end{aligned}$$

wird diese Fläche in die graue Dreiecksfläche und die schraffierte Fläche aufgeteilt. Die Dreiecksfläche liegt unterhalb der Geraden von  $(\varepsilon_{\alpha\beta(s)}(t=0), \sigma_{\alpha\beta(s)}(t=0))$  bis  $(\varepsilon_{\alpha\beta(s)}(t=T), \sigma_{\alpha\beta(s)}(t=T))$ . Die schraffierte Fläche ist aus dem verbleibenden Zeitintegral zu berechnen. In diesem Beispiel ist die Steigung der Kurve von  $\sigma_{\alpha\beta(s)}$  immer positiv, nimmt aber ab, so dass die Zeitableitung des Tangentenmoduls negativ ist (in der Darstellung ist das die Krümmung der Kurve).



**Abbildung 5.15:** Vereinfachung der expliziten Ableitung der inneren Energie

*Annahme 5.4.2* (Unabhängigkeit von der Verformungsgeschichte). Sind die Spannungsraten der Lösung des Anfangsrandwertproblems nicht bekannt, dann setzen wir voraus, dass die spezifische Energie alleine aus dem Spannungszustand am Ende der Simulation berechnet werden kann.

Mit dieser Annahme werden alle Terme in (5.45) vereinfacht.

*Resultat 5.4.1* (Berechnungsmodell der expliziten Ableitung der inneren Energie).

Die explizite Ableitung der inneren Energie wird mit der Materialinterpolation aus Abschnitt 5.2 und den Schnittgrößen am Ende der Lösung des Anfangsrandwertproblems durch

$$\begin{aligned}
 & - \lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{d |\overline{c_r(\mathbf{X}_0)}|}{dr} \right)^{-1} \int_0^T \int_{\Gamma_r} u \mathbf{F}^u \mathbf{S} \cdot \text{Grad } \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma \, dt \\
 & \approx - \frac{1}{2\pi r h} \int_0^T \int_{\Gamma_r} \sigma_{\varphi\varphi} \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} \, d\Gamma \, dt \\
 & = - \frac{1}{2\bar{E}_T(T)} \left( (\sigma_{xx(s)}(T) + \sigma_{yy(s)}(T))^2 + 2(\sigma_{xx(s)}(T) - \sigma_{yy(s)}(T))^2 \right. \\
 & \quad \left. + 8\sigma_{xy(s)}^2(T) \right) \\
 & - \frac{3}{\bar{E}_T(T) h^4} \left( 2(m_{xx}(T) + m_{yy}(T))^2 \right. \\
 & \quad + \frac{4(1 + \bar{\nu})^2}{(3 + \bar{\nu})^2} (m_{xx}(T) - m_{yy}(T))^2 \\
 & \quad \left. + \frac{16(1 + \bar{\nu})^2}{(3 + \bar{\nu})^2} m_{xy}^2(T) \right) \tag{5.46}
 \end{aligned}$$

berechnet.

Beide Summanden werden mit dem reziproken Tangentenmodul  $\frac{1}{\bar{E}_T(T)}$  multipliziert. Der Tangentenmodul nimmt nach Abbildung 5.10b Werte vom elastischen Elastizitätsmodul  $E$  bis fast null bei fast vollständiger plastischer Dehnung an. Bei zunehmender plastischer Dehnung wird der reziproke Tangentenmodul größer und die Topologische Ableitung größer als bei rein elastischem Verhalten. Dieser Effekt ist in Weider und Schumacher 2018 mit Simulationsrechnungen an einer gelochten Scheibe für den Scheibenanteil bei ideal plastischem Materialverhalten auch numerisch aufgezeigt.

Dieses Berechnungsmodell bietet das größte Verbesserungspotenzial durch die Verwendung der tatsächlichen Spannungsraten. Gleichzeitig hat dieses Berechnungsmodell in seiner aktuellen Form auch das größte Fehlerpotenzial, denn bei

einer vollständigen Entlastung am Simulationseende würden die Spannungen und damit auch der explizite Ableitungsterm verschwinden.

Durch die Berechnung des Randintegrals auf Basis der Schnittgrößen kann die Ableitung der gemischt adjungierten Energie und die explizite Ableitung der inneren Energie ohne das tatsächliche Einbringen einer Aussparung berechnet werden.

*Anmerkung 5.4.1 (Lineare Topologische Ableitung der Formänderungsenergie). Die Topologische Ableitung der Formänderungsenergie (5.19) kann in Abwesenheit von Volumenkräften mit dem Berechnungsmodell des Randintegrals in (5.46) durch die Schnittgrößen mit*

$$\begin{aligned} \mathcal{TJ}_\sigma^{\text{lin}} = & \frac{1}{2E} \left( (\sigma_{xx(s)} + \sigma_{yy(s)})^2 + 2(\sigma_{xx(s)} - \sigma_{yy(s)})^2 + 8\sigma_{xy(s)}^2 \right) \\ & + \frac{3}{Eh^4} \left( 2(m_{xx} + m_{yy})^2 + \frac{4(1+\nu)^2}{(3+\nu)^2} ((m_{xx} - m_{yy})^2 + 4m_{xy}^2) \right) \end{aligned} \quad (5.47)$$

berechnet werden. In Anmerkung 5.1.2 wurde durch die spezielle Eigenschaft  $\lambda_\sigma^{\text{lin}} = -\mathbf{u}$  das Randintegral schon durch die negative explizite materielle Ableitung ersetzt, die jetzt in diesem Abschnitt berechnet wurde.

Dieses Resultat wurde von Eschenauer et al. 1994 zuerst veröffentlicht. Dort wurde zunächst nur der ebene Spannungszustand der Scheibe berücksichtigt. Die Sensitivität erhielt die Bezeichnung „Charakteristische Funktion zur Lochpositionierung“. Im Optimierungsschema Bubble-Methode dient diese charakteristische Funktion zur Positionierung neuer Löcher und damit zur Änderung der Topologiekategorie. In Schumacher 1995 ist der Plattenanteil dann ebenfalls berücksichtigt worden. In weiteren Veröffentlichungen wie beispielsweise in Sokolowski und Żochowski 1999 wird schließlich von der „Topologischen Ableitung“ gesprochen und die Existenz und Eindeutigkeit der Sensitivität erörtert. Anwendung findet die Topologische Ableitung in der Literatur hauptsächlich in der Optimierung mit Level-Set Methoden wie beispielsweise in Amstutz und Andrá 2006. Sowohl die Level-Set Methode als auch die Bubble-Methode wurde in Kapitel 2 kurz umrissen.

Aufgrund der quadratischen Form in den Spannungen ist die Sensitivität der Formänderungsenergie im Linearen immer positiv. Nur die Wegnahme unbelasteter Punkte bringt keine Vergrößerung des Funktionals. Für die nichtlinearen Fragestellungen muss dies nicht der Fall sein. Aus der analytischen Herleitung

und den Berechnungsmodellen kann nicht auf einen solchen Zusammenhang geschlossen werden. Physikalisch kann ein Gegenbeispiel konstruiert werden: Ein Fahrzeug-Längsträger nimmt durch Faltenbeulen und plastische Dehnung Energie auf. Durch die gezielte Lochpositionierung kann weiteres Beulen begünstigt werden, der Längsträger nimmt dann mehr Energie auf. Ungünstige Lochpositionen zum Beispiel in der Nähe der Lagerung können das frühzeitige Ausknicken des Längsträgers bewirken. Es gibt also sowohl positive als auch negative Beeinflussungen der inneren Energie. Dies liegt daran, dass bei der vollständigen Modellierung als Anfangsrandwertproblem unter Berücksichtigung der Trägheit die Energie des Systems auch in kinetische Energie umgewandelt werden kann, beziehungsweise je nach Belastung eben nicht in Dehnungsenergie umgewandelt wird. Im linearen System ist ein solcher Verbleib von kinetischer Energie nicht möglich.

## 5.5 Berechnungsmodell der Ableitungen des Trägheits- und Dämpfungsterms und der Volumenkraft

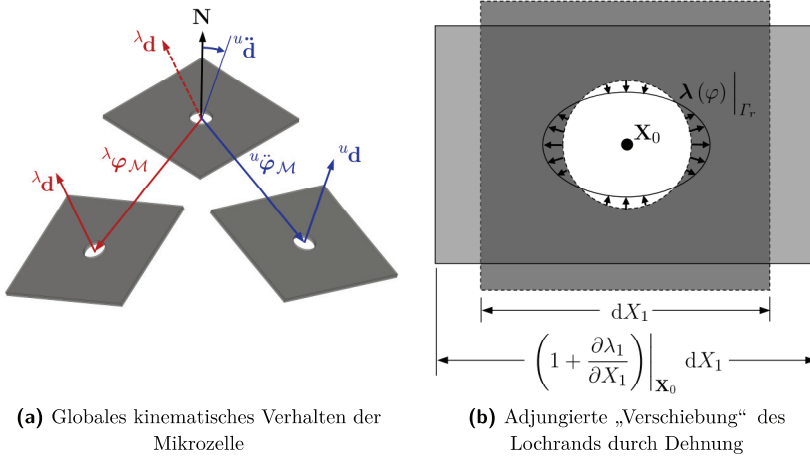
Die verbleibenden drei Randintegrale der expliziten materiellen Ableitung (4.36) bis (4.38) beinhalten statt des Spannungstensors und des Gradienten der Adjungierten direkt die Lösung des Anfangsrandwertproblems  $\mathbf{u}$  und deren zeitliche Ableitungen  $\dot{\mathbf{u}}$  und  $\ddot{\mathbf{u}}$  sowie die Adjungierte  $\boldsymbol{\lambda}$ . Wir beginnen an dieser Stelle mit der Entwicklung des Berechnungsmodells für den Trägheitsterm

$$-\lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{d |\overline{c_r(\mathbf{X}_0)}|}{dr} \right)^{-1} \int_0^T \int_{\Gamma_r} \varrho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma \, dt.$$

Die Berechnungsmodelle für die Ableitungen des Dämpfungsterms und der Volumenkräfte werden am Ende des Abschnitts daraus abgeleitet.

Die Ableitung des Trägheitsterms erfordert die Kenntnis der Beschleunigung und der Adjungierten auf dem Lochrand. Die Dichte  $\varrho$  ist konstant im gesamten Körper und hier lediglich ein Skalierungsfaktor. Sowohl die Beschleunigung als auch die Adjungierte setzen sich aus zwei Komponenten zusammen, die in Abbildung 5.16 dargestellt sind. In Abbildung 5.16a ist das globale kinematische Verhalten des Ausschnitts dargestellt, das durch das Verhalten der Mikrozelle gesteuert ist. Der Ausschnitt erfährt an jedem Punkt des Körpers die Beschleunigung und Adjungierte, die auch die Mikrozelle erfährt. Durch die Beschleunigung der Verzerrung des

Anfangsrandwertproblems und die adjungierte Verzerrung erfährt der Lochrand außerdem noch eine lokale Verzerrung. In Abbildung 5.16b ist dies beispielhaft anhand der Adjungierten auf der Mittelfläche dargestellt.



**Abbildung 5.16:** Visualisierung der Ableitung des Trägheitsterms

Diese Lochrandverzerrung stellt für die Auswertung eine weitere Schwierigkeit dar. Wurde in den beiden vorherigen Abschnitten noch mittels der Materialinterpolation die Dehnung des Aussparungsrandes ermittelt, so ist hier die adjungierte Loch„verschiebung“ gesucht. Und genau dieser Einfluss wurde schon bei der Ableitung der gemischt adjungierten Energie und der expliziten Ableitung in Annahme 5.3.1 vernachlässigt, als die Integration auf dem undeformierten Loch durchgeführt wurde, obwohl die Integral-Formulierung mit dem Cauchyschen Spannungstensor in der Momentankonfiguration betrachtet wurde.

Die Ableitung des Trägheitsterms kann zwar in der Bezugskonfiguration ausgewertet werden, so dass für die Integration keine besondere Parametrisierung benötigt wird, die Kenntnis der Lochverzerrung ist aber trotzdem notwendig. Im Folgenden wird daher vereinfachend angenommen, dass der Trägheitseinfluss durch die Lochdeformation im Verhältnis zur Trägheit des unverzerrten Lochs durch das Mikrozellenverhalten gering ist. Daher wird auch für die Ableitung des Trägheitsterms die Lochdeformation vernachlässigt und nur der Mikrozellenanteil ausgewertet.

*Annahme 5.5.1* (Vernachlässigung der Lochverzerrung).

Die Beschleunigung und die Adjungierte auf dem Aussparungsrand haben nur einen geringen Einfluss auf die Ableitung des Trägheitsterms, da dieser in erster Linie die Veränderung der gemischt adjungierten kinetischen Energie durch Vorhandensein oder eben nicht Vorhandensein des zylindrischen Ausschnitts beschreibt. Auf die Integration der Lochrandbeschleunigung und der adjungierten Lochrandverschiebung kann verzichtet werden.

Damit wird die Beschleunigung und die Adjungierte auf dem Aussparungsrand auf das globale Mikrozellenverhalten reduziert und bekommt an jedem Punkt des Lochrands das Mikrozellenverhalten zugewiesen:

$$\ddot{\mathbf{u}}|_{\Gamma_r} = \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}_0) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\lambda}|_{\Gamma_r} = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{X}_0). \quad (5.48)$$

Im Fall der Schalenmodellierung hat das Mikrozellenverhalten eine translatorische und eine rotatorische Komponente. Die translatorische Komponente wird durch die Beschleunigung der Mittelfläche  ${}^u\ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathcal{M}}$  und durch die Adjungierte der Mittelfläche  ${}^\lambda\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{M}}$  bestimmt, die rotatorische Komponente durch die Beschleunigung des Schalendirektors  ${}^u\ddot{\mathbf{d}}$  und durch den adjungierten Direktor  ${}^\lambda\mathbf{d}$ .

Wir betrachten zunächst die Verschiebung  $\mathbf{u}$  nach der Definition der Verschiebung (3.1) gemeinsam mit der speziellen Bezugs- und Momentankonfiguration der Schalenformulierung (3.36) und (3.37)

$$\mathbf{u}(\xi_\alpha, \xi_3, t) = {}^u\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{M}}(\xi_\alpha, t) - \mathbf{X}_{\mathcal{M}}(\xi_\alpha) + \frac{h}{2}\xi_3({}^u\ddot{\mathbf{d}}(\xi_\alpha, t) - \mathbf{N}(\xi_\alpha)).$$

Da der materielle Ortsvektor der Mittelfläche  $\mathbf{X}_{\mathcal{M}}$  und der Schalennormalenvektor  $\mathbf{N}$  konstant in der Zeit sind, kann mit der Definition des Direktors  $\mathbf{d} = \mathbf{R}\mathbf{N}$  die Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{u}}$  mit der Beschleunigung der Rotationsmatrix  $\ddot{\mathbf{R}}$  aus (3.55) formuliert werden

$$\ddot{\mathbf{u}} = {}^u\ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathcal{M}} + \frac{h}{2}\xi_3 {}^u\ddot{\mathbf{d}} = {}^u\ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathcal{M}} + \frac{h}{2}\xi_3 {}^u\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{N}. \quad (5.49)$$

Für die Adjungierte wird ebenfalls die Darstellung mit der Schalenformulierung verwendet

$$\boldsymbol{\lambda}(\xi_\alpha, \xi_3, t) = {}^\lambda\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{M}}(\xi_\alpha, t) - \mathbf{X}_{\mathcal{M}}(\xi_\alpha) + \frac{h}{2}\xi_3({}^\lambda\mathbf{d}(\xi_\alpha, t) - \mathbf{N}(\xi_\alpha)). \quad (5.50)$$

Die Berechnung des adjungierten Direktors  ${}^\lambda\mathbf{d} = {}^\lambda\mathbf{R}\mathbf{N}$  wurde in Abschnitt 5.3.3 bei der Berechnung des adjungierten linearisierten Verzerrungstensors bereits erläutert.

Eingesetzt in die Ableitung des Trägheitsterms liefern die Beschleunigung (5.49) und die Adjungierte (5.50) durch das Skalarprodukt in der Dickenkoordinate konstante, lineare und quadratische Terme

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_{\Gamma_r} \ddot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma \, dt &= \int_0^T \int_{\Gamma_r} \left( {}^u\ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathcal{M}} \cdot \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{M}} - {}^u\ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathcal{M}} \cdot \mathbf{X}_{\mathcal{M}} \right. \\
 &\quad + \frac{h}{2} \xi_3 {}^u\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{M}} - \frac{h}{2} \xi_3 {}^u\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{N} \cdot \mathbf{X}_{\mathcal{M}} \\
 &\quad + \frac{h}{2} \xi_3 {}^u\ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathcal{M}} \cdot \boldsymbol{\lambda} \mathbf{d} - \frac{h}{2} \xi_3 {}^u\ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathcal{M}} \cdot \mathbf{N} \\
 &\quad \left. + \left( \frac{h}{2} \xi_3 \right)^2 {}^u\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\lambda} \mathbf{d} - \left( \frac{h}{2} \xi_3 \right)^2 {}^u\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} \right) d\Gamma \, dt. \quad (5.51)
 \end{aligned}$$

Alle Terme sind in Radius und Winkel der Lochrandparametrisierung der zylindrischen Aussparung mit der vereinfachenden Annahme 5.5.1 konstant. Die linearen Terme verschwinden bei der Integration bezüglich der Dickenkoordinate. Damit verbleibt in der Ableitung des Trägheitsterms ein translatorischer und ein rotatorischer Teil um den Ausschnittsmittelpunkt auf der Mittelfläche.

*Resultat 5.5.1* (Berechnungsmodell der Ableitung des Trägheitsterms).

Die Ableitung des Trägheitsterms der Topologischen Ableitung wird durch die translatorische Beschleunigung und Adjungierte der Mittelfläche und die rotatorische Beschleunigung und den adjungierten Direktor berechnet:

$$\begin{aligned}
 - \lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{d |c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr} \right)^{-1} \int_0^T \int_{\Gamma_r} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma \, dt \\
 = - \int_0^T \left( \rho \ddot{\mathbf{u}}_{\mathcal{M}} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{M}} - \frac{\rho h^2}{12} ({}^u\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} - {}^u\ddot{\mathbf{R}}\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\lambda} \mathbf{d}) \right) dt. \quad (5.52)
 \end{aligned}$$

Das Resultat lässt sich interpretieren als die spezifische kinetische translatorische und rotatorische Energie des ausgeschnittenen Zylinders. Die Energie ist dabei wie bei der Ableitung der gemischt adjungierten Energie durch die Adjungierte induziert. Der Faktor  $\frac{\rho h^2}{12}$  entspricht dem auf das Volumen bezogenen Trägheitsmoment eines dünnen Stabes, auf den der Ausschnitt mit dem Übergang zum Limes reduziert wird, der um seine Querachse rotiert.

Die Formulierung der Volumenkraft ist meist nur translatorisch. Damit kann das Lochrandintegral der Ableitung der Volumenkräfte auf die Integrationspunkte auf der Mittelfläche reduziert werden:

$$\lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{d |c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr} \right)^{-1} \int_0^T \int_{\Gamma_r} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\lambda} d\Gamma dt = \int_0^T \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{M}} dt. \quad (5.53)$$

Für die Ableitung des Dämpfungsterms führt das analoge Vorgehen wie bei der Herleitung für die Ableitung des Trägheitsterms mit der Mittelflächengeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{u}}_{\mathcal{M}}$  und der Rotationsgeschwindigkeit  ${}^u\dot{\mathbf{R}}$  aus (3.54) auf

$$\begin{aligned} \lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{d |c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr} \right)^{-1} \int_0^T \int_{\Gamma_r} c_d \dot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\lambda} d\Gamma dt \\ = \int_0^T c_d \dot{\mathbf{u}}_{\mathcal{M}} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{M}} - \frac{c_d h^2}{12} \left( {}^u\dot{\mathbf{R}} \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} - {}^u\dot{\mathbf{R}} \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{M}} \right) dt. \end{aligned} \quad (5.54)$$

## 5.6 Zusammenführung und Visualisierung

In der räumlich kontinuierlichen Theorie liegt die Topologische Ableitung für jeden Punkt des Körpers vor. Mit Verwendung der Schalentheorie und der Modellierung des Ausschnitts als zylindrisches Loch wird dies auf eine Sensitivität für jeden Punkt der Mittelfläche des Körpers reduziert. Die Modellierung und Berechnung mit der Methode der finiten Elemente schränkt die Integralauswertung auf die Flächenintegrationspunkte (Abbildung 3.14a) der Schalenelemente ein, da entlang der Koordinaten dieser Punkte die effektive plastische Dehnung und die Spannungen an den Dickenintegrationspunkten (Abbildung 3.14b) berechnet werden. Alle weiteren Größen, wie der Gradient der Adjungierten Grad  $\boldsymbol{\lambda}$ , die Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{u}}$  und die Adjungierte  $\boldsymbol{\lambda}$ , können mit den Ansatzfunktionen (3.57) auf den Flächenintegrationspunkten ausgewertet werden.

Die Visualisierung von Simulationsergebnissen erfolgt in der Regel element- oder knotenbasiert. Bei der knotenbasierten Darstellung werden die zu visualisierenden Knotenwerte und Knotenkoordinaten mit den bilinearen Ansatzfunktionen zu einer Visualisierung der gesamten Mittelfläche mit den interpolierten Werten zusammengeführt.



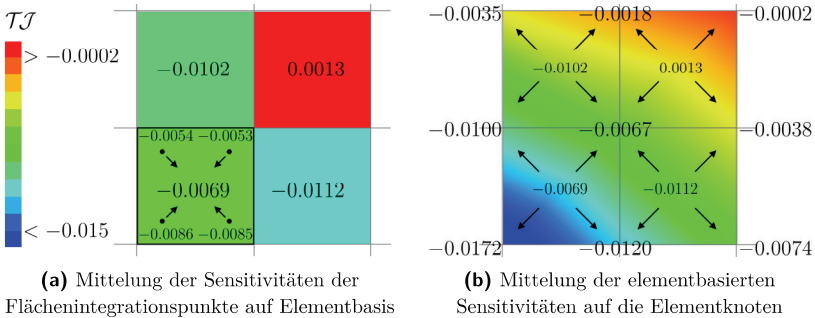
Für die knotenbasierte Darstellung der Topologischen Ableitung der praktischen Beispiele im nächsten Kapitel werden zunächst die Werte der Flächenintegrationspunkte elementweise gemittelt

$$\mathcal{TJ}^{(e)} = \frac{1}{n_{\mathcal{M}}} \sum_{p=1}^{n_{\mathcal{M}}} \mathcal{TJ}(\xi_{1p}, \xi_{2p}) . \tag{5.55}$$

In Abbildung 5.17a ist diese elementweise Mittelung skizziert. Die Werte der Flächenintegrationspunkte werden gemittelt und dem ganzen Element zugewiesen. Die Werte der  $n_{\text{Nachbar}}$  an einem Elementknoten  $\mathbf{X}_N$  angrenzenden Elemente werden mit dem jeweiligen Elementvolumen  $|\Omega^{(e)}|$  gewichtet und dann dem Knoten zugewiesen

$$\mathcal{TJ}(\mathbf{X}_N) = \frac{\sum_{e=1}^{n_{\text{Nachbar}}} \mathcal{TJ}^{(e)} |\Omega^{(e)}|}{\sum_{e=1}^{n_{\text{Nachbar}}} |\Omega^{(e)}|} . \tag{5.56}$$

Das Elementvolumen kann beispielsweise mit der numerischen Integration der Funktion  $z = 1$  bezüglich eines finiten Elements wie in (3.62) bestimmt werden. Mithilfe der Ansatzfunktionen wird dann ein bilinearer kontinuierlicher Verlauf der Sensitivität wie in Abbildung 5.17b erzeugt.



**Abbildung 5.17:** Visualisierung der Topologischen Ableitung

## 5.7 Zusammenfassung des numerischen Lösungsansatzes

Die analytischen Beschreibungen von Spannung und Dehnung am Lochrand unter der Voraussetzung linearen Materialverhaltens und kleiner Verschiebungen stoßen wegen der durch die Kerbwirkung initiierten plastischen Dehnung schnell an die

Grenze der Gültigkeit. Mit der Materialinterpolation in Abschnitt 5.2 wurde eine phänomenologische Modellierung für zeitlich begrenztes lineares Materialverhalten definiert, das die lokalen plastischen Dehnungen und die damit verbundene künstliche Veränderung des Materials berücksichtigt. In den folgenden Abschnitten wurden damit auf Basis der Schnittgrößen der Mikrozelle die Berechnungsmodelle der Ableitung der gemischt adjungierten Energie und der expliziten Ableitung der inneren Energie mithilfe der linearisierten Formeln erläutert. Die Berechnung der Ableitung des Trägheitsterms erfolgt schließlich auf Basis der Mittelflächentranslation und -rotation. Die gesamten Berechnungen dieses Kapitels sind in Algorithmus 4 zusammengefasst.

*Resultat 5.7.1* (Gesamter Berechnungsablauf der Topologischen Ableitung).

Die Berechnung der Topologischen Ableitung erfolgt insgesamt in drei Schritten, die hintereinander ausgeführt werden. Auf die Lösung des Anfangsrandwertproblems mit dem Algorithmus der impliziten Zeitintegration 1 (Kapitel 3, Seite 71) folgt die Berechnung der Adjungierten mit einem adjungierten Lösungsschema aus Algorithmus 2 oder 3. Die beiden adjungierten Lösungsschemata „erst differenzieren – dann diskretisieren“ und „erst diskretisieren – dann differenzieren“ werden dabei als gleichwertig betrachtet. Die Berechnung der Verschiebung  $\mathbf{u}$  und der adjungierten  $\boldsymbol{\lambda}$  erfolgt dabei gleichzeitig für alle Elementknoten des Körpers mit der Methode der finiten Elemente. Aus den berechneten Feldgrößen  $\mathbf{u}$  und  $\boldsymbol{\lambda}$  kann schließlich mit Algorithmus 4 punktweise die Topologische Ableitung berechnet werden. Der Ablauf ist im Diagramm in Abbildung 5.18 dargestellt.

In diesem Kapitel wurde nur mit der Schalenformulierung gearbeitet. Für die dreidimensionale Modellierung volumetrischer Körper mit kugelförmiger Aussparung existieren im linear Elastischen auch Lösungen für die Spannungsverteilung. Als Schnittgrößen werden dann keine Momente mehr betrachtet, sondern die 6 Spannungskomponenten (3 Normal- und 3 Schubspannungen). Die analytische Lösung wird als *Lösung des Problems von Léon* bezeichnet (Hahn 1985). Mit der Materialinterpolation können die Randintegrale prinzipiell auch auf der Kugelfläche ausgewertet werden.

---

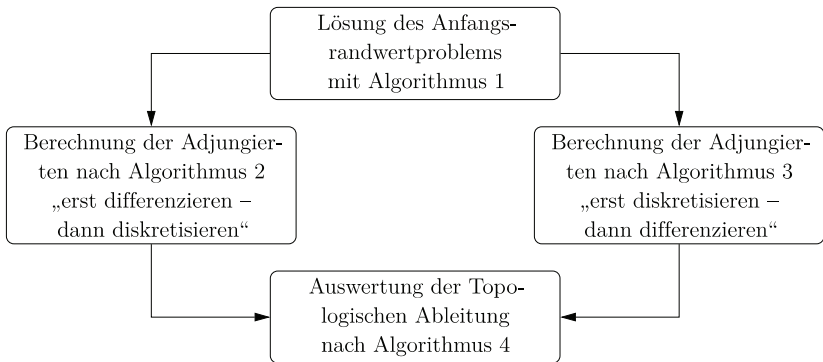
**Algorithmus 4** Numerische Auswertung der Randintegrale und Berechnung der Topologischen Ableitung

---

- 1 **For** alle Integrationspunkte der Mittelfläche **Do**
  - 2   **For** alle Zeitpunkte  $k = 0, \dots, m$  **Do**
  - 3     Berechne die Materialinterpolation  $\nu_{\text{eff}}$  und  $E_T$  nach (5.21) und (5.24) für jeden Dickenintegrationspunkt
  - 4     Berechne durchschnittliche effektive Materialkennwerte  $\bar{E}_T$ ,  $\bar{\nu}$  und  $\bar{\nu}'$  nach (5.25)
  - 5     Berechne Schnittgrößen  ${}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}{}^u\sigma_{\alpha\beta(s)}$  und  ${}_{u\mathcal{E}^{\text{loc}}}{}^u m_{\alpha\beta}$  der Lösung des Anfangsrandwertproblems im lokalen temporären Koordinatensystem der Verschiebung  ${}^u\mathcal{E}^{\text{loc}}$  nach (5.31) und (5.32)
  - 6     Berechne adjungierte Spannungen  ${}_{\lambda\mathcal{E}^{\text{loc}}}{}^\lambda\sigma_{\alpha\beta(s)}$  und adjungierte Momente  ${}_{\lambda\mathcal{E}^{\text{loc}}}{}^\lambda m_{\alpha\beta}$  des adjungierten Endwertproblems im adjungierten lokalen temporären Koordinatensystem der Adjungierten  ${}^\lambda\mathcal{E}^{\text{loc}}$  nach (5.37) und (5.38)
  - 7     Berechne die Rotationsbeschleunigung  ${}^u\ddot{\mathbf{R}}$  nach (3.55), die Rotationsgeschwindigkeit  ${}^u\dot{\mathbf{R}}$  nach (3.54) und den adjungierten Direktor  ${}^\lambda\mathbf{d} = {}^\lambda\mathbf{R}\mathbf{N}$  nach der Schalendefinition mit (3.41) mit den adjungierten Rotationen
  - 8   **End For**
  - 9   Berechne das Zeitintegral der Ableitung der gemischt adjungierten Energie (5.41)
  - 10   Berechne die explizite Ableitung der inneren Energie mit Spannungen und Momenten zum Endzeitpunkt nach (5.46)
  - 11   Berechne das Zeitintegral der Ableitung des Trägheitsterms (5.52)
  - 12   Berechne das Zeitintegral der Ableitung der Volumenkräfte (5.53)
  - 13   Berechne das Zeitintegral der Ableitung des Dämpfungsterms (5.54)
  - 14 **End For**
  - 15 Berechne die durchschnittliche Elementsensitivität durch Mittelung der Sensitivitäten der Flächenintegrationspunkte (5.55)
  - 16 Glätte die Elementsensitivitäten durch Extrapolation auf die Elementknoten (5.56)
- 

## 5.8 Zusammenfassung der Annahmen und Verbesserungspotenziale

Dem vorgestellten Berechnungskonzept liegen vereinfachende Annahmen zugrunde. Motiviert durch das Verfahren der impliziten Zeitintegration zur Lösung des An-



**Abbildung 5.18:** Ablauf der Berechnung der Topologischen Ableitung

fangsrandwertproblems und der Lösung des adjungierten Endwertproblems wurde Annahme 5.2.1 getroffen: Das Material verhält sich in jedem Zeitpunkt temporär linear. Mit dieser Annahme wurde die Materialinterpolation zur Berechnung der Schnittgrößen entwickelt. Und wieder mit dieser Materialinterpolation wurde aus den Schnittgrößen mit den linearen Formeln auf die Spannungen und Dehnungen am Lochrand geschlossen (Annahme 5.3.2). Die phänomenologische Materialinterpolation kann auf Basis der numerischen Materialmodellierung verbessert werden. Eine geschlossene Formulierung für die Spannungen und Dehnungen am Lochrand bei nichtlinearem Materialverhalten bietet für die nichtlineare Topologische Ableitung das größte Potential zur korrekten und effizienten Berechnung. Hier gehen die Untersuchungen von Sawin 1956 mit den Lösungen für ideal plastisches Materialverhalten ohne Verfestigung noch nicht weit genug.

Bei der Berechnung der Spannungen und Dehnungen am Lochrand wurden die Formeln auf Basis der Kirchhoffschen Plattentheorie verwendet. In Annahme 5.3.3 wird damit die Schubweichheit vernachlässigt, die eine Schalenformulierung in der nichtlinearen Kontinuumsmechanik jedoch grundsätzlich hat. Bei im Verhältnis zur Schalendicke sehr kleinen Löchern (im Fall der Topologischen Ableitung mit infinitesimalem Lochradius) ist die Kirchhoffsche Annahme für die Spannungsabschätzung am Lochrand nicht mehr ausreichend. Hierzu wurden bereits analytische Weiterentwicklungen mit der Reissner-Mindlinschen Plattentheorie von Felger und Becker 2019 vorgestellt.

Sowohl bei der Ableitung der gemischt adjungierten Energie als auch beim Berechnungsmodell der expliziten Ableitung der inneren Energie wurde zunächst die

Formulierung in der Momentankonfiguration betrachtet, um mit dem Cauchyschen Spannungstensor und dem linearisierten Verzerrungstensor auf Größen zurückzugreifen, die aus den linearen Formeln für die Umfangsspannung am Aussparungsrand berechnet werden können. Die Integration erfolgte aber schließlich nicht auf dem Lochrand in der Momentankonfiguration sondern in der Bezugskonfiguration (Annahme 5.3.2), da hier die Parametrisierung der Zylindermantelfläche besonders einfach ist. Die fehlende Kenntnis der genauen Verzerrung des Lochs führt auch bei der Berechnung der Ableitung des Trägheitsterms durch die Vernachlässigung des kinematischen Verhaltens des Lochrands (Annahme 5.3.1) auf den Verlust der Trägheitsänderung durch die Änderung der Lochform. In beiden Fällen könnte mit Anwendung der Formel von Cesàro (Cesàro 1906) durch Integration der Dehnung die Veränderung des Aussparungsrandes berechnet werden.

Beim Berechnungsmodell der expliziten Ableitung der inneren Energie wurde vereinfachend eine Unabhängigkeit der inneren Energie von der Verformungsgeschichte angenommen (Annahme 5.4.2). Hier fehlten zur verbesserten Auswertung die Spannungsraten. Dies kann mit einer detaillierteren Ausgabe des Finite-Elemente-Berechnungsprogramms oder einer geeigneten numerischen Differenziation aus den zeitlichen Verläufen der Spannungen korrigiert werden.

Eine allgemeinere Lösung, die unabhängig von den linearen Umfangsspannungen eine Auswertung der Randintegrale zulässt, ist generell wünschenswert. Für die explizite Ableitung der inneren Energie wurde hierzu in Weider und Schumacher 2018 vorgeschlagen, auf Basis der gesonderten Berechnung der Mikrozone eine Approximation für das Lochrandintegral in Abhängigkeit der Schnittgrößen zu erstellen. Für die Ableitung der gemischt adjungierten Energie mit der Spannung und dem adjungierten Gradienten ergeben sich mehr Größen am Lochrand, die in Abhängigkeit aller Schnittgrößen in der Approximation dargestellt werden müssen. Eine Modellierung mit künstlichen neuronalen Netzen wäre hier eine Lösungsmöglichkeit, da mit einem neuronalen Netz mehrere Größen gleichzeitig approximiert werden können.

# 6 Plausibilitätsprüfung anhand praktischer Beispiele

Anhand zweier akademischer Beispiele werden in diesem Kapitel die zuvor entwickelten Formeln und Berechnungsmodelle plausibilisiert. Zunächst wird an einem Euler-Bernoulli-Balken<sup>1</sup> untersucht, ob sich die nichtlineare Topologische Ableitung der inneren Energie im Grenzfall langsamer Belastung, kleiner Verschiebungen und daraus resultierend ohne plastische Dehnungen auf die lineare Topologische Ableitung zurückführen lässt. Für das Balkenbeispiel kann die Adjungierte nach dem Lösungsschema „erst differenzieren - dann diskretisieren“ analytisch ohne Diskretisierung angegeben werden, was die Überprüfung des adjungierten Lösungsschemas „erst diskretisieren - dann differenzieren“ überhaupt erst ermöglicht.

Die Veränderung der Topologischen Ableitung bei Nichtlinearität wird anschließend mit dem Balken bei großen Verschiebungen und plastischen Dehnungen gezeigt, wobei dann auch Schubverzerrungen zugelassen werden.

Mit einem Kragträger unter hochdynamischer Belastung wird schließlich auch das Verschiebungsfunktional inhärent geprüft.

Die Finite-Elemente-Berechnung der nichtlinearen Biegung des Balkens und des Kragträgers erfolgt mit der kommerziellen Software LS-Dyna<sup>®2</sup>. Die Algorithmen 2, 3 und 4 sind mit der Skriptsprache *Python 3*<sup>3</sup> und dem Modul *Numpy*<sup>4</sup> für die Lösung der linearen Gleichungssysteme umgesetzt.

---

<sup>1</sup>nach L. Euler (1707–1783) und J. Bernoulli (1654–1705)

<sup>2</sup>LS-Dyna<sup>®</sup> R11.1, shared memory parallel (smp), double precision (dp)

<sup>3</sup>Python Version 3.7.9, <http://www.python.org>, Aufruf am 26.11.2020

<sup>4</sup>Numpy Version 1.19.1 <http://numpy.org>, Aufruf am 26.11.2020

## 6.1 Biegebalken

Wir betrachten einen einseitig eingespannten Balken unter Querbelastung, also einen geraden Träger konstanter Geometrie gemäß Abbildung 6.1a, dessen Länge  $l$  groß ist gegenüber den Abmessungen des Querschnitts. Die Bezeichnungen der Koordinaten, Richtungen, Verschiebungen und Rotationen ist hier abweichend von den konventionellen Bezeichnungen in der Lehliteratur angelehnt an die Bezeichnungen der Schale. Die Achse entlang des Vektors  $\mathbf{e}_1$  ist die Schwerachse, die Achsen entlang der Vektoren  $\mathbf{e}_2$  und  $\mathbf{e}_3$  sind die Hauptträgheitsachsen.

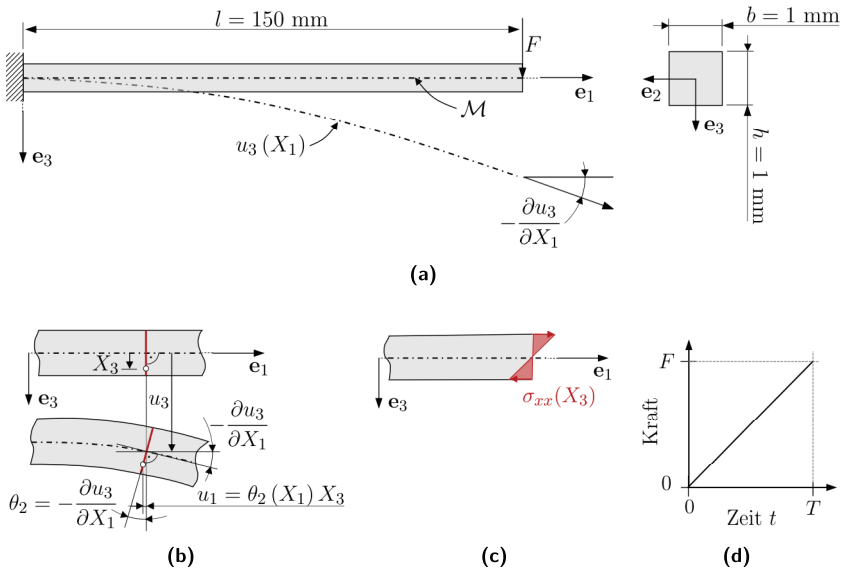
Zunächst betrachten wir den Balken in Abbildung 6.1 unter den linearen Annahmen die in Anmerkung 3.2.2 auf Seite 43 zusammengefasst sind. Die Materialparameter entsprechen denen des Aluminium-Materials in Tabelle 5.1 auf Seite 146. Der Balken wird am freien Ende durch eine Einzelkraft  $F = 1 \cdot 10^{-6}$  kN so belastet, dass eine gerade Biegung entsteht, also nur Momente  $m_{xx}$  um die  $\mathbf{e}_2$ -Achse hervorgerufen werden. Weitere kinematische Annahmen werden zur eindeutigen Ermittlung der Verschiebungen benötigt:

- Querschnitte, die vor der Deformation eben waren, sind auch nach der Deformation eben,
- die Querschnittsfläche bleibt senkrecht zur Mittelfläche und
- die Querschnittshöhe bleibt konstant.

Die ersten beiden Annahmen werden auch *Bernoullische Annahmen* genannt. Damit werden Schubdeformationen vernachlässigt und der Balken wird auch als *schubstarr* bezeichnet. Diese Schubstarrheit nach Bernoulli entspricht der Kirchhoffschen Annahme für Platten. Der Rotationsfreiheitsgrad  $\theta_2$  ist damit festgelegt durch die Ableitung der Durchbiegung als

$$\theta_2 = -\frac{\partial u_3}{\partial X_1}. \quad (6.1)$$

Wir entwickeln hier direkt die Bewegungsgleichung des Balkens und leiten daraus die statische Biegelinie  $u_3(X_1)$  als quasistatischen Spezialfall ab, bei dem die Bewegung so langsam abläuft, dass sich der Balken zu jedem Zeitpunkt im statischen Gleichgewicht befindet. Der Schwerpunkt- und der Drallsatz für das blaue Balkenelement in Abbildung 6.2 können über das Kräftegleichgewicht an dem infinitesimalen grauen Volumenelement entwickelt werden. Das Kräftegleichgewicht führt wie bei der Herleitung der lokalen Bewegungsgleichung in Abschnitt 3.2.1 auf die starke Form der Bewegungsgleichung.



**Abbildung 6.1:** Biegung des Balkens mit Bernoullischer Annahme

Diese Gleichung, integriert bezüglich des blauen Balkenelements und Einarbeitung der äußeren Belastung  $\tau_3$  mit dem Gaußschen Integralsatz, liefert mit der Querschnittsfläche  $A := bh$  den Schwerpunktsatz

$$\rho A \ddot{u}_3 = \frac{\partial f_{xz}}{\partial X_1} + \tau_3. \quad (6.2)$$

Die Integration des Drallsatzes für das infinitesimale Volumenelement bezüglich des blauen Balkenelements liefert den Drallsatz

$$\rho I_2 \ddot{\theta}_2 = \frac{\partial m_{xx}}{\partial X_1} - f_{xz}. \quad (6.3)$$

Da keine Schubverzerrungen vorliegen, kann die Normalspannung mit der Annahme des Ebenbleibens des Querschnitts  $u_1 = \theta_2 X_3$  direkt aus der Dehnung mit

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = E \frac{\partial u_1}{\partial X_1} = E \frac{\partial \theta_2}{\partial X_1} X_3 \quad (6.4)$$

berechnet werden. Das Biegemoment  $m_{xx}$  lässt sich mit der Momentendefinition im vorherigen Kapitel (5.1) und zusätzlicher Integration bezüglich der Breitenko-



ordinate  $X_2 \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$  mit dem Flächenträgheitsmoment für einen rechteckigen Balkenquerschnitt  $I_2 := \frac{bh^3}{12}$  berechnen:

$$m_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sigma_{xx} X_3 \, dX_2 \, dX_3 = EI_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial X_1}. \quad (6.5)$$

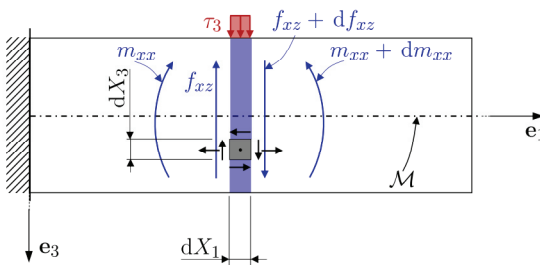
Wird noch die Rotationsträgheit vernachlässigt ( $\varrho I_2 = 0$ ), sind noch die Differentialgleichungen (6.1), (6.5), (6.3) und (6.2) für das dynamische System zu lösen:

$$\frac{\partial u_3}{\partial X_1} = -\theta, \quad EI_2 \frac{\partial \theta}{\partial X_1} = m_{xx}, \quad \frac{\partial m_{xx}}{\partial X_1} = f_{xz}, \quad \varrho A \ddot{u}_3 = \frac{\partial f_{xz}}{\partial X_1} + \tau_3.$$

Von links nach rechts wird jeweils differenziert und dann eingesetzt. Bei gleichbleibendem Querschnitt ist  $EI_2 = \text{const.}$  und das System vereinfacht sich zur Bewegungsgleichung des Euler-Bernoulli-Balkens

$$EI_2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial X_1^4} + \varrho A \ddot{u}_3 = \tau_3. \quad (6.6)$$

Die Bewegungsgleichung beschreibt ein Anfangsrandwertproblem mit geometrischen Randbedingungen und dynamischen Anfangswerten. Liegt keine Belastung durch äußere Spannungen vor, sondern nur eine idealisierte Einzellast, wird diese bei der räumlichen Integration in die statische Lösung eingearbeitet. Das Schwingungsverhalten des Euler-Bernoulli-Balkens wird im Raum mit einer Differentialgleichung 4. Ordnung und in der Zeit mit einer Differentialgleichung 2. Ordnung modelliert.



**Abbildung 6.2:** Inkrementelles Balkenelement mit Schnittkräften und -momenten

### 6.1.1 Quasistatische Belastung ohne Trägheitseffekte

In diesem Abschnitt wird die quasistatische Lösung der Bewegungsgleichung ohne Berücksichtigung der Trägheit betrachtet. Dazu wird die Verschiebung als linear und die Geschwindigkeit als konstant in der Zeit angenommen. Mit dieser Vereinfachung wird die statische Biegelinie inkrementell durch eine Kraft erzeugt, die langsam bis zur finalen Einzellast  $F$  gesteigert wird (wie in Abbildung 6.1d dargestellt). Es entfällt der Trägheitsterm, da die Beschleunigung gleich null ist. Dies vereinfacht die Bewegungsgleichung zur Differentialgleichung der Biegelinie für den statischen Fall:

$$EI_2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial X_1^4} = \tau_3. \quad (6.7)$$

Im Fall des Kragbalkens mit den geometrischen Randbedingungen  $u_3(X_1 = 0) = 0$  und  $\frac{u_3}{\partial X_1}(X_1 = 0)$  und der statischen Randbedingung der Einzellast  $F$  am freien Ende ohne äußere Streckenlast ( $\tau_3 = 0$ ) sind die Verschiebungen

$$u_1 = -\frac{1}{EI_2} \frac{t}{T} F \left( -\frac{X_1^2}{2} + lX_1 \right) X_3 \quad (6.8)$$

$$u_2 = 0 \quad (6.9)$$

$$u_3 = \frac{1}{EI_2} \frac{t}{T} F \left( -\frac{X_1^3}{6} + \frac{lX_1^2}{2} \right) \quad (6.10)$$

eine Lösung der statischen Biegelinie (6.7) und auch eine Lösung der Bewegungsgleichung (6.6) mit den Anfangswerten  $\bar{u}_3 = 0$  und  $\dot{\bar{u}}_3 = \frac{1}{EI_2} \frac{F}{T} \left( -\frac{X_1^3}{6} + \frac{lX_1^2}{2} \right)$ . Die Verzerrung  $\varepsilon_{xx}$  entfällt mit den Bernoullischen Annahmen. Die Normalspannung in Richtung der Balkenachse ist nach (6.4) dann

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{I_2} \frac{t}{T} F (X_1 - l) X_3. \quad (6.11)$$

Betrachten wir nun die innere Energie  $\mathcal{J}_\sigma$ . Die Definition aus 4.67 in Abschnitt 4.5.1 können wir mit dem Elastizitätstensor und der linearen Annahme, dass sich Bezugs- und Momentankonfiguration nicht mehr unterscheiden, umformen:

$$\mathcal{J}_\sigma = \int_0^T \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} \, d\Omega \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) \, d\Omega \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) \, d\Omega \, dt. \quad (6.12)$$

Für das adjungierte Lösungsschema „erst differenzieren - dann diskretisieren“ ist nach (4.76) die Pseudolast für das adjungierte Endwertproblem gleich null. Mit der Substitution  $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(s) = \boldsymbol{\lambda}(T - s)$  und Umwandlung in ein Anfangswertproblem nach Anmerkung 4.3.2 auf Seite 90 kann die Adjungierte rein analytisch berechnet

werden. Da für den Balken nur die Adjungierte der inneren Energie betrachtet wird, kann der Index  $\sigma$  der Übersichtlichkeit halber in diesem Abschnitt weggelassen werden.

Es sind zunächst die Anfangswerte zu bestimmen. Aufgrund der Unabhängigkeit der inneren Energie von den Beschleunigungen ist der Anfangswert für die Adjungierte gleich null:  $\tilde{\lambda}(0) = \mathbf{0}$ . Für die Zeitableitung der Adjungierten muss noch der Anfangswert bestimmt werden. Da keine weiteren Randlasten vorgegeben sind, kann die Anfangswertbedingung mit dem Gaußschen Integralsatz umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) \Big|_{t=T} \cdot \varepsilon(\phi(0)) + \rho \dot{\tilde{\lambda}}(0) \cdot \phi(0) \, d\Omega \\ = \int_{\Omega} -\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) \Big|_{t=T} \cdot \varepsilon(\phi(0)) + \rho \dot{\tilde{\lambda}}(0) \cdot \phi(0) \, d\Omega = 0, \end{aligned}$$

so dass die Anfangsbedingung für die Zeitableitung der Adjungierten

$$\int_{\Omega} \rho \dot{\tilde{\lambda}}(0) \cdot \phi(0) \, d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) \Big|_{t=T} \cdot \varepsilon(\phi(0)) \, d\Omega \quad (6.13)$$

für beliebige Testfunktionen  $\phi$  erfüllt sein muss. Für die adjungierte Bestimmungsgleichung wird noch die Ableitung der von der Adjungierten geleisteten Arbeit nach den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  benötigt. Mit der gleichen Umformung mit dem Elastizitätstensor wie in 5.16 und dem Gaußschen Integralsatz kann das adjungierte Anfangswertproblem in der schwachen Form folgendermaßen umgeformt

$$\begin{aligned} \left\langle G^*(\tilde{\lambda}(\Omega), \ddot{\tilde{\lambda}}(\Omega), \Omega), \phi \right\rangle &= \int_0^T \int_{\Omega} \sigma(\tilde{\lambda}) \cdot \varepsilon(\phi) \, d\Omega \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \rho \ddot{\tilde{\lambda}} \cdot \phi \, d\Omega \, dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} \tilde{\lambda} \sigma \cdot \phi \, d\Omega \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \rho \ddot{\tilde{\lambda}} \cdot \phi \, d\Omega \, dt \end{aligned}$$

und schließlich in die strenge lokale inkrementelle Form

$$\operatorname{div} \sigma(\tilde{\lambda}) = \rho \ddot{\tilde{\lambda}} \quad \text{in } \Omega$$

gebracht werden. Für die Adjungierte werden die gleichen „schubstarren“ Annahmen  $\lambda_1 = -\frac{\partial \lambda_3}{\partial X_1} X_3$  und  $\tilde{\lambda}_1 = -\frac{\partial \tilde{\lambda}_3}{\partial X_1} X_3$  getroffen. Wie bei der Entwicklung der Balkendifferentialgleichungen bringt die Integration der lokalen inkrementellen Form jetzt die adjungierte Differentialgleichung

$$EI_2 \frac{\partial^4 \tilde{\lambda}_3}{\partial X_1^4} + \rho A \ddot{\tilde{\lambda}}_3 = 0. \quad (6.14)$$

Dies ist die homogene Differentialgleichung für eine freie Schwingung ohne Dämpfung. Die freie Schwingung wird auch *Eigenschwingung* genannt: Die Schwingung wird nur durch die Anfangswerte bestimmt, dann wird das System sich selbst überlassen. Eine Schwingung ist ein Spezialfall der transienten Bewegung, deren Merkmale sich in gewissen Zeitabständen wiederholen.

Wir suchen über den Produktansatz in Raum und Zeit nach einer speziellen Lösung der Art

$$\tilde{\lambda}_3(X_1, s) = \hat{\lambda}\Lambda(X_1) \cos(\omega s - \phi),$$

mit der harmonische Schwingungen beschrieben werden können. Die Funktion  $\Lambda(X_1)$  wird als *Eigenschwingungsform* bezeichnet. Der Faktor  $\cos(\omega s - \phi)$  mit der *Eigenkreisfrequenz*  $\omega$  und der *Phasenverschiebung*  $\phi$  wird dabei als Ansatz für die Lösung der zeitlichen Schwingung, also örtlich fixiert gewählt. Der Faktor  $\hat{\lambda}$  entspricht nicht in jedem Fall exakt der *Amplitude* im physikalischen Sinn und damit der halben Schwingungsweite, da die Schwingungsweite auch von der Eigenschwingungsform abhängt. Im Fall des Biegebalkens beispielsweise entspricht  $\hat{\lambda}$  der halben tatsächlichen Amplitude. Trotzdem bezeichnen wir den Faktor  $\hat{\lambda}$  als Amplitude.

Eingesetzt in die adjungierte Differentialgleichung (6.14) liefert der Produktansatz die räumliche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 \Lambda}{(\partial X_1)^4} - \kappa^4 \Lambda = 0 \quad \text{mit} \quad \kappa^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EI_2}.$$

Die Herleitung der Lösung dieser räumlichen Differentialgleichung kann beispielsweise Gross et al. 2018 entnommen werden. Hier sei nur das Ergebnis in verkürzter Form speziell für den einseitig eingespannten Balken angegeben:

Aus den vier geometrischen Randbedingungen (Einspannungen und freie Enden) folgen die Eigenkreisfrequenzen  $\omega_k$ . Die ersten drei Eigenkreisfrequenzen lauten

$$\begin{aligned} \kappa_1 l &= 1.875, & \omega_1 &= 3.516 \sqrt{\frac{EI_2}{\rho A l^4}}, \\ \kappa_2 l &= 4.694, & \omega_2 &= 22.034 \sqrt{\frac{EI_2}{\rho A l^4}}, \\ \kappa_3 l &= 7.854, & \omega_3 &= 61.685 \sqrt{\frac{EI_2}{\rho A l^4}}. \end{aligned}$$

Die weiteren Lösungen können näherungsweise mit  $\kappa_k l = (2k - 1) \frac{\pi}{2}$  berechnet werden. In Abbildung 6.3a sind die ersten 11 Eigenkreisfrequenzen des Balkens aufgetragen. Für die  $k$ -te Eigenschwingungsform folgt damit mit der Abkürzung

$$\gamma_k = \frac{\cos \kappa_k l + \cosh \kappa_k l}{\sin \kappa_k l + \sinh \kappa_k l}$$

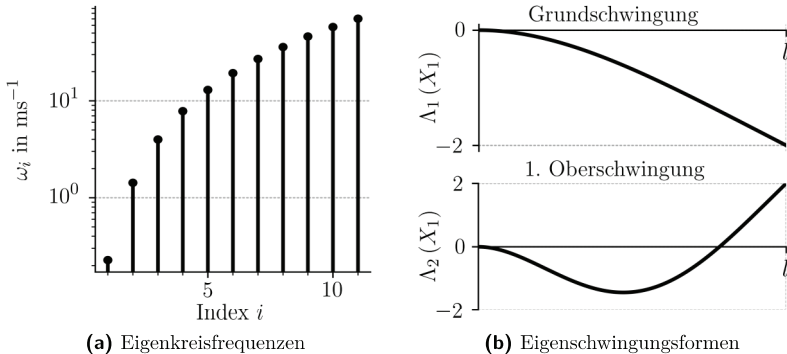
die  $k$ -te Eigenschwingungsform des Balkens

$$\Lambda_k(X_1) = \cos \kappa_k X_1 - \cosh \kappa_k X_1 - \gamma_k (\sin \kappa_k X_1 - \sinh \kappa_k X_1) .$$

Die ersten beiden Eigenschwingungsformen sind in Abbildung 6.3b dargestellt. Die Eigenschwingungsformen sind *massenorthogonal*, das heißt es gilt:

$$\int_0^l \varrho A \Lambda_i(X_1) \Lambda_j(X_1) dX_1 = \begin{cases} m_i^* & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases} \quad (6.15)$$

Dabei wird  $m_i^*$  als die modale Masse der  $i$ -ten Eigenschwingungsform bezeichnet.<sup>5</sup> Es gilt immer:  $\int_0^l \Lambda_i(X_1) \Lambda_i(X_1) dX_1 = l$ . Bei konstanter Massenbelegung  $\varrho A$  ist die modale Masse für jede Eigenschwingungsform  $m_i^* = \varrho A l$ . Bei jeder Eigenschwingungsform ist also die gesamte Masse des Balkens beteiligt.



**Abbildung 6.3:** Eigenschwingungsformen und -kreisfrequenzen des einseitig eingespannten Balkens

<sup>5</sup>In der Lehrliteratur (zum Beispiel Magnus et al. 2016, Gross et al. 2018) werden Amplitude und Eigenschwingungsform nicht getrennt voneinander dargestellt, sondern die Amplitude ist als anzupassender Faktor in die Eigenschwingungsform integriert.

Wenn der Balken mit allen möglichen Teillösungen schwingen kann, ist die vollständige Lösung der homogenen Bewegungsgleichung die Summe aller Teilschwingungen. Die adjungierte Lösung ist also von der Form

$$\tilde{\lambda}_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\lambda}_k \Lambda_k(X_1) \cos(\omega_k s - \phi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\lambda}_k \Lambda_k(X_1) \sin \omega_k s.$$

Die Phasenverschiebungen  $\phi_k$  ergeben sich dabei aus den Anfangswerten

$$\tilde{\lambda}_1(0) = \tilde{\lambda}_3(0) = 0.$$

Damit kann der Kosinus mit Phasenverschiebung direkt als Sinus geschrieben werden.

Die Rücksubstitution  $t = T - s$  liefert die adjungierte Lösung bis auf die Amplituden  $\hat{\lambda}_k$  bestimmt:

$$\lambda_1 = - \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\lambda}_k \frac{\partial \Lambda_k(X_1)}{\partial X_1} \sin \omega_k (T - t) X_3, \quad (6.16)$$

$$\lambda_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\lambda}_k \Lambda_k(X_1) \sin \omega_k (T - t). \quad (6.17)$$

Die Amplitude  $\hat{\lambda}_k$  der Eigenschwingungsformen  $\Lambda_k$  ist aus der Anfangsbedingung (6.13) zu bestimmen. Speziell in der vorliegenden Form der Anfangsbedingungen ist die Amplitude nur schwer zu bestimmen. Daher wird in einem kurzen Exkurs die Amplitude mit der räumlichen Diskretisierung entwickelt.

Das adjungierte Gleichgewicht in der räumlich diskretisierten Form kann aus (4.46) übernommen werden. Aufgrund der linearen Elastizität ist die tangentielle Steifigkeitsmatrix gleich der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T = \mathbf{K}$ . Das adjungierte Endwertproblem räumlich diskretisiert lautet damit

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\lambda}}(t) + \mathbf{K}\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{0}. \quad (6.18)$$

In der räumlich diskretisierten Form sind die Endwerte nach (4.51) bis (4.53) definiert durch

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\lambda}^{(m)} = \mathbf{0} \quad (6.19)$$

$$\mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\lambda}}^{(m)} = \mathbf{K}\mathbf{u}^{(m)} \quad (6.20)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\lambda}}^{(m)} = \mathbf{0}. \quad (6.21)$$

Für die Lösung des räumlich diskretisierten Differentialgleichungssystems, ist in diesem Spezialfall keine Lösung mit einem zeitlichen Integrationsalgorithmus nötig.

Das System kann zum Beispiel mit dem Vektor  $\mathbf{v}$ , der Eigenkreisfrequenz  $\omega$  und den Kosinus- und Sinusamplituden  $\hat{\lambda}_c$  und  $\hat{\lambda}_s$  über den Separationsansatz

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{v} (\hat{\lambda}_c \cos \omega t + \hat{\lambda}_s \sin \omega t) \quad (6.22)$$

gelöst werden. Die zeitlichen Ableitungen sind dann

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \mathbf{v} \omega (-\hat{\lambda}_c \sin \omega t + \hat{\lambda}_s \cos \omega t), \quad (6.23)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \mathbf{v} \omega^2 (-\hat{\lambda}_c \cos \omega t - \hat{\lambda}_s \sin \omega t). \quad (6.24)$$

Eingesetzt in das adjungierte Endwertproblem (6.18) muss für alle  $t$  die Gleichung

$$\underbrace{(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})}_{\lambda^2} \mathbf{v} (\hat{\lambda}_c \cos \omega t + \hat{\lambda}_s \sin \omega t) = \mathbf{0}$$

erfüllt sein. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn  $(\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{v} = \mathbf{0}$  gilt. Dieses System mit  $n_f$  Freiheitsgraden hat  $2n_f$  sogenannte *Eigenwerte*. Die Eigenwerte  $\lambda_{j1}$  und  $\lambda_{j2}$  sind imaginär paarweise komplex konjugiert und hängen direkt mit den Eigenkreisfrequenzen  $\omega_j$  durch  $\lambda_{j1} = +i\omega_j$  sowie  $\lambda_{j2} = -i\omega_j$  zusammen.

Die *Eigenvektoren*  $\mathbf{v}_j$  geben die räumliche Verteilung der Bewegungsformen an. Zu komplex konjugierten Eigenwerten gehören komplex konjugierte Eigenvektoren. Bei dem vorliegenden Fall von rein imaginären Eigenwerten ergeben sich damit  $n_f$  rein reelle linear unabhängige Eigenvektoren, unabhängig vom Vorzeichen der Eigenwerte. Die Eigenvektoren sind nur bis auf einen konstanten Faktor festgelegt, daher erfolgt die Normierung bezüglich der Massenmatrix mit

$$\mathbf{v}_{N_j} = \frac{\mathbf{v}_j}{\sqrt{\mathbf{v}_j^T \mathbf{M} \mathbf{v}_j}}.$$

Der Index  $N$  wird im Folgenden weggelassen, da die Vektoren immer in dieser normierten Form vorliegen sollen. Dann sind die Eigenvektoren bezüglich der Systemmatrizen orthogonal:

$$\mathbf{v}_k^T \mathbf{M} \mathbf{v}_j = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_k^T \mathbf{K} \mathbf{v}_j = 0 \quad \text{für} \quad k \neq j, \quad (6.25)$$

$$\mathbf{v}_k^T \mathbf{M} \mathbf{v}_k = 1 \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_k^T \mathbf{K} \mathbf{v}_k = \omega_k^2. \quad (6.26)$$

Die unsymmetrische Matrix der Eigenvektoren  $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n_f})$  wird als *Modalmatrix* bezeichnet. Die Matrix  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$  kann mit der Modalmatrix diagonalisiert werden

$$\text{diag}(\omega_k^2) = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{V}. \quad (6.27)$$

Da die Eigenvektoren  $\mathbf{v}_k$  linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis des Vektorraums der Verschiebungen. Jeder Verschiebungszustand  $\mathbf{u}(T)$ , wie beispielsweise die statische Biegelinie, kann in diesem Vektorraum eindeutig mit den Koeffizienten  $\hat{u}_k$  dargestellt werden. Diese Koeffizienten geben an, wie stark ein Eigenvektor an der Gesamtverschiebung beteiligt ist. Wir betrachten die statische Biegelinie als die Summe der Eigenschwingungsformen:

$$\mathbf{u}(T) = \sum_{k=1}^{n_f} \hat{u}_k \mathbf{v}_k = \mathbf{V} \hat{\mathbf{u}}. \quad (6.28)$$

Für die homogene Lösung der Differentialgleichung (6.18) wird jetzt die Überlagerung der Teilschwingungen des Separationsansatzes (6.22)

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \sum_{k=1}^{n_f} \mathbf{v}_k \left( \hat{\lambda}_{k_c} \cos \omega_k t + \hat{\lambda}_{k_s} \sin \omega_k t \right) \quad (6.29)$$

an die Anfangsbedingungen (6.19) und (6.20) angepasst.

Mit dem Endwert  $\boldsymbol{\lambda}(T) = \mathbf{0}$  lässt sich die Kosinus-Amplitude mit der Sinus-Amplitude ausdrücken

$$\hat{\lambda}_{k_c} = -\hat{\lambda}_{k_s} \tan \omega_k T. \quad (6.30)$$

Die Kosinus-Amplitude  $\hat{\lambda}_{k_c}$  eingesetzt in die Ableitung der Adjungierten (6.23) und Auswertung zum Endzeitpunkt liefert zunächst

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(T) = \sum_{k=1}^{n_f} \mathbf{v}_k \left( \omega_k \hat{\lambda}_{k_s} \tan \omega_k T \sin \omega_k T + \omega_k \hat{\lambda}_{k_s} \cos \omega_k T \right). \quad (6.31)$$

Der Endwert  $\dot{\boldsymbol{\lambda}}(T)$  kann aber auch aus (6.20) mit der Ähnlichkeitstransformation (6.27) und der Darstellung der Biegelinie im Raum der Eigenvektoren (6.28) ermittelt werden:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(T) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{u}(T) = \mathbf{V} \operatorname{diag} \left( \omega_k^2 \right) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \hat{\mathbf{u}} = \sum_{k=1}^{n_f} \omega_k^2 \hat{u}_k \mathbf{v}_k. \quad (6.32)$$

Der Vergleich von (6.31) und (6.32) liefert die Sinus-Amplitude

$$\hat{\lambda}_{k_s} = \frac{\omega_k^2 \hat{u}_k}{\omega_k \left( \frac{\sin^2 \omega_k T}{\cos \omega_k T} + \frac{\cos^2 \omega_k T}{\cos \omega_k T} \right)} = \hat{u}_k \omega_k \cos \omega_k T. \quad (6.33)$$

Die Lösung der Differentialgleichung wird dann aus (6.29) mit der Kosinus-Amplitude aus (6.30), der Sinus-Amplitude aus (6.33) und mit elementaren Umformregeln des Sinus und Kosinus aufgelöst

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}(t) &= \sum_{k=1}^{n_f} \mathbf{v}_k \left( -\hat{u}_k \omega_k \sin \omega_k T \cos \omega_k t + \hat{u}_k \omega_k \cos \omega_k T \sin \omega_k t \right) \\ &= - \sum_{k=1}^{n_f} \mathbf{v}_k \hat{u}_k \omega_k \sin \omega_k (T - t). \end{aligned} \quad (6.34)$$



Vergleichen wir dieses Ergebnis nun mit dem kontinuierlichen Lösungsansatz (6.17), so ist noch die Verbindung zwischen den Eigenschwingungsformen und den Eigenvektoren zu diskutieren:

Vollintegriert mit konsistenter Massenmatrix entsprechen sich die Eigenschwingungsformen  $\Lambda_k$  des kontinuierlichen Balkens und die Eigenvektoren  $\mathbf{v}_k$  des diskretisierten Balkens bis auf einen Faktor  $\pm\sqrt{1/\rho Al}$ . Dies liegt an der Normierung der Eigenvektoren bezüglich der Massenmatrix (6.26), während die Eigenschwingungsformen ohne Massenbelegung quadratisch integriert gleich  $l$  ergeben. Damit unterscheiden sich auch die statischen Amplituden der beiden Systeme ebenfalls um diesen Faktor. Das Ergebnis kann also direkt vom diskreten auf das kontinuierliche System übertragen werden. Es besteht keine Verwechslungsgefahr bei der Schreibweise, da die Amplituden immer nur im Zusammenspiel mit der Eigenschwingungsform bzw. dem Eigenvektor auftreten und dieses Zusammenspiel bis auf numerische Unsauberkeiten gleich ist. Wir übertragen das Ergebnis (6.34) nun auf den kontinuierlichen Lösungsansatz (6.17).

*Resultat 6.1.1* (Adjungierte Amplitude der inneren Energie – linear elastisch transient).

Die adjungierte Amplitude der  $k$ -ten Eigenschwingung wird mit dem Beitrag  $\hat{u}_k$  des  $k$ -ten Eigenvektors beziehungsweise der  $k$ -ten Eigenschwingungsform zur statischen Verschiebung und der Eigenkreisfrequenz  $\omega_k$  bestimmt

$$\hat{\lambda}_k = -\hat{u}_k \omega_k. \quad (6.35)$$

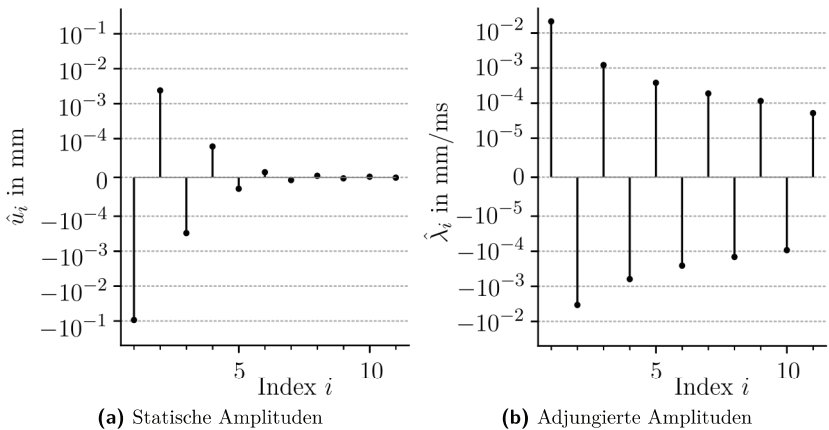
Diese Lösung für die Adjungierte gilt unabhängig von der Balkengeometrie und den Bernoullischen Annahmen für jedes linear elastische System mit der inneren Energie.

Für die quasistatische Belastung wurde eine Kraft linear in der Zeit angenommen. Für die Verschiebung, dargestellt mit den Eigenschwingungsformen  $\Lambda_k$  und den statischen Amplituden zum Endzeitpunkt  $\hat{u}_k$ , soll die Biegelinie (6.10) auch mit den Eigenschwingungsformen dargestellt werden:

$$u_3(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \Lambda_k \frac{t}{T}. \quad (6.36)$$

Gasch et al. 2012 schlägt für die Berechnung der einzelnen statischen „Amplituden“  $\hat{u}_k$  vor, nur die ersten  $n$  Eigenschwingungsformen zu betrachten und mit  $n$  Stützstellen die Anpassung an die Biegelinie (6.10) vorzunehmen, wenn keine analytische Lösung möglich ist.

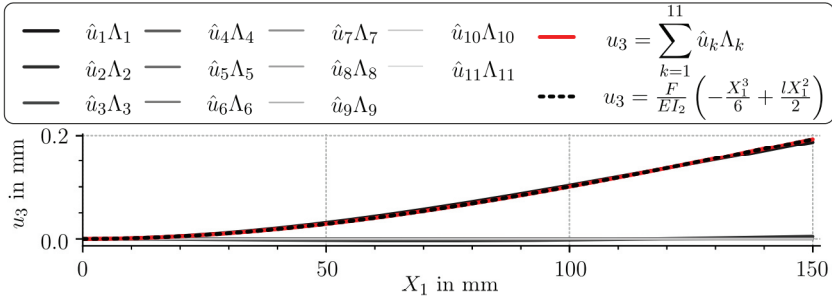
Wir berechnen die statischen Amplituden mit  $n = 11$  Stützstellen aus der statischen Biegelinie. Ab der 12. Eigenschwingungsform ist die numerische Darstellbarkeit der Eigenschwingungsform selbst schon nicht mehr gegeben, weil sich für große  $\kappa_k l$  der Sinus Hyperbolicus und der Cosinus Hyperbolicus numerisch nicht mehr unterscheiden. Daher werden nur die ersten 11 Eigenschwingungsformen für die folgenden Berechnungen berücksichtigt. Die Verschiebung im (reduzierten) Raum der Eigenschwingungsformen ist in Abbildung 6.4a durch die einzelnen Beiträge auf der logarithmischen Skala aufgetragen.



**Abbildung 6.4:** Amplituden der Eigenschwingungsformen der statischen und der adjungierten Lösung

Die statische Biegelinie wird von der ersten und zweiten Eigenschwingungsform dominiert. In Abbildung 6.5 sind die einzelnen Teilbiegungen der Eigenschwingungsformen dargestellt. Die rote Linie der Biegelinie aus Eigenschwingungsformen und die statische Biegelinie in schwarz gestrichelt liegen übereinander. Die erste Eigenschwingungsform unterscheidet sich nur geringfügig von der Biegelinie. Die Abweichung wird von den weiteren Eigenschwingungsformen korrigiert, deren einzelne Beiträge jeweils so klein sind, dass ihre Verläufe in dem Diagramm kaum unterschieden werden können.

Die statische Amplitude  $\hat{u}_k$  dominiert die Eigenkreisfrequenz  $\omega_k$ , so dass mit größerem  $k$  trotz größer werdender Eigenkreisfrequenz  $\omega_k$  die adjungierte Amplitude abnimmt, wie im Diagramm in Abbildung 6.4b zu sehen ist.



**Abbildung 6.5:** Statische Biegelinie als Summe der Eigenschwingungsformen

Die adjungierten Amplituden  $\hat{\lambda}_k = -\hat{u}_k \omega_k$  eingesetzt in die kontinuierliche adjungierte Darstellung (6.17) vervollständigen die Lösung der adjungierten Differentialgleichung der inneren Energie (6.14) zu

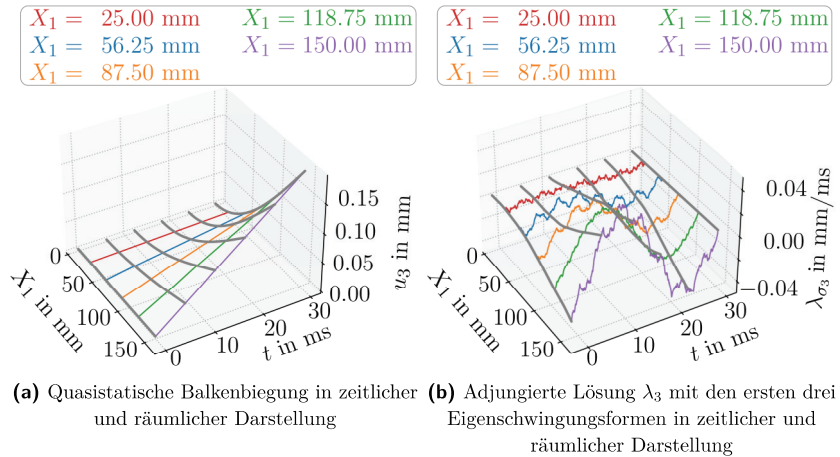
$$\lambda_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \hat{u}_k \sin \omega_k (T - t) \frac{\partial \Lambda_k}{\partial X_1} X_3, \quad (6.37)$$

$$\lambda_3 = - \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \hat{u}_k \sin \omega_k (T - t) \Lambda_k. \quad (6.38)$$

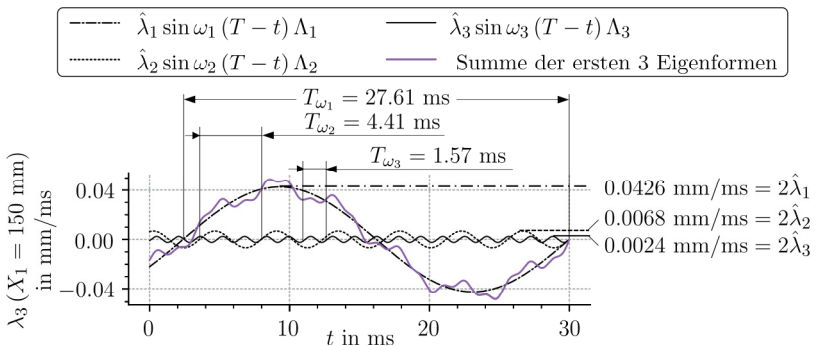
In Abbildung 6.6a ist der zeitliche Verlauf der quasistatischen Balkenbiegung  $u_3(t)$  dargestellt. Die Last wird über einen Zeitraum von  $T = 30$  ms aufgebracht. Dieser Zeitraum entspricht nicht einer langsamen quasistatischen Belastung und ist hier nur der Darstellbarkeit halber gewählt. Die grauen Linien stellen den Balken in 6 ms-Schritten in der jeweiligen Momentankonfiguration dar. Die farbigen Linien verfolgen ausgewählte  $X_1$ -Positionen des Balkens in ihrem zeitlichen Verlauf ( $u_3(X_1, t)$ ). In Abbildung 6.6b ist die Adjungierte der inneren Energie  $\lambda_3(t)$  dargestellt. Für eine bessere Übersicht wurden in dieser Darstellung nur die ersten drei Eigenschwingungsformen summiert.

Jede der Eigenschwingungen selbst ist eine periodische Schwingung, also mit regelmäßig wiederkehrenden Eigenschaften. Die *Periodendauer*  $T_{\omega_k}$  der  $k$ -ten Eigenschwingung ist das Zeitintervall, nachdem sich die  $k$ -te Schwingung wiederholt. Berechnet wird die Periodendauer aus der Eigenkreisfrequenz  $T_{\omega_k} = \frac{2\pi}{\omega_k}$ . Durch die geometrischen Randbedingungen ist die Schwingung des Balkens nicht rein periodisch, das heißt, die Eigenkreisfrequenzen der höherfrequenten Teilschwingungen sind kein ganzzahliges Vielfaches der Eigenkreisfrequenz der Grundschiwingung.

Die Graphen der Teilschwingungen sind in Abbildung 6.7 nur für das freie Ende des Balkens dargestellt (die lilafarbene Linie aus Abbildung 6.6b). Auch die adjungierte Lösung wird von der ersten Eigenschwingungsform dominiert. Diese hat die größte tatsächliche Amplitude von  $2\hat{\lambda}_1 = 0.0426 \text{ mm/ms}$  und die größte Periodendauer  $T_{\omega_1} = 27.61 \text{ ms}$ .



**Abbildung 6.6:** Quasistatische Lösung der Balkenbiegung und Adjungierte der inneren Energie

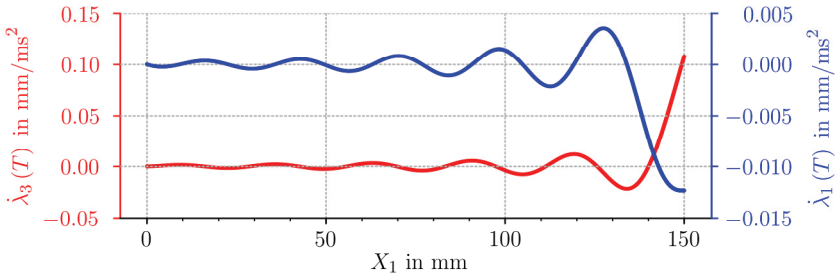


**Abbildung 6.7:** Adjungierte Lösung am freien Ende des Balkens

Mit der analytischen Darstellung der zeitlichen Ableitung der Adjungierten

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= - \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 \hat{u}_k \cos \omega_k (T-t) \frac{\partial \Lambda_k}{\partial X_1} X_3, \\ \dot{\lambda}_3 &= \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 \hat{u}_k \cos \omega_k (T-t) \Lambda_k,\end{aligned}$$

können die Graphen der Endwerte der Adjungierten  $\dot{\lambda}_1(T)$  und  $\dot{\lambda}_3(T)$  in Abbildung 6.8 gezeigt werden. Diese Endwerte sind die Ursache für den adjungierten Schwingungsverlauf, da sonst keine weiteren Pseudolasten auf das adjungierte System wirken. Die Kurve für  $\dot{\lambda}_3$  hat am freien Ende einen großen Ausschlag an dem allerdings keine Masse hängt.



**Abbildung 6.8:** Zeitliche Ableitung der Adjungierten zum Endzeitpunkt  $T$

Mit den analytischen Lösungen der Verschiebung und der Adjungierten kann nun die Topologische Ableitung für den ebenen Spannungszustand, der in der  $\mathbf{e}_1$ - $\mathbf{e}_3$ -Ebene des Balkens vorliegt, ausgewertet werden. Es gilt für das zylindrische Loch in der Flanke des Balkens gemäß Abbildung 6.9a:

$$\left( \frac{d |c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr} \right)^{-1} = \frac{1}{2\pi r b}.$$

Die statische Spannung, die statische Spannungsrate und die adjungierte Spannung werden analog zu (6.4) aus den Ableitungen der Verschiebung und der Adjungierten bestimmt

$$\sigma_{xx}(t) = -EX_3 \frac{t}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2}, \quad (6.39)$$

$$\dot{\sigma}_{xx}(t) = -EX_3 \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2}, \quad (6.40)$$

$$\lambda_{\sigma_{xx}}(t) = EX_3 \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \hat{u}_k \sin \omega_k (T-t) \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2}. \quad (6.41)$$

Da die Spannungsraten berechnet werden können, verzichten wir auf die vereinfachende Annahme 5.4.2 auf Seite 164 und berechnen die explizite Ableitung der inneren Energie über das Zeitintegral. Aufgrund der zeitlichen Linearität der Spannung führt die vollständige Integration bezüglich der Zeit auf das gleiche Ergebnis, wie die vereinfachende Annahme. Für die Vergleichbarkeit mit den folgenden Abschnitten, geben wir hier trotzdem die vollständige Integration an:

$$\begin{aligned}
& \lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{d |c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr} \right)^{-1} \left( \frac{\partial \mathcal{J}_\sigma}{\partial r} \right)_E \\
&= -\frac{3}{E} \int_0^T u \sigma_{xx} \dot{u} \dot{\sigma}_{xx} dt \\
&= -\frac{3}{E} \int_0^T \left( -EX_3 \frac{t}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right) \cdot \left( -EX_3 \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right) dt \\
&= -\frac{3EX_3^2}{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right). \tag{6.42}
\end{aligned}$$

Der explizite Ableitungsteil ist durch das negative Vorzeichen und ansonsten quadratische Terme immer negativ.

Die Ableitung der gemischt adjungierten Energie wird nach Resultat 5.3.1 auf Seite 159 in der Zeit integriert

$$\begin{aligned}
& \lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{d |c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr} \right)^{-1} \int_0^T \int_{\Gamma_r} u \sigma \cdot \lambda_\varepsilon d\Gamma dt \\
&= -\frac{3}{E} \int_0^T u \sigma_{xx} \lambda \sigma_{xx} dt \\
&= -\frac{3}{E} \int_0^T \frac{t}{T} \left( EX_3 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right) \cdot \left( EX_3 \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \hat{u}_k \sin \omega_k (T-t) \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right) dt \\
&= -3EX_3^2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\sin \omega_k T}{\omega_k T} \right) \hat{u}_k \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right).
\end{aligned}$$

Da in der quasistatischen Balkenlösung aufgrund fehlender Beschleunigung keine Trägheit berücksichtigt wird, kann die Topologische Ableitung als Summe

der expliziten Ableitung und der Ableitung der gemischt adjungierten Energie zusammengefasst werden.

$$\begin{aligned}
\mathcal{TJ}_\sigma &= \lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{d |c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr} \right)^{-1} \left( \frac{\partial \mathcal{J}_\sigma}{\partial r} \right)_E - \lim_{r \downarrow 0} \left( \frac{d |c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr} \right)^{-1} \int_0^T \int_{\Gamma_r} u_\sigma \cdot \lambda_\varepsilon d\Gamma dt \\
&= -\frac{3EX_3^2}{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right) \\
&\quad + 3EX_3^2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\sin \omega_k T}{\omega_k T} \right) \hat{u}_k \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right) \\
&= 3EX_3^2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left( -\frac{1}{2} + 1 - \frac{\sin \omega_k T}{\omega_k T} \right)}_{\approx \frac{1}{2} \text{ für } T \text{ hinreichend groß}} \hat{u}_k \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right) \\
&\approx \frac{1}{2E} \left( 3 {}^u\sigma_{xx}(T) \cdot {}^u\sigma_{xx}(T) \right). \tag{6.43}
\end{aligned}$$

Trotz des Schwingungsverhaltens der Adjungierten, entspricht dies für eine große Belastungsdauer  $T$  der statischen Topologischen Ableitung der Formänderungsenergie in Anmerkung 5.4.1 auf Seite 166.

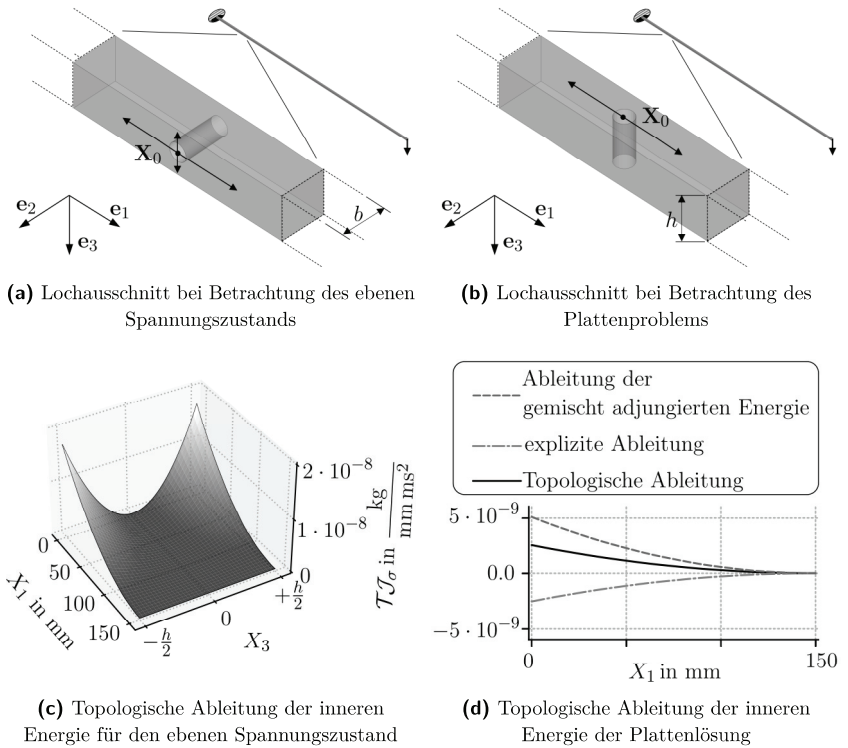
Die Sensitivität ist quadratisch in der Spannung und damit auch in der Kraft  $F$  und quadratisch in der Dickenkoordinate  $X_3$ . In Abbildung 6.9c ist der Graph der Topologischen Ableitung für den ebenen Spannungszustand dargestellt. Entlang der neutralen Faser ist auch die Topologische Ableitung gleich null. An der Einspannung auf der Balkenober- und -unterseite ist die Topologische Ableitung maximal.

Betrachten wir den Balken jetzt als vereinfachtes Plattenproblem wie in Abbildung 6.9b, so kann der gleiche Effekt gezeigt werden. Die Ableitung der Ausschnittsfunktion für das zylindrische Loch mit der  $\mathbf{e}_3$ -Achse als zentrale Achse gemäß Abbildung 6.9b ist

$$\left( \frac{d |c_r(\mathbf{X}_0)|}{dr} \right)^{-1} = \frac{1}{2\pi r h}.$$

Die Biege- und Drillmomente  $m_{yy}$  und  $m_{xy}$  sind sowohl für die Verschiebung  $u$  als auch für die Adjungierte  $\lambda$  gleich null:

$${}^u m_{yy} = {}^u m_{xy} = \lambda m_{yy} = \lambda m_{xy} = 0.$$



**Abbildung 6.9:** Quasistatische Topologische Ableitung der inneren Energie für den Euler-Bernoulli-Balken

Das Biegemoment der Belastung wird nach der Momentendefinition (5.1) mit der Spannung (6.39) bezogen auf die Balkenhöhe bestimmt

$$\begin{aligned}
 {}^u m_{xx}(t) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u \sigma_{xx}(t) X_3 \, dX_3 \\
 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -E \frac{t}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} X_3^2 \, dX_3 \\
 &= -\frac{EI_2 t}{bT} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2}.
 \end{aligned}$$



Das adjungierte Moment bezogen auf die Balkenhöhe wird mit der adjungierten Spannung  $\lambda\sigma_{xx}(t)$  aus (6.41) analog berechnet

$$\begin{aligned}\lambda m_{xx}(t) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda\sigma_{xx}(t) X_3 dX_3 \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \omega_k \sin \omega_k (T-t) \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} X_3^2 dX_3 \\ &= \frac{EI_2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \omega_k \sin \omega_k (T-t) \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2}.\end{aligned}$$

Wir addieren für die Topologische Ableitung bezüglich der Biegung direkt die explizite Ableitung und die Ableitung der gemischt adjungierten Energie, berechnen das Zeitintegral und fassen das Ergebnis für den Übergang zur großen Belastungsdauer  $T$  zur Momentenbeschreibung zusammen

$$\begin{aligned}\mathcal{TJ}_\sigma &= -\frac{6}{Eh^4} \left( 2 + \frac{4(1+\nu)^2}{(3+\nu)^2} \right) \int_0^T u_{m_{xx}} \dot{m}_{xx} dt \\ &\quad - \frac{6}{Eh^4} \left( 2 + \frac{4(1+\nu)^2}{(3+\nu)^2} \right) \int_0^T u_{m_{xx}} \lambda m_{xx} dt \\ &= \frac{6}{Eh^4} \frac{E^2 I_2^2}{b^2} \left( 2 + \frac{4(1+\nu)^2}{(3+\nu)^2} \right) \\ &\quad \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \underbrace{\left( \frac{t}{T} \left( -\frac{1}{T} + \omega_k \sin \omega_k (T-t) \right) \right)}_{=\frac{1}{2} - \frac{\sin \omega_k T}{\omega_k T} \approx \frac{1}{2} \text{ für } T \text{ groß}} dt \hat{u}_k \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \\ &\approx \frac{3}{Eh^4} \left( 2 + \frac{4(1+\nu)^2}{(3+\nu)^2} \right) u_{m_{xx}}^2.\end{aligned}\tag{6.44}$$

Die Zeitintegration liefert wieder die Abhängigkeit von der Endzeit  $T$ . Für die quasistatische Biegung mit langem Belastungszeitraum geht die Topologische Ableitung für die Plattenbelastung ebenfalls in das lineare Ergebnis der Formänderungsenergie über. Der Verlauf der Topologischen Ableitung für den Biegeanteil entlang der Balkenachse ist in Abbildung 6.9d dargestellt, wo auch die Einzelbeiträge der expliziten Ableitung und die Ableitung der gemischt adjungierten Energie zu sehen sind. Wie beim ebenen Spannungszustand ist die explizite Ableitung immer negativ und die Ableitung der gemischt adjungierten Energie vom Betrag doppelt so groß wie die explizite Ableitung, aber immer positiv. Am Ort des größten Biegemoments an der Einspannung ist auch die Topologische Ableitung am größten. Am freien Balkenende ist sie gleich null.

*Mechanische Interpretation der ermittelten Topologischen Ableitung:*

Da die Topologische Ableitung immer größer gleich null ist, bewirkt eine zylindrische Aussparung im Balken immer eine Erhöhung der inneren Energie. Soll die Struktur gezielt erweicht werden, so ist das Einbringen einer Aussparung nahe der Einspannung am sinnvollsten, da dort ein Loch den größten Einfluss auf die innere Energie hat. Bei einer Aussparung entlang der  $\mathbf{e}_2$ -Achse bringt der größtmögliche Abstand von der neutralen Faser den größten Effekt. Dieses Ergebnis kann durch das Flächenträgheitsmoment des Balkens plausibilisiert werden, bei dem der Abstand von der neutralen Faser quadratisch eingeht. Ein größeres Flächenträgheitsmoment erzeugt eine größere Steifigkeit, die der Erweichung entgegensteht. Je weiter der Ort der Aussparung in  $\mathbf{e}_1$ -Richtung von der Einspannung entfernt liegt, desto geringer ist die Erweichung.

Die quasistatische Annahme, dass die Kraft linear ansteigend auch eine zeitlich lineare Skalierung der statischen Biegelinie hervorruft, ist stark vereinfachend. Die Anfangsgeschwindigkeit  $\bar{u}_3 = \frac{1}{EI_2} \frac{F}{T} \left( -\frac{X_3^3}{6} + \frac{LX_3^2}{2} \right)$  beschreibt keine langsame Belastung des Balkens aus der Ruhelage. Wenn die Anfangsbedingungen für die Verschiebung und die Geschwindigkeit beide gleich null sein sollen, löst die angenommene Biegelinie in (6.10) die Bewegungsgleichung (6.6) nicht mehr.

## 6.1.2 Balkenbelastung unter Berücksichtigung der Trägheitseffekte

Im nächsten Schritt betrachten wir die Verschiebung als Lösung der Bewegungsgleichung (6.6) mit der Belastung aus der Ruhelage heraus. Wir leiten dazu die Biegelinie als Lösung der Bewegungsgleichung über die räumliche Diskretisierung her. Dies hat den Vorteil, dass die Einzelkraft  $F$  im Kraftvektor  $\mathbf{q}$  direkt verarbeitet werden kann, während die Kraft in der räumlich kontinuierlichen Darstellung mit einer Hilfsfunktion berechnet werden müsste. Wieder betrachten wir die zeitlich lineare Steigerung der Kraft. Gesucht ist die Lösung der Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \frac{t}{T}\mathbf{q}. \quad (6.45)$$

Für die Lösung wird wie für die adjungierte Lösung im vorherigen Abschnitt zunächst für die homogene Differentialgleichung ohne äußere Kräfte  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_h + \mathbf{K}\mathbf{u}_h = \mathbf{0}$  der Separationsansatz

$$\mathbf{u}_h(t) = \sum_{k=1}^{n_f} \mathbf{v}_k (\hat{u}_{k_c} \cos \omega_k t + \hat{u}_{k_s} \sin \omega_k t) \quad (6.46)$$

gewählt. Die homogene Lösung entspricht der freien Schwingung, so dass innere Kräfte und Massenträgheit des Systems im Gleichgewicht stehen. Sie trägt keine äußere Last. Die sogenannte *partikuläre* Lösung  $\mathbf{u}_p$  beschreibt dann das erzwungene Verhalten durch die äußere Last. Die gesamte Lösung aus homogener und partikulärer Lösung  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_p$  in die Differentialgleichung (6.45) eingesetzt liefert den Vektor für die partikuläre Lösung<sup>6</sup>

$$\mathbf{u}_p(t) = \frac{t}{T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{q}.$$

Im Folgenden wird die Bezeichnung

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{Statik}} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{q}$$

verwendet, um hier die Abhängigkeit von der rein statischen Lösung zu zeigen.

Aus den Anfangswerten  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$  und  $\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}$  kann die Kosinus-Amplitude  $\hat{u}_{k_c} = 0$  und die Sinus-Amplitude  $\hat{u}_{k_s} = -\frac{1}{\omega_k T} \hat{u}_{k_{\text{Statik}}}$  der homogenen Lösung bestimmt werden. Die vollständige Lösung der Bewegungsgleichung (6.45) und die zeitlichen Ableitungen sind

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{V} \operatorname{diag} \left( \frac{1}{T} \left( t - \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} \right) \right) \hat{\mathbf{u}}_{\text{Statik}}, \quad (6.47)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{V} \operatorname{diag} \left( \frac{1}{T} (1 - \cos \omega_k t) \right) \hat{\mathbf{u}}_{\text{Statik}}, \quad (6.48)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{V} \operatorname{diag} \left( \frac{1}{T} \omega_k \sin \omega_k t \right) \hat{\mathbf{u}}_{\text{Statik}}. \quad (6.49)$$

Die Adjungierte wird durch die veränderte Verschiebung zum Endzeitpunkt  $T$  gewissermaßen „gestört“. Zur Lösung der adjungierten Gleichung (6.18) folgen wir dem Vorgehen von (6.29) bis (6.34).

Mit der Endwertbedingung  $\dot{\lambda}(T) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{u}(T)$  lautet die diskrete Form der Adjungierten:

$$\lambda(t) = - \sum_{k=1}^{n_f} \mathbf{v}_k \hat{u}_{k_{\text{Statik}}} \omega_k \left( 1 - \frac{\sin \omega_k T}{\omega_k T} \right) \sin \omega_k (T - t). \quad (6.50)$$

<sup>6</sup>Diese Art der Lösung entspricht dem Ansatz *vom Typ der rechten Seite*.

Um den Einfluss dieser Störung auf die Topologische Ableitung zu untersuchen, benötigen wir wieder die Balkenlösung und die Adjungierte in der kontinuierlichen Form:

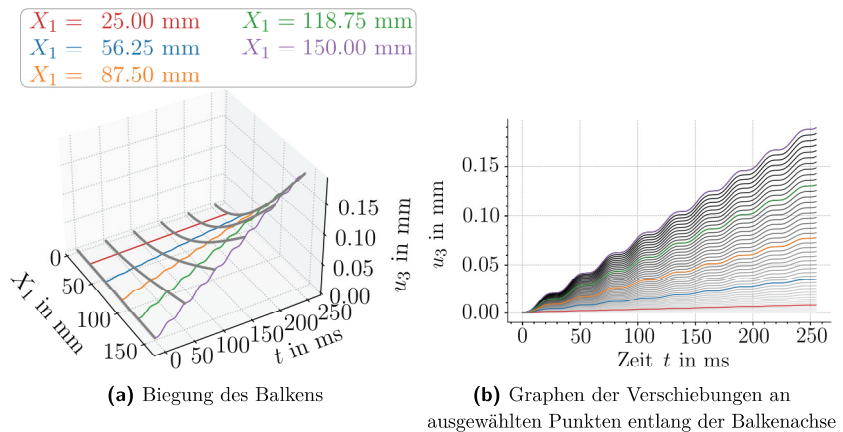
$$u_1 = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{T} \left( t - \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} \right) \hat{u}_k \frac{\partial \Lambda_k}{\partial X_1} X_3, \quad (6.51)$$

$$u_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{T} \left( t - \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} \right) \hat{u}_k \Lambda_k, \quad (6.52)$$

$$\lambda_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \hat{u}_k \left( 1 - \frac{\sin \omega_k T}{\omega_k T} \right) \sin \omega_k (T - t) \frac{\partial \Lambda_k}{\partial X_1} X_3, \quad (6.53)$$

$$\lambda_3 = - \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \hat{u}_k \left( 1 - \frac{\sin \omega_k T}{\omega_k T} \right) \sin \omega_k (T - t) \Lambda_k. \quad (6.54)$$

In Abbildung 6.10 ist das zeitliche Verhalten des Balkens unter linearer Laststeigerung bei Berücksichtigung der Trägheit aufgetragen. Die Verschiebung schwingt in der Zeit sinusförmig um die Gerade mit der Steigung  $\frac{1}{T}$ . Je größer die Eigenkreisfrequenz  $\omega_k$  desto kleiner ist die Sinus-Amplitude. Im Fall des Biegebalkens ist auch diese Schwingung durch die erste Eigenschwingung dominiert. Dieses Resultat ist nicht balkenspezifisch, sondern gilt so beispielsweise auch für Systeme mit diskreten Massen (Gasch et al. 2012). Das Verhalten der Adjungierten unterscheidet sich qualitativ nicht von der Schwingung aus Abschnitt 6.1.1 und wird an dieser Stelle nicht abgebildet.



**Abbildung 6.10:** Verschiebung des Balkens mit Trägheitseffekten

Für die Berechnung der Ableitung des Trägheitsterms werden die kontinuierlichen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen benötigt

$$\dot{u}_1 = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{T} (1 - \cos \omega_k t) \hat{u}_k \frac{\partial \Lambda_k}{\partial X_1} X_3, \quad (6.55)$$

$$\dot{u}_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{T} (1 - \cos \omega_k t) \hat{u}_k \Lambda_k, \quad (6.56)$$

$$\ddot{u}_1 = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{T} (\omega_k \sin \omega_k t) \hat{u}_k \frac{\partial \Lambda_k}{\partial X_1} X_3, \quad (6.57)$$

$$\ddot{u}_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{T} (\omega_k \sin \omega_k t) \hat{u}_k \Lambda_k. \quad (6.58)$$

Die Spannungen, die Spannungsrate und die Momente sowohl für die Balkenverschiebung als auch für die Adjungierte werden wie im vorherigen Abschnitt berechnet und hier kompakt angegeben, da sie sich jeweils nur um den Störterm  $-\frac{\sin \omega_k t}{\omega_k T}$  und dessen Ableitung von der quasistatischen Lösung unterscheiden:

$${}^u \sigma_{xx} = -E X_3 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{1}{T} \left( t - \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} \right) \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2}, \quad (6.59)$$

$${}^u \dot{\sigma}_{xx} = -E X_3 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{1}{T} (1 - \cos \omega_k t) \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2}, \quad (6.60)$$

$${}^\lambda \sigma_{xx} = E X_3 \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \hat{u}_k \sin \omega_k (T - t) \left( 1 - \frac{\sin \omega_k T}{\omega_k T} \right) \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2}, \quad (6.61)$$

$${}^u m_{xx} = -\frac{E I_2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{1}{T} \left( t - \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} \right) \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2}, \quad (6.62)$$

$${}^u \dot{m}_{xx} = -\frac{E I_2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{1}{T} (1 - \cos \omega_k t) \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2}, \quad (6.63)$$

$${}^\lambda m_{xx} = \frac{E I_2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \omega_k \sin \omega_k (T - t) \left( 1 - \frac{\sin \omega_k T}{\omega_k T} \right) \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2}. \quad (6.64)$$

Wir betrachten nur die Topologische Ableitung für die Plattenbelastung. Die explizite Ableitung der inneren Energie berechnet aus dem Moment und der

Momentenrate integriert bezüglich der Zeit für ein langsames Aufbringen der Last ( $\lim T \uparrow \infty$ ) gleicht dem statischen Ergebnis (6.42):

$$\begin{aligned}
\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{2\pi r h} \left( \frac{\partial \mathcal{J}_\sigma}{\partial r} \right)_E &= -\frac{6}{Eh^4} \left( 2 + \frac{4(1+\nu)^2}{(3+\nu)^2} \right) \int_0^T m_{xx} \dot{m}_{xx} dt \\
&= -\frac{6}{Eh^4} \left( 2 + \frac{4(1+\nu)^2}{(3+\nu)^2} \right) \int_0^T \left( -\frac{EI_2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{1}{T} \left( t - \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} \right) \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right) \\
&\quad \cdot \left( -\frac{EI_2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{1}{T} (1 - \cos \omega_k) \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right) dt \\
&= -\frac{3}{Eh^4} \left( 2 + \frac{4(1+\nu)^2}{(3+\nu)^2} \right) \underbrace{\left( -\frac{EI_2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{\sin \omega_k T - \omega_k T}{\omega_k T} \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right)}_{u_{m_{xx}}(T)} \\
&\quad \cdot \underbrace{\left( -\frac{EI_2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{\sin \omega_k T - \omega_k T}{\omega_k T} \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right)}_{u_{m_{xx}}(T)} \\
\lim_{T \uparrow \infty} &\approx -\frac{1}{2} \frac{6}{Eh^4} \left( 2 + \frac{4(1+\nu)^2}{(3+\nu)^2} \right) u_{m_{xx}}^2(T). \tag{6.65}
\end{aligned}$$

Bei der zeitlichen Integration der Ableitung der gemischt adjungierten Energie wird das Produkt der beiden Summen „ $\sum_{k=1}^{\infty} \cdot \sum_{k=1}^{\infty}$ “ ausmultipliziert und umsortiert. Dadurch kann die Darstellung wesentlich vereinfacht werden. Die einzelnen Schritte werden hier jedoch nicht dargestellt, sondern nur das Resultat angegeben. Nach der Auswertung des Integrals bezüglich der Zeit und Übergang zum Limes für große  $T$  verbleibt eine Abweichung von der statischen Lösung

$$\begin{aligned}
-\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{2\pi r h} \int_0^T \int_{\Gamma_r} \sigma_{\varphi\varphi} \lambda_{\varepsilon_{\varphi\varphi}} d\Gamma dt &= -\frac{6}{Eh^4} \left( 2 + \frac{4(1+\nu)^2}{(3+\nu)^2} \right) \int_0^T u_{m_{xx}} \lambda_{m_{xx}} dt \\
&= -\frac{6}{Eh^4} \left( 2 + \frac{4(1+\nu)^2}{(3+\nu)^2} \right) \int_0^T \left( -\frac{EI_2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \frac{1}{T} \left( t - \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} \right) \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right) \\
&\quad \cdot \left( -\frac{EI_2}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k \omega_k \sin \omega_k (T-t) \left( 1 - \frac{\sin \omega_k T}{\omega_k T} \right) \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right) dt \\
\lim_{T \uparrow \infty} &\approx \frac{6}{Eh^4} \left( 2 + \frac{4(1+\nu)^2}{(3+\nu)^2} \right) u_{m_{xx}}^2(T) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{6}{Eh^4} \left( 2 + \frac{4(1+\nu)^2}{(3+\nu)^2} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \cos \omega_k T \left( -\frac{EI_2}{b} \hat{u}_k \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right)^2. \tag{6.66}
\end{aligned}$$

Bei der Auswertung der Ableitung des Trägheitsterms lässt sich ein ähnliches Phänomen feststellen. Beim Übergang zum Limes für große  $T$  verbleibt ein Term, der abhängig von der Belastungsdauer „schwingt“:

$$\begin{aligned} -\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{2\pi r h} \int_0^T \int_{\Gamma_r} \varrho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\lambda} d\Gamma dt &= -\frac{\varrho}{h} \int_0^T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \ddot{u}_1 \lambda_1 dz dt - \varrho \int_0^T \ddot{u}_3 \lambda_3 dt \\ &= -\frac{\varrho}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 \cos \omega_k T \left( \frac{h^2}{12} \hat{u}_k^2 \frac{\partial \Lambda_k}{\partial X_1}{}^2 + \hat{u}_k^2 \Lambda_k^2 \right). \end{aligned} \quad (6.67)$$

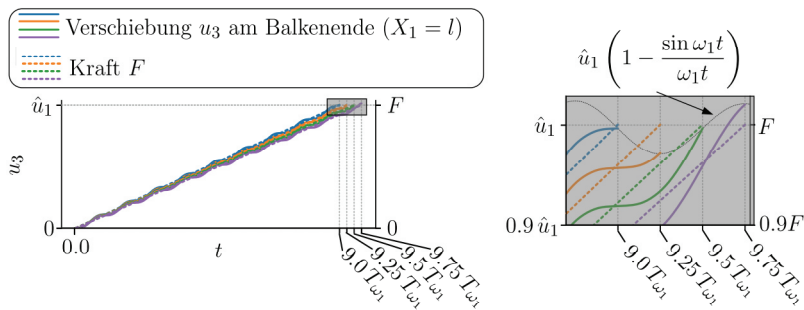
Wenn die Belastungsdauer  $T$  multipliziert mit der Eigenkreisfrequenz  $\omega_k$  also nicht einem ganzzahligen Vielfachen von  $\frac{\pi}{2}$  entspricht, weichen die Ableitung der gemischt adjungierten Energie und die Ableitung des Trägheitsterms von der rein elastischen linearen Lösung ohne Berücksichtigung der Trägheit ab.

Um diese Abweichung besser begreifen zu können, variieren wir den Belastungszeitraum  $T$  zwischen dem neun- und dem zehnfachen der Periodendauer der ersten Eigenfrequenz  $T_{\omega_k}$ . Damit ist  $T$  groß genug, so dass die weiteren Abweichungen von der idealen statischen Sensitivität, so wie sie auch in der quasistatischen Topologischen Ableitung vorkommen, vernachlässigbar sind.

Die Verschiebungen und Kraftverläufe am Balkenende sind exemplarisch in Abbildung 6.11 dargestellt. Der lineare Kraftverlauf für die verschiedenen Belastungsdauern ist durch die gestrichelten Linien dargestellt. Dieser Verlauf entspricht auch den quasistatischen Verschiebungen. Durch den Störterm  $-\frac{\sin \omega_k t}{T \omega_k}$  in der Verschiebung  $u_3$  in (6.52) weicht der finale Verschiebungszustand von der linearen Balkenlösung ab. Diese Verschiebungskurven sind in der Abbildung mit den durchgezogenen Linien dargestellt.

Die Abweichung von der linearen Lösung der Ableitung der gemischt adjungierten Energie in (6.66) lässt eine weitere Interpretation zu. Dazu betrachten wir nur den Summanden für  $k = 1$ . Da die Schwingung der Verschiebungslösung durch die erste Eigenform und damit  $\hat{u}_1$  dominiert ist, werden die weiteren Summanden vernachlässigt. Dieser Summand entspricht mit dem gleichen Argument aber auch dem quadratischen Moment  ${}^u m_{xx}^2(T)$  beim Übergang für große  $T$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \omega_k T \left( -\frac{EI_2}{b} \hat{u}_k \frac{\partial^2 \Lambda_k}{\partial X_1^2} \right)^2 &\approx \frac{1}{2} \cos \omega_1 T \left( -\frac{EI_2}{b} \hat{u}_1 \frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial X_1^2} \right)^2 \\ &\approx \frac{1}{2} \cos \omega_1 T {}^u m_{xx}^2(T). \end{aligned}$$



**Abbildung 6.11:** Verschiebungsverläufe und Kraftverläufe am Balkenende bei verschiedenen Simulationsdauern

Die Ableitung der gemischt adjungierten Energie ist damit näherungsweise

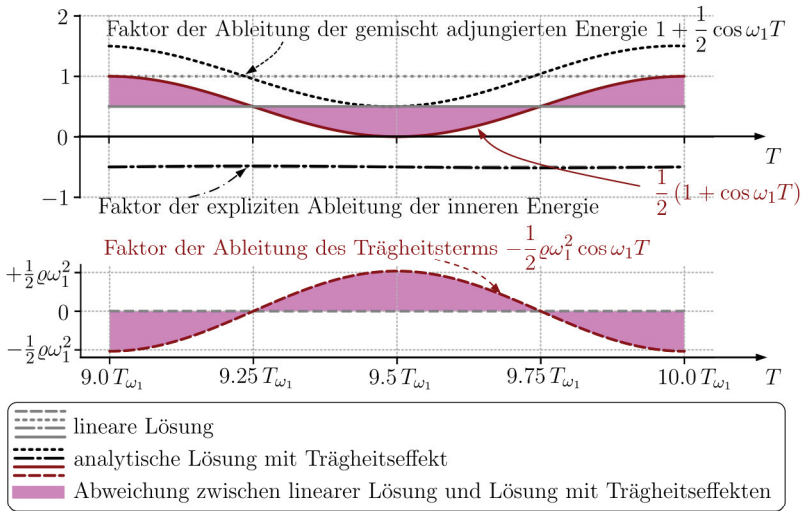
$$\begin{aligned}
 & - \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{2\pi r h} \int_0^T \int_{\Gamma_r} \sigma_{\varphi\varphi} \lambda \varepsilon_{\varphi\varphi} d\Gamma dt \\
 & \approx \left( 1 + \frac{1}{2} \cos \omega_1 T \right) \frac{6}{Eh^4} \left( 2 + \frac{4(1+\nu)^2}{(3+\nu)^2} \right) u_{m_{xx}}^2(T).
 \end{aligned}$$

Der Graph des Faktors  $\left( 1 + \frac{1}{2} \cos \omega_1 T \right)$  ist in Abbildung 6.12 im oberen Diagramm als schwarze gepunktete Linie zu sehen. Auch hier wird nur der Ausschnitt einer Periodendauer betrachtet. Die explizite Ableitung der inneren Energie (6.65) beinhaltet keine Schwingung und ist deshalb mit dem konstanten Faktor  $-\frac{1}{2}$  mit der gestrichpunkteten schwarzen Linie im oberen Diagramm abgebildet. Beide Terme zusammen addiert ergeben für die Topologische Ableitung unter Berücksichtigung der Trägheitseffekte die resultierende rote Kurve. Die Abweichung von der quasistatischen und damit auch von der statischen Lösung ist durch die magentafarbene Fläche hervorgehoben. Dies ist die Fläche zwischen dem schwingenden Faktor  $\frac{1}{2} (1 + \cos \omega_1 T)$  und der linearen Lösung als graue Linie bei  $\frac{1}{2}$ . Bei der Nullstelle des Kosinus ist keine Abweichung vorhanden: Linear statische, quasistatische Topologische Ableitung und Sensitivität unter der Berücksichtigung von Trägheitseffekten unterscheiden sich nicht. Im Bereich des positiven Kosinus ist die Ableitung der gemischt adjungierten Energie höher als im Linearen. Dies ist zu erkennen am Verlauf der schwarzen gepunkteten Linie im Vergleich zur grauen gepunkteten Linie, die den konstanten Faktor 1 der Ableitung der gemischt adjungierten Energie bei der statischen und der quasistatischen Lösung zeigt. Diese Überschätzung ist gutmütig, da sie die Charakteristik der Topologischen Ableitung qualitativ nicht verändert. Die Ableitung bleibt positiv. Im Bereich des negativen



Kosinus wird die Ableitung der gemischt adjungierten Energie unterschätzt und im kritischsten Fall bei  $9.5 T_{\omega_1}$  von der expliziten Ableitung aufgewogen.

Der Faktor  $-\frac{1}{2}\rho\omega_k^2 \cos \omega_k T$  der Ableitung des Trägheitsterms (6.67) weicht ebenfalls in einer Schwingung von der statischen Topologischen Ableitung ab. Im unteren Diagramm in Abbildung 6.12 ist der Graph des Faktors als rote gestrichelte Linie aufgetragen. Auch in diesem Diagramm ist die Abweichung zur statischen Lösung (null, da keine Trägheit berücksichtigt wird) als magentafarbene Fläche gekennzeichnet.

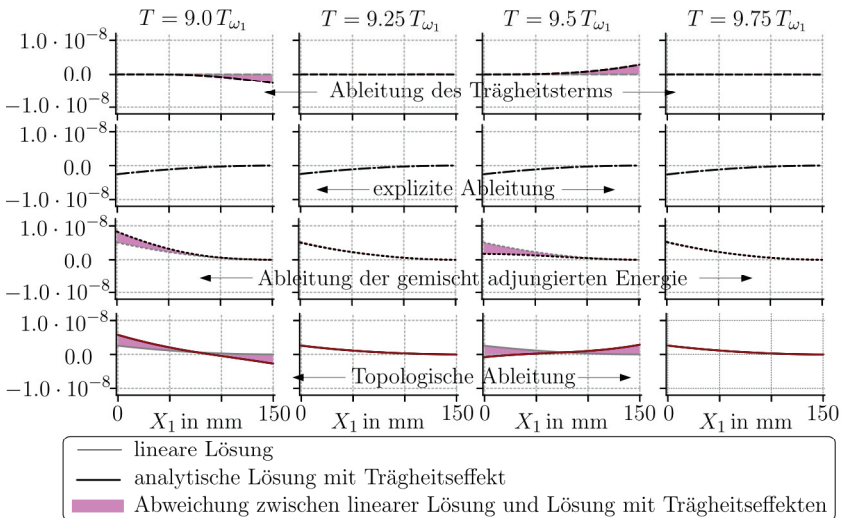


**Abbildung 6.12:** Abweichung der Faktoren von der linear elastischen Lösung, Variation der Belastungsdauer zwischen dem neun- und zehnfachen der Periodendauer der ersten Eigenschwingungsform

Beide Schwingungseffekte heben sich jedoch nicht auf, sondern verstärken sich gegenseitig. Die Ableitung der gemischt adjungierte Energie ist dort besonders groß, wo das größte Moment im Balken vorliegt, also an der Einspannung. Die Ableitung des Trägheitsterms wird dominiert durch die Biegelinie  $\hat{u}_k^2 \Lambda_k^2$  und die ist nicht an der Einspannung sondern am freien Ende am größten. In Abbildung 6.13 sind die einzelnen Terme der Topologischen Ableitung bezüglich der Biegung über der Balkenlänge zu vier Zeitpunkten aufgetragen. In der ersten Zeile ist immer die Ableitung des Trägheitsterms zu sehen, in der zweiten die explizite Ableitung der inneren Energie, in der dritten die Ableitung der gemischt adjungierten

Energie und in der letzten Zeile die gesamte Topologische Ableitung als Summe der ersten drei Zeilen. Die Auswertung erfolgt für Belastungsdauern des 9.0-, 9.25-, 9.5- und 9.75-fachen der Periodendauer der ersten Eigenschwingungsform. Im besten Fall bei  $T = 9.25 T_{\omega_1}$  und  $T = 9.75 T_{\omega_1}$  entspricht die Topologische Ableitung genau der Quasistatischen. Bei  $T = 9.0 T_{\omega_1}$  ist der Nulldurchgang zwar ungünstig, jedoch bleibt die Charakteristik entlang der Balkenachse erhalten. Die Einspannung wird überbewertet und das freie Balkenende unterbewertet. Bei einer Belastungsdauer von  $T = 9.5 T_{\omega_1}$  ist dann schließlich der gegenteilige Effekt zu sehen: Die Ableitung der gemischt adjungierten Energie unterschätzt die Einspannung und die Ableitung des Trägheitsterms überschätzt gleichzeitig das freie Balkenende. Bei diesem Balkenbeispiel ist dieser Effekt besonders ausgeprägt wegen der dominanten 1. Eigenschwingungsform. Hieraus kann nicht ohne weiteres auf komplexere Geometrien und komplexere Verschiebungszustände geschlossen werden.

Die Faktoren und Schwingungseffekte in Abhängigkeit der Simulationsdauer  $T$  treten genau so auch bei der Auswertung für den ebenen Spannungszustand auf.



**Abbildung 6.13:** Abweichung der einzelnen Ableitungsterme von der linear elastischen Topologischen Ableitung, Variation der Belastungsdauer zwischen dem neun- und zehnfachen der Periodendauer der ersten Eigenschwingungsform

*Mechanische Interpretation der ermittelten Topologischen Ableitung:*

Durch die Berücksichtigung der Trägheit entsteht schon bei der Lösung des Anfangsrandwertproblems eine Schwingung. Abhängig von der Belastungsdauer innerhalb einer Periode der Schwingung wird damit eine andere Topologische Ableitung berechnet, die im ungünstigsten Fall eine Umkehr der Charakteristik entlang der Balkenachse zur Folge hat. Der Balken ist unter der Belastung mit der Einzelkraft, die linear aufgebracht wird und schließlich abrupt endet, als künstlicher Sonderfall einzuordnen, der nur noch bedingt mit der quasistatischen Lösung verglichen werden kann. Ein physikalisches Modell einer tatsächlichen quasistatischen Belastung würde nach Erreichen der Maximalbelastung ein Halten der Kraft auf dem Lastniveau vorsehen.

Aus den bisherigen Untersuchungen folgt, dass berechnete Sensitivitäten auch für weitergehende Problemstellungen immer bezüglich dieses Trägheitseffekts hinterfragt werden müssen.

In den Arbeiten von Fernandez und Tortorelli 2018, Dahl et al. 2008 und Jensen et al. 2014 wird die Schwingung der nichtlinearen Adjungierten ebenfalls thematisiert. Die Anwendung erfolgt für einfache Feder-Masse-Schwinger und eindimensionale Wellenausbreitungsprobleme. Da dabei als Funktionale immer zeitliche Integrale über ganze Periodendauern betrachtet werden, werden die Schwingungseffekte in Abhängigkeit der Belastungsdauer wie hier beim Balken nicht untersucht.

In der Arbeit von Ivarsson et al. 2018 wurde als Zielfunktional die Maximierung der plastischen Arbeit verwendet, eine Abhängigkeit der Belastung wurde in dieser Arbeit nicht erwähnt, obwohl dort beispielsweise eine Verschiebung vorgegeben wurde, die ebenfalls abrupt endete. Es ist hier also noch zu untersuchen, ob dies eine Eigenart der inneren Energie ist.

Die rein analytische Herleitung mit Trägheitseffekten dient in den nächsten beiden Abschnitten zur Überprüfung insbesondere der adjungierten Lösungsschemata. Zunächst werden mit dem adjungierten Lösungsschema „erst differenzieren – dann diskretisieren“ die analytischen Herleitungen durch die numerische Lösung reproduziert. Mit diesen Resultaten lässt sich anschließend das adjungierte Lösungsschema „erst diskretisieren – dann differenzieren“ vergleichen.

### 6.1.3 Biegebalken mit „erst differenzieren – dann diskretisieren“

Der Balken mit Länge  $l = 150$  mm wird mit 48 vollintegrierten Schalenelementen in der Länge und einem Element in der Breite  $b = 1$  mm diskretisiert. Die Lage und Gewichtung der  $2 \times 2$  Integrationspunkte in der Schalenebene und der 9 Integrationspunkte über die Schalendicke der Schalenelemente ist in den Tabellen 3.1 und 3.2 in Abschnitt 3.4.3 dokumentiert. Insbesondere die Verwendung von  $2 \times 2$  Flächenintegrationspunkten ist zwingend notwendig, da sich bei weniger Integrationspunkten unphysikalische Eigenschwingungsformen mit kleinen Eigenkreisfrequenzen unter die Eigenschwingungsformen mischen, die die Adjungierte dominieren.

Diese Elemente erfüllen nicht mehr die Annahme der Schubstarrheit, die Abweichung bei kleinen Verschiebungen ist jedoch vernachlässigbar. Die Diskretisierung und Belastung kann Abbildung 6.14 entnommen werden. Für alle Knoten sind nur der rotatorische Freiheitsgrad um die  $\mathbf{e}_2$ -Achse und der Verschiebungsfreiheitsgrad in  $\mathbf{e}_3$ -Richtung frei, alle weiteren Freiheitsgrade sind gesperrt. An der Einspannung sind alle Freiheitsgrade gesperrt, die Belastung von  $F = 1 \cdot 10^{-6}$  kN wird auf die beiden Knoten am freien Ende je zur Hälfte aufgeteilt.

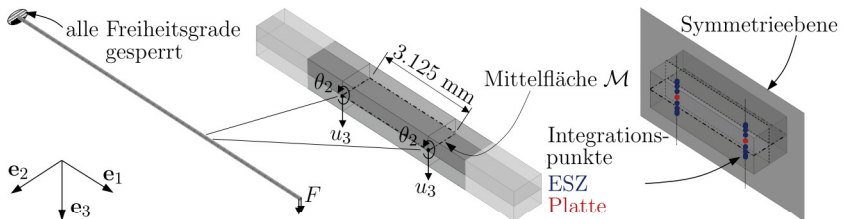


Abbildung 6.14: Balken diskretisiert mit Schalenelementen

Die Lösung der Biegebelastung erfolgt mit den Newmark-Parametern  $\beta = 0.25$  und  $\gamma = 0.5$ , das entspricht im Prinzip der Integration mit der Trapezregel. Als Belastungsdauer ist zunächst  $T = 235$  ms  $\approx 9.0 T_{\omega_3}$  vorgegeben. Der Zeitschritt für die implizite Zeitintegration wird so gewählt, dass eine Periode der dritten Eigenschwingung mit 16 Zeitschritten diskretisiert wird:

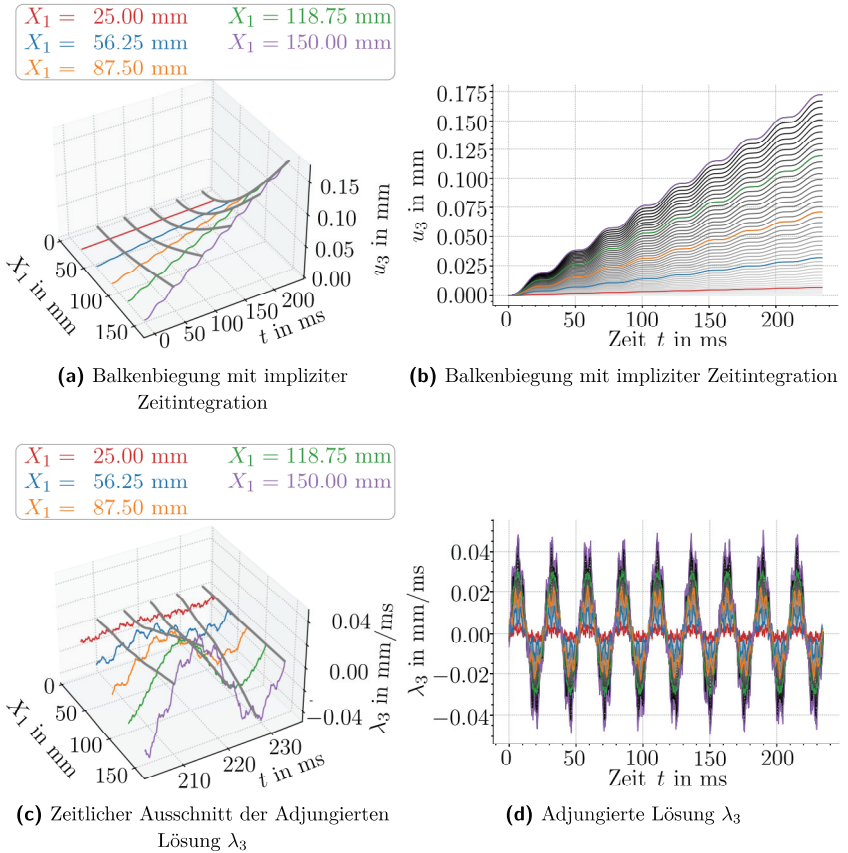
$$\Delta t = \frac{1}{16} T_{\omega_3} = 0.0927 \text{ ms}.$$

*Anmerkung 6.1.1 (Zeitschrittgröße und Phasenfehler). Nur die dominierende erste Eigenschwingung abzubilden und mit größerem Zeitschritt zu rechnen, hat einen Nebeneffekt, der bei der Verifikation der Diskretisierungslösung stört: Das Newmark-Verfahren ist mit einem Phasenfehler behaftet. Die Schwingungsdauer wird bei der Diskretisierung größer abgebildet, als sie analytisch ist. Bei zu großen Zeitschritten kann die Adjungierte anstelle der 9 Perioden nur 8.5 Perioden durchlaufen. Dieser Fehler bei der Lösung mit einem numerischen Zeitintegrationsverfahren wird als Phasenfehler (Dinkler 2017) bezeichnet. Die Topologische Ableitung und die Einzelterme entsprechen dann der Vorhersage bei  $T \approx 8.5 T_{\omega_1}$ , was in Abbildung 6.13 die dritte statt der ersten Spalte widerspiegeln würde. Gerade bei der Integration mit den Newmark-Konstanten  $\beta = 0.25$  und  $\gamma = 0.5$  wird der Phasenfehler mit kleinerem Zeitschritt ebenfalls verringert.*

Die Lösung der Balkenbiegung ist in den Abbildungen 6.15a und 6.15b dargestellt. Der Verlauf der Adjungierten ist in den Abbildungen 6.15c und 6.15d zu sehen. Wie erwartet durchlaufen sowohl die Verschiebung  $u_3$  als auch die Adjungierte  $\lambda_3$  neun Perioden der ersten Eigenschwingung.

Es folgt zunächst die Auswertung für den ebenen Spannungszustand. Zu jeder Dickenintegrationspunkt-Position der Schale existiert ein farbiger Punkt in Abbildung 6.16. Wegen der Symmetrie in  $\mathbf{e}_2$ -Richtung werden nur die Integrationspunkte mit den  $\xi_2$ -Koordinaten  $\xi_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$  ( $X_2 = -0.29$ ) dargestellt. Die Flächen stellen die analytischen Lösungen mit den Eigenformen dar, die ohne räumliche und zeitliche Diskretisierung ermittelt werden. Die Abweichung lässt sich durch die Abweichung von Eigenvektoren und Eigenformen erklären. Die Eigenvektoren stellen eine räumliche Diskretisierung der Eigenformen dar, die den glatten Verlauf nur stückweise wiedergeben und sich etwas steifer verhalten als die Eigenformen.

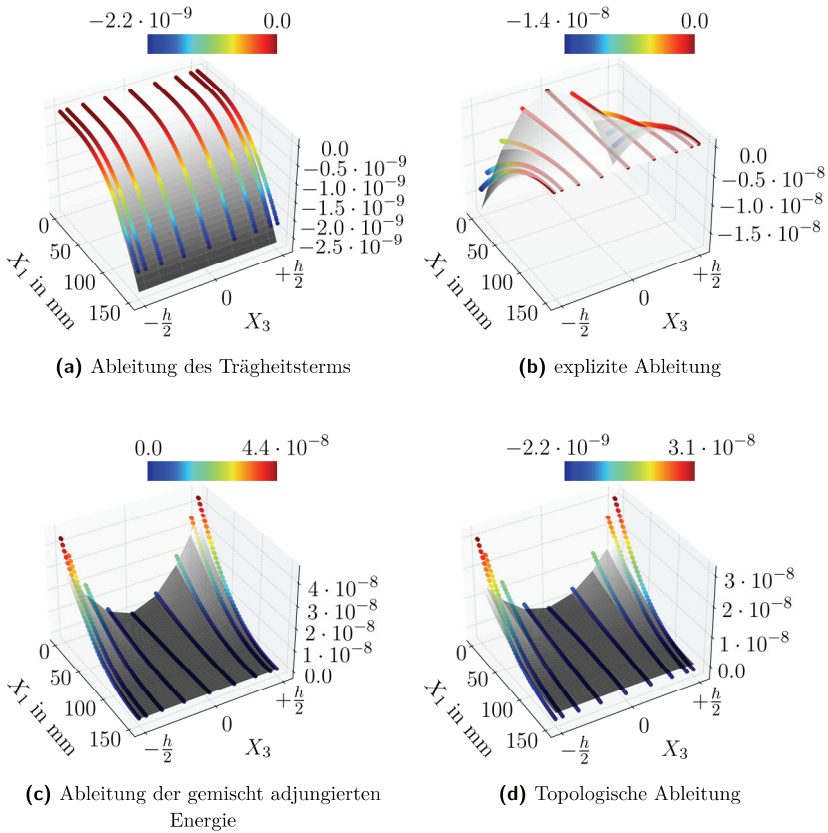
Für die Auswertung der reinen Biegung werden hier wie im vorherigen Abschnitt verschiedene Belastungszeiträume ausgewertet. Berechnet werden die Sensitivitäten wie in Abschnitt 5.6 zunächst auf Basis der Flächenintegrationspunkte, anschließend gemittelt über das Element und dann auf die Elementknoten übertragen. Die numerischen Ergebnisse sind als diskrete Punkte zusammen mit den Graphen der analytischen Lösung in Abbildung 6.17 visualisiert. Das Zeitintegrationschema „erst differenzieren – dann diskretisieren“ liefert annähernd die gleichen Ergebnisse, wie die analytische Auswertung. Auch die Faktoren der Einzelbeiträge entsprechen den Vorhergesagten.



**Abbildung 6.15:** Numerische Lösung der Balkenbiegung und Adjungierte der inneren Energie nach dem Lösungsschema „erst differenzieren – dann diskretisieren“

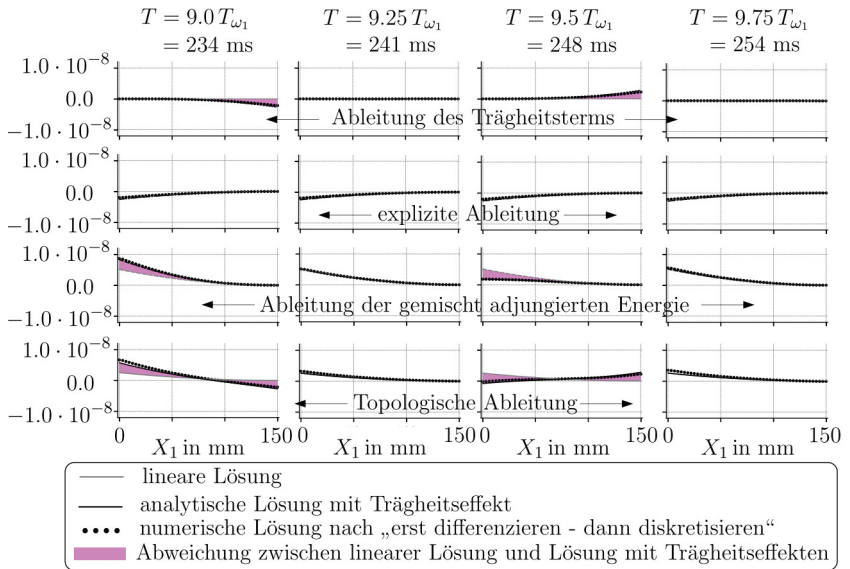
### 6.1.4 Biegebalken mit „erst diskretisieren – dann differenzieren“

Anhand der Lösungsvorschrift des adjungierten Lösungsschemas „erst diskretisieren – dann differenzieren“ kann keine Vorhersage für das Verhalten der Adjungierten gemacht werden. Auf Basis des Bernoulli-Balkens kann aber eine qualitative Überprüfung mit der Adjungierten des Lösungsschemas „erst differenzieren – dann diskretisieren“ aus dem vorausgegangenen Abschnitt erfolgen.



**Abbildung 6.16:** Topologische Ableitung für den ebenen Spannungszustand des Balkens in  $\frac{\text{kg}}{\text{mm ms}^2}$  für eine Belastungszeit  $T = 9.0 T_{\omega_1}$ , Punkte aus der numerischen Berechnung an den Integrationspunkten und Fläche aus der rein analytischen Lösung

Die Pseudolasten der inneren Energie werden nach (4.81) und (4.82) im Fall des Bernoulli-Balkens mit der linearen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  berechnet. In Abbildung 6.18 ist der zeitliche Verlauf der Adjungierten dargestellt. Qualitativ unterscheidet sich die Adjungierte des Lösungsschemas „erst diskretisieren – dann differenzieren“ nicht von der Adjungierten nach „erst differenzieren – dann diskretisieren“. Exemplarisch wird die Schwingung der Adjungierten am freien Balkenende genauer betrachtet.



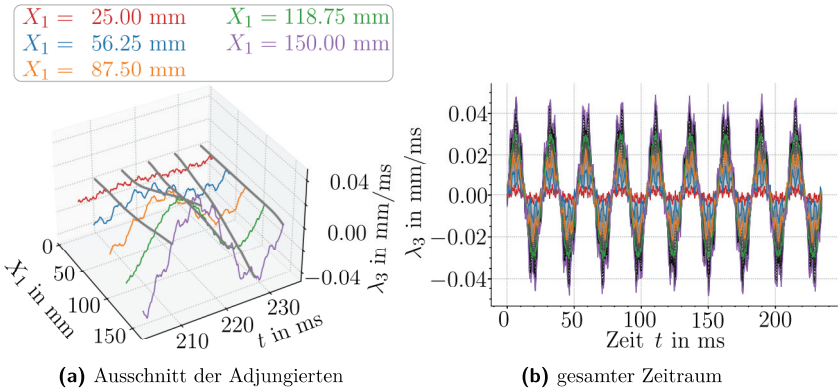
**Abbildung 6.17:** Numerische Topologische Ableitung nach dem adjungierten Lösungsschema „erst differenzieren – dann diskretisieren“, Variation der Belastungsdauer zwischen dem neun- und zehnfachen der Periodendauer der ersten Eigenschwingungsform

In Abbildung 6.19 sind die beiden Lösungen der Adjungierten als schwarze durchgezogene und rote gestrichelte Linie zusammen mit der analytischen Lösung mit allen Eigenschwingungsformen eingezeichnet. Die beiden numerisch ermittelten Adjungierten liegen bis auf den Endwert übereinander. Sie bilden prinzipiell den analytischen Verlauf nach, der mit einem Zeitintervall für die blaue Linie von  $\Delta t = 0.0927$  ms und ansonsten linearen Zwischenstücken die Summe der ersten drei Eigenformen nach (6.54) bis  $k = 3$  berücksichtigt. In den Spitzen wird diese Linie allerdings nicht exakt getroffen. Die grüne gestrichelte Linie dient zum Vergleich mit der feinsten möglichen Darstellung der Adjungierten in der räumlichen Diskretisierung, also die Abbildung der ersten 48 Eigenformen<sup>7</sup> des Balkens ausgewertet mit einem Zeitschritt, der die kleinste auftretende Periodendauer noch mit 16 Zeitschritten abbildet:  $\Delta t = \frac{T_{\omega_{48}}}{16} = 0.00012$  ms.

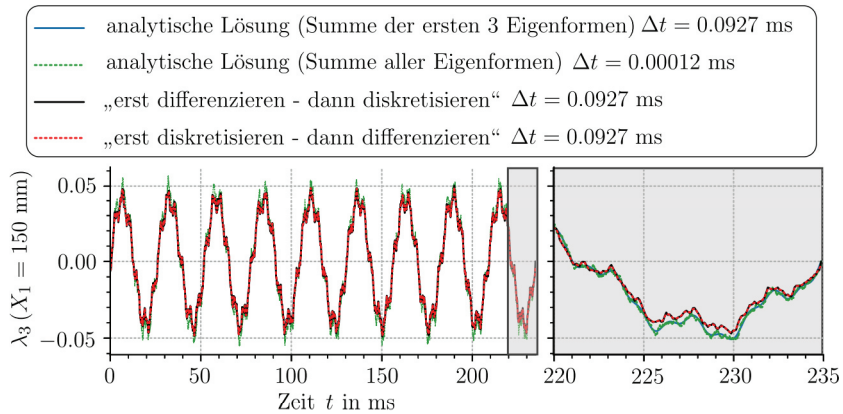
In Abbildung 6.20 wird die Belastungsdauer im Bereich zwischen dem neun- und zehnfachen der Schwingungsdauer der ersten Eigenschwingungsform variiert.

<sup>7</sup>aus den 48 unabhängigen Verschiebungsfreiheitsgraden des Balkens



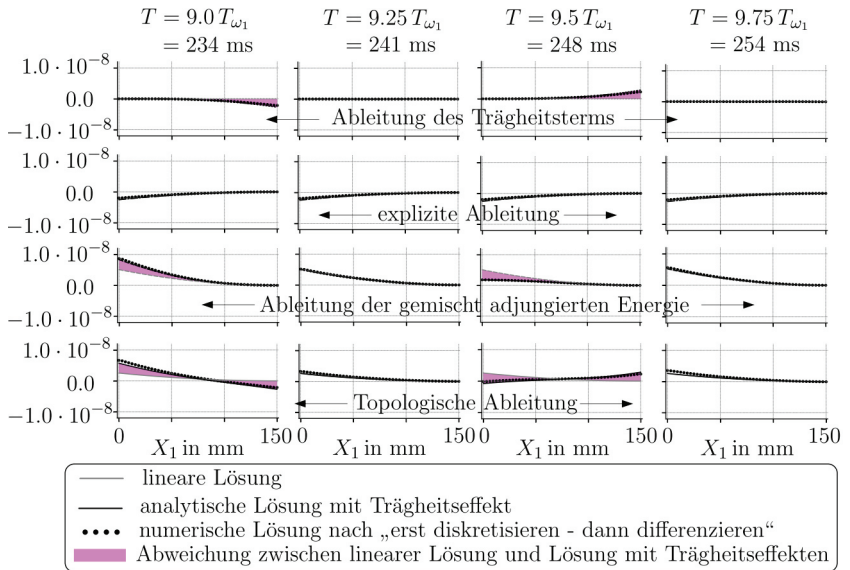


**Abbildung 6.18:** Adjungierte des Bernoulli-Balkens nach „erst diskretisieren – dann differenzieren“



**Abbildung 6.19:** Vergleich der analytischen Adjungierten mit den numerischen Lösungen am Balkenende ( $X_1 = 150 \text{ mm}$ )

Ein Einfluss der veränderten Adjungierten kann in der Topologischen Ableitung qualitativ nicht erkannt werden. In der Darstellung der Biege-Sensitivität tritt der Kosinus-Effekt hier genauso auf, wie bei der analytischen Lösung und der Adjungierten nach dem Schema „erst differenzieren – dann diskretisieren“.



**Abbildung 6.20:** Numerische Topologische Ableitung nach dem adjungierten Lösungsschema „erst diskretisieren – dann differenzieren“, Variation der Belastungsdauer zwischen dem neun- und zehnfachen der Periodendauer der ersten Eigenschwingungsform

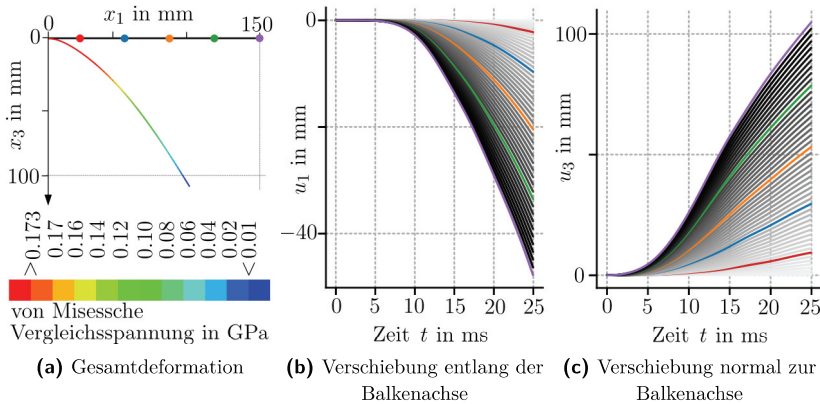
Im nächsten Schritt wird nun eine schnellere Belastung mit nichtlinearem Materialverhalten und großen Verschiebungen des Balkens zugelassen und die Ergebnisse ebenfalls mit Blick auf die Variation der Simulationsdauer diskutiert.

### 6.1.5 Balken nichtlinear

Die geometrischen Eigenschaften des Balkens und die räumliche Diskretisierung werden beibehalten. Die Freiheitsgrade werden jetzt auch für Verschiebungen entlang der  $\mathbf{e}_1$ -Achse freigegeben. Durch eine vergrößerte Kraft von  $F = 5 \cdot 10^{-4}$  kN und einer kurzen Belastungszeit  $T = 25$  ms wird eine große Verformung mit plastischer Dehnung erreicht. Das verwendete Material entspricht dem in Kapitel 5.1.4 dargestellten. Die Zeitschrittgröße ist hier  $\Delta t = 0.26$  ms =  $\frac{T_{\omega_3}}{16}$ .

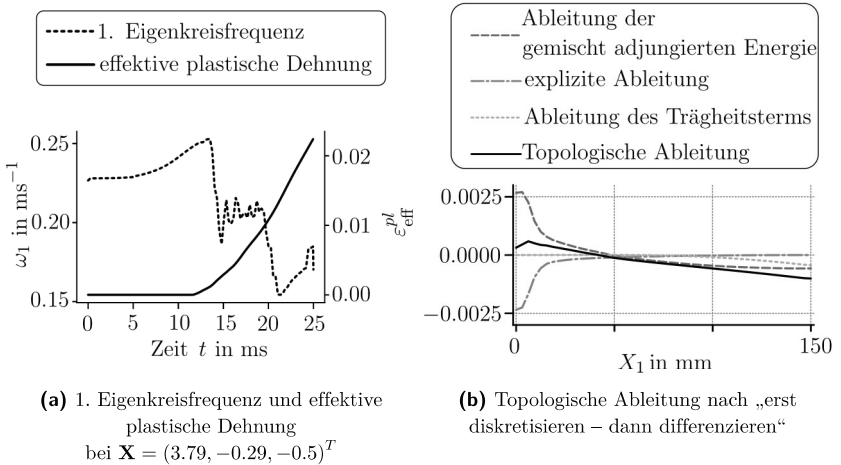
Wir betrachten zunächst die Verschiebung des Balkens in Abbildung 6.21a. Das Maximum aus oberem, mittlerem und unterem Dickenintegrationspunkt der von Misesschen Vergleichsspannung gemittelt in der Elementfläche und extrapoliert auf

die Elementknoten ist hier eingefärbt. Ohne Entlastung wird damit bei Überschreitung der Fließspannung auch plastische Dehnung im Bereich zwischen  $X_1 = 0$  mm und  $X_1 = 43$  mm angezeigt. Das Element direkt an der Einspannung ist durch die Einspannung deutlich versteift. Die Verschiebungskurven in den Abbildungen 6.21b und 6.21c, insbesondere  $u_3$ , zeigen anfangs eine ähnliche Charakteristik wie die rein elastische Lösung als Sinusschwingung um eine Gerade. Allerdings ist keine vollständige Periode zu erkennen.



**Abbildung 6.21:** Verschiebung des Balkens unter großer Kraft

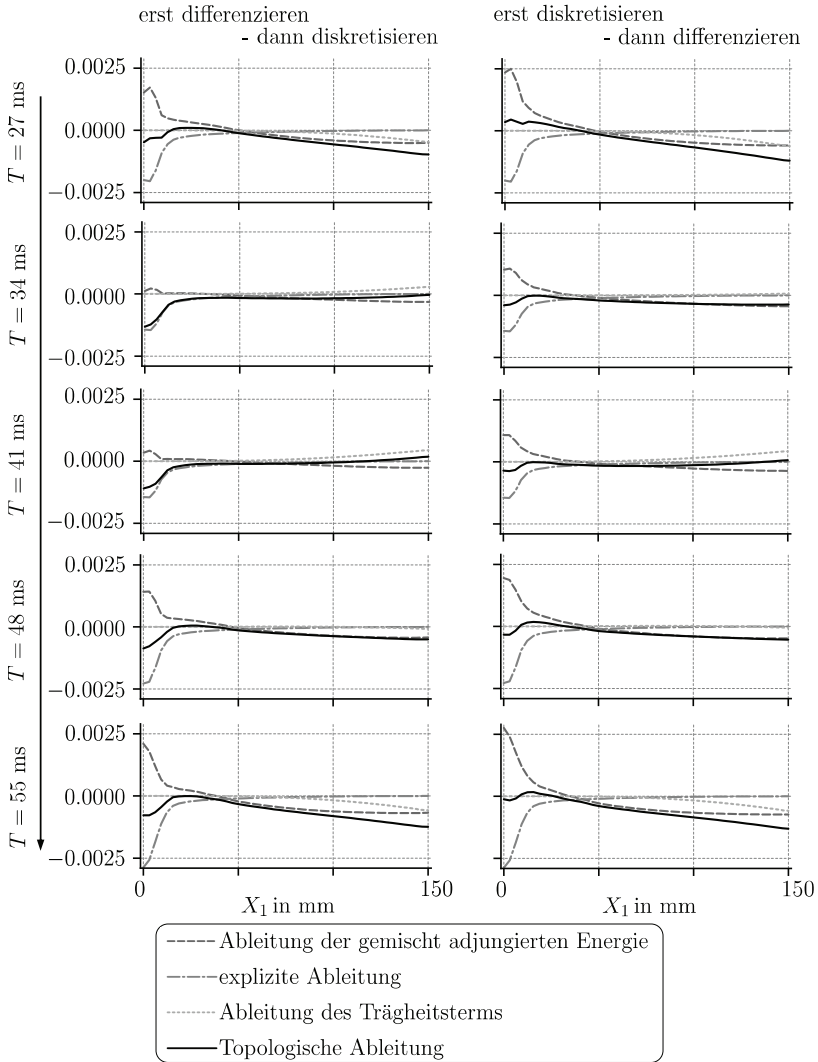
Dies lässt sich mit der Veränderlichkeit der Eigenfrequenzen erklären. In Abbildung 6.22a sind die 1. Eigenkreisfrequenz und die plastische Dehnung bei  $X_1 = 3.79$  mm auf dem obersten Dickenintegrationspunkt bei  $X_3 = -0.5$  mm) dargestellt. Durch die geometrische Veränderung wird der Balken zunächst steifer, die Eigenkreisfrequenz steigt an. Erst bei ca. 12 ms beginnt die plastische Dehnung und der Balken wird weicher. Dadurch sinkt die Periodendauer der Eigenschwingung. Ein solches System, bei dem sich die Eigenschaften mit der Zeit verändern, wird als *heteronom* bezeichnet. Eine analytische Lösungsfunktion zur Verifikation der Sensitivitäten kann dann nicht mehr ermittelt werden. Die Ermittlung der Adjungierten und der Topologischen Ableitungen in Abbildung 6.22b erfolgt mit impliziter Zeitintegration und dem adjungierten Lösungsschema „erst diskretisieren – dann differenzieren“. Sowohl die explizite Ableitung der inneren Energie als auch die Ableitung der gemischt adjungierten Energie sind in dem Bereich des Balkens, wo die plastische Dehnung auftritt, deutlich verstärkt. Die Ableitung der gemischt adjungierten Energie wird ab ca.  $X_1 = 50$  mm kleiner als null, was bei der elastischen Berechnung nicht aufgetreten ist.



**Abbildung 6.22:** Zeitliche Veränderung der 1. Eigenkreisfrequenz und effektive plastische Dehnung, Topologische Ableitung nach „erst diskretisieren – dann differenzieren“

Für beide adjungierten Lösungsschemata wird analog zum linear elastischen Balken eine Untersuchung der Abhängigkeit von der Belastungsdauer durchgeführt. Die Belastungsdauer  $T$  variiert zwischen 27 ms und 55 ms. Das entspricht in etwa dem ein- bis zweifachen der Periodendauer der ersten Eigenschwingungsform für den undeformierten Balken. Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.23 mit den Einzelbeiträgen gegenübergestellt.

Aufgrund der quadratischen Skalierung der Topologischen Ableitung in der Kraft ist nach den analytischen Werten aus Abschnitt 6.1.2 eine Topologische Ableitung im Bereich  $[-0.001, 0.002]$  zur erwarten. Zu allen Zeitpunkten ist der Verlauf entlang der Balkenlänge an der Einspannstelle deutlich höher, während zur Krafteinleitung hin ein gutmütiger Verlauf entsteht. Bei den Belastungszeiträumen von  $T = 27$  ms,  $T = 48$  ms und  $T = 55$  ms ist die Sensitivität des freien Endes geringer als im Rest des Balkens. Der Bereich in dem plastische Dehnung auftritt ist höher bewertet, sogar höher als die Einspannung selbst. Die Sensitivität an der Einspannung ist mit einer Ausnahme immer kleiner als null. Dies wird durch die explizite Ableitung hervorgerufen, die die Ableitung der gemischt adjungierten Energie an dieser Stelle dominiert.



**Abbildung 6.23:** Topologische Ableitung des nichtlinearen Balkens bei verschiedenen Endzeiten  $T$

*Mechanische Interpretation der ermittelten Topologischen Ableitung:*

Der Effekt der Belastungsdauer wird auch unter schneller Belastung und großer Verformung mit nichtlinearem Materialverhalten beobachtet.

Im Bereich der plastischen Dehnung wird die Topologische Ableitung nicht mehr durch die Ableitung der gemischt adjungierten Energie dominiert, sondern von der expliziten Ableitung. Im Bereich der Einspannung kommt es daher zu einem veränderten Größenverhältnis der Topologischen Ableitung. Die durch die Biegung veränderte Geometrie trägt die Belastung im vorderen Balkenbereich. Eine Aussparung näher zur Belastung würde die Struktur mehr erweichen als eine Aussparung im Bereich der plastischen Dehnung. Anschaulich lässt sich das mit der Neuber-Hyperbel in Abschnitt 5.1.4 erklären, wo die Spannungskonzentration um eine Aussparung eine geringere Überhöhung zur Folge hat, wenn die Aussparung so stark belastet ist, dass selbst die Nennspannung  $\sigma_0$  plastische Dehnung zur Folge hat.

## 6.2 Kragträger unter hochdynamischer Belastung

Wir erweitern den nichtlinearen Balken in  $\mathbf{e}_2$ -Richtung zu einem Kragträger von 100 mm Breite. Die Krafteinleitung erfolgt gemäß Abbildung 6.24 auf einer Breite von 25 mm. Auf den äußeren Knoten der Lasteinleitungslinie wird die Kraft mit 0.5 skaliert, so dass insgesamt eine Kraft von  $F = 0.4$  kN linear im Belastungszeitraum 25 ms aufgebracht wird. Die implizite Zeitintegration erfolgt mit einer Schrittweite von  $\Delta t = 0.08712$  ms.

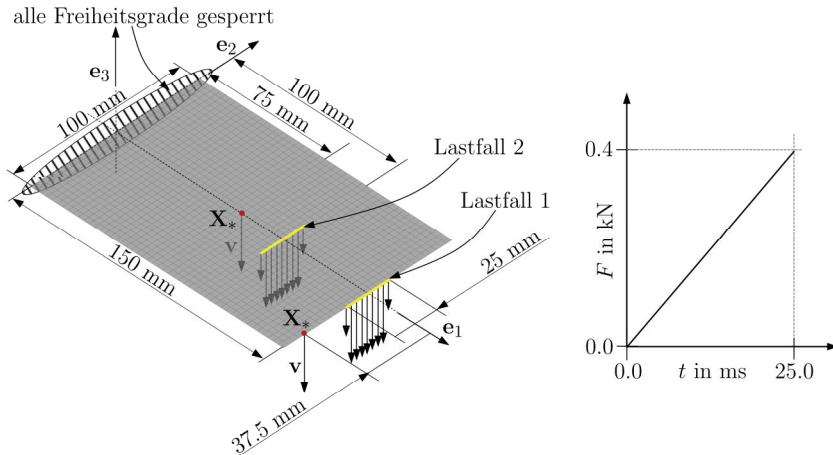
Anhand zweier Lastfälle und mit jeweils zwei Positionen des Verschiebungsfunktionals wird die Topologische Ableitung für die Verschiebung eines Einzelpunktes diskutiert. Beim ersten Lastfall wird die Kraft auf den Elementknoten bei  $X_1 = 150$  mm aufgebracht, beim zweiten Lastfall auf den Elementknoten bei  $X_1 = 100$  mm. Das Verschiebungsfunktional wird jeweils in negativer  $\mathbf{e}_3$ -Richtung ( $\mathbf{v} = (0.0, 0.0, -1.0)^T$ ) an den rot markierten Punkten bei  $\mathbf{X}_* = (75.0, 0.0, 0.0)^T$  und bei  $\mathbf{X}_* = (150.0, -37.5, 0.0)^T$  gemessen.

### 6.2.1 Auswertung des 1. Lastfalls

Das Verformungsbild zum Endzeitpunkt sowie die maximale von Misessche Vergleichsspannung in der Schale ist in Abbildung 6.25 dokumentiert. Der Verschiebungsverlauf für den ersten Lastfall und der Verlauf der Einzelpunktverschiebung

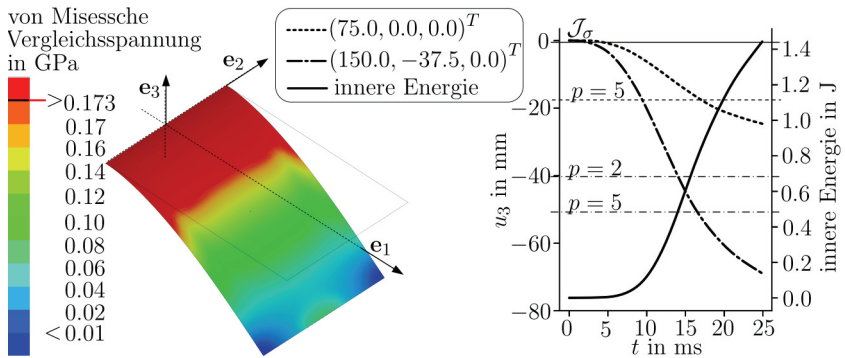
für  $\mathbf{X}_* = (150.0, -37.5, 0.0)^T$  wurde bereits in Kapitel 4.5.2 in Abbildung 4.12 auf Seite 120 in 5 ms-Schritten gezeigt. Da auch hier keine Entlastung des Kragträgers zugelassen wird, entspricht der rote Bereich bei der von Misesschen Vergleichsspannung zugleich dem Bereich des Kragträgers, in dem plastische Dehnung stattfindet. Die Graphen der Verschiebungen der Einzelpunkte sowie der Verlauf der inneren Energie sind im Diagramm in Abbildung 6.25 rechts gezeigt. Die horizontalen Linien zeigen die negativen Werte des Verschiebungsfunktionalis.

Wir betrachten zunächst die Sensitivitäten nach dem adjungierten Lösungsschema „erst differenzieren – dann diskretisieren“. Die adjungierte Endgeschwindigkeit und die Endbeschleunigung sowie der Verlauf für die innere Energie sind in Abbildung 4.8 auf Seite 113 dargestellt.



**Abbildung 6.24:** Geometrie und Lastfälle des Kragträgers

In Abbildung 6.26 sind zunächst die Graphen der einzelnen Terme der Topologischen Ableitung der inneren Energie gezeigt und entsprechend der Werte eingefärbt. Aufgrund der Größenunterschiede sind sie mit jeweils eigenen Farbskalen und eigenen Skalierungen dargestellt. Die Ableitung der gemischt adjungierten Energie dominiert die Sensitivität, die Ableitung des Trägheitsterms ist von kleiner Ordnung. Die eingezeichnete schwarze Linie zeigt die Höhenlinie der einzelnen Terme für den Wert null an. Hier ist zu beobachten, dass diese Höhenlinie nicht bis zur Kräfteinleitung reicht.



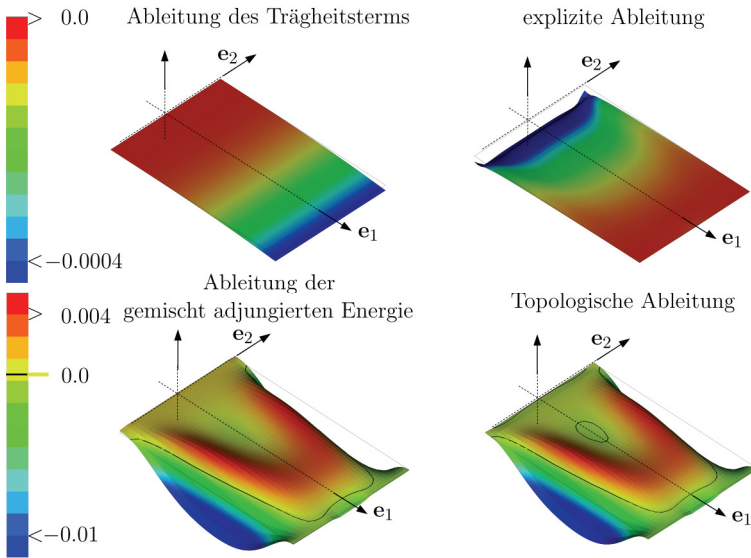
**Abbildung 6.25:** Maßstabstreuere Verformung und Belastung des Kragträgers im 1. Lastfall

Die Ableitung des Trägheitsterms und die explizite Ableitung sind in der Größenordnung nur ca.  $\frac{1}{10}$  der Ableitung der gemischt adjungierten Energie. Die Flanken des Kragträgers bei  $X_2 = \pm 50$  mm haben nur eine geringe Sensitivität.

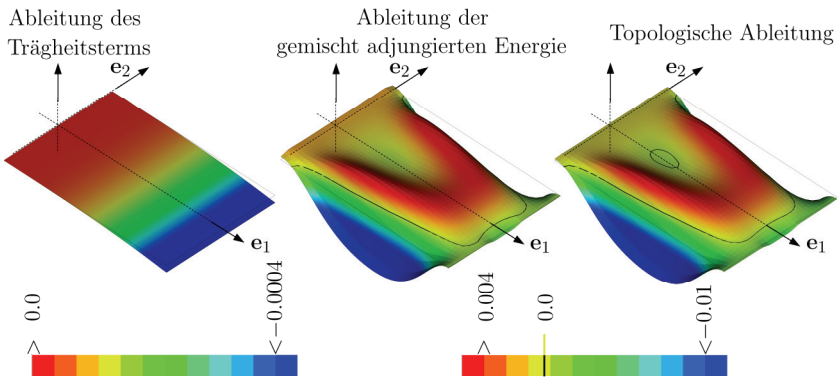
Zum Vergleich mit dem adjungierten Lösungsschema „erst diskretisieren – dann differenzieren“ sind die Graphen der Ableitung der gemischt adjungierten Energie, der Ableitung der Trägheit und der Graph der Topologischen Ableitung in Abbildung 6.27 dargestellt. Die explizite Ableitung ist für beide Schemata gleich. Der zeitliche Verlauf der Adjungierten ist in Abbildung 4.10 auf Seite 115 dargestellt. Obwohl die Adjungierte nach „erst differenzieren – dann diskretisieren“ zwar mit qualitativ ähnlichem Verlauf sehr viel unruhiger wirkt, kann dies in der Topologischen Sensitivität nicht erkannt werden.

Für den direkten quantitativen Vergleich ist in Abbildung 6.28 die Abweichung der beiden Schemata eingefärbt. Die Nulldurchgänge der Ableitung der gemischt adjungierten Energie und der Topologischen Ableitung sind als schwarze Linien zu sehen. Die Abweichung der Ableitung des Trägheitsterms kann auch in den Abbildungen 6.26 und 6.27 gesehen werden. Die Abweichung in der Ableitung der gemischt adjungierten Energie und der Topologischen Ableitung zeigt sich in den Extrema. Entlang des Nulldurchgangs ist die Differenz gleich null, die maximale Sensitivität nach „erst differenzieren – dann diskretisieren“ ist kleiner als die maximale Sensitivität „erst diskretisieren – dann differenzieren“, bei der minimalen Sensitivität ist das umgekehrt.



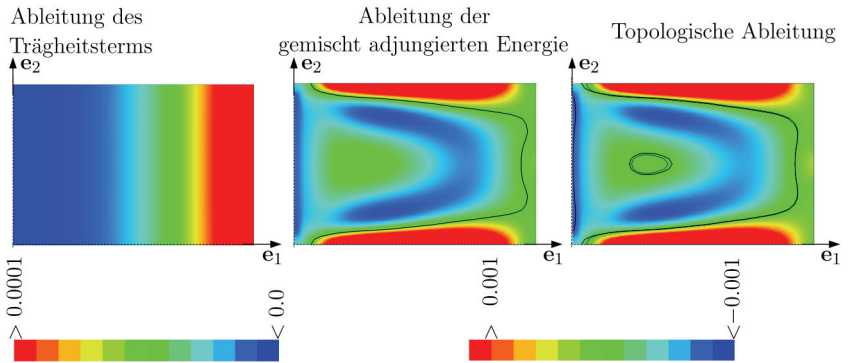


**Abbildung 6.26:** Topologische Sensitivität der inneren Energie nach „erst differenzieren – dann diskretisieren“, 1. Lastfall (in  $\text{kg} \cdot \text{mm}^{-1} \text{ms}^{-2}$ )

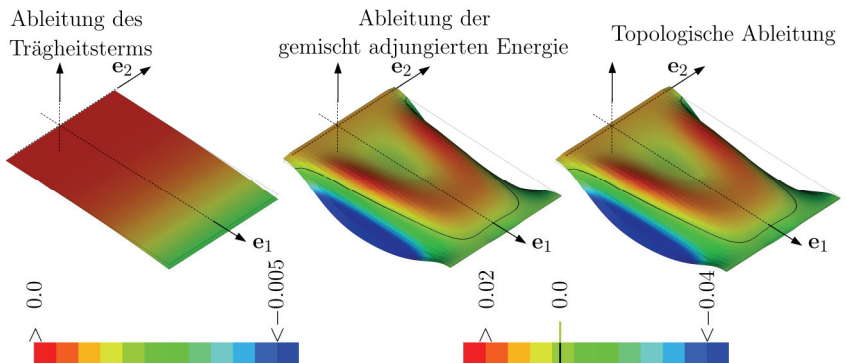


**Abbildung 6.27:** Topologische Sensitivität der inneren Energie nach „erst diskretisieren – dann differenzieren“, 1. Lastfall (in  $\text{kg} \cdot \text{mm}^{-1} \text{ms}^{-2}$ )

„erst differenzieren – dann diskretisieren“ – „erst diskretisieren – dann differenzieren“



**Abbildung 6.28:** Abweichung der Topologischen Ableitungen der inneren Energie der beiden Lösungsschemata



**Abbildung 6.29:** Topologische Ableitung des Verschiebungsfunktionals bei  $\mathbf{X}_* = (75.0, 0.0, 0.0)^T$  nach „erst differenzieren – dann diskretisieren“, 1. Lastfall (in  $\text{mm}^{-2}$ )

Für den zweiten Verschiebungspunkt bei  $\mathbf{X}_* = (150.0, -37.5, 0.0)^T$  ist die Pseudoplast in Kapitel 4.5.2 in Abbildung 4.12 auf Seite 120 dargestellt, der Verlauf der Adjungierten in Abbildung 4.13a. In der Ableitung des Trägheitsterms der Topologischen Ableitung in Abbildung 6.30 ist die Unwucht durch die seitliche Pseudoplast kaum zu erkennen. Durch die Ableitung der gemischt adjungierten

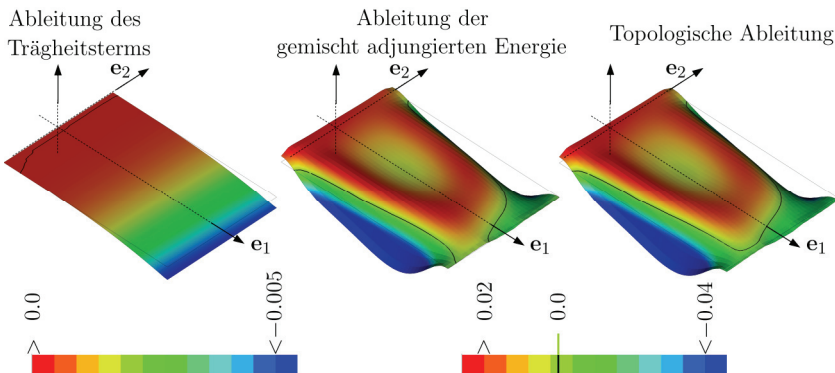
Energie entsteht eine deutliche Verlagerung der Topologischen Ableitung und die Einspannung wird mit dem Verschiebungspunkt „verbunden“.

*Mechanische Interpretation der ermittelten Topologischen Ableitung:*

Die Topologische Ableitung der inneren Energie zeigt die tragende Struktur des Kragträgers von der Kräfteinleitung in zwei Strahlen bis zur Lagerung auf. Die Seitenbereiche bei  $X_2 = \pm 50$  mm haben den geringsten Einfluss. Eine gezielte Erweichung des Trägers kann durch das Einbringen einer Aussparung auf den tragenden Strahlen zwischen  $X_1 = 50$  mm und  $X_1 = 80$  mm erreicht werden.

Die Verschiebung des Punktes  $\mathbf{X}_* = (75.0, 0.0, 0.0)^T$  in  $\mathbf{e}_3$ -Richtung wird durch die tragende Struktur der inneren Energie gestützt. Mit der Einzelpunktverschiebung soll das Eindringen in schützenswerte Bereiche bewertet werden. Um beispielsweise angrenzende Bereiche in negativer  $\mathbf{e}_3$ -Richtung zu schützen, ist das Einbringen von Aussparungen nur im Bereich der Seitenflanken sinnvoll. Die Minimierung der Einzelpunktverschiebung und die Maximierung der inneren Energie stehen in einem Zielkonflikt.

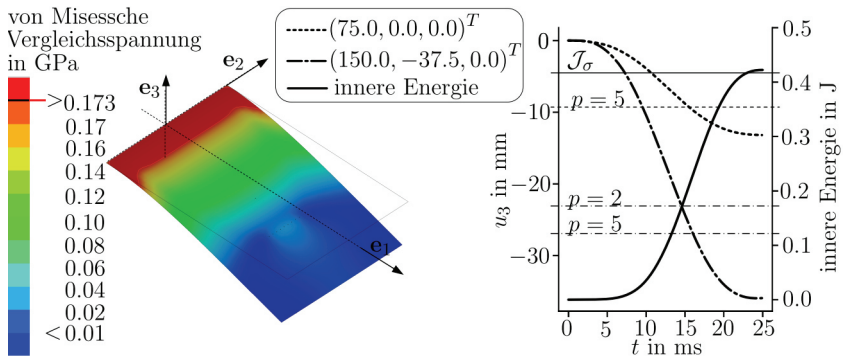
Bei der Sensitivität der Verschiebung des Einzelpunktes an der Vorderkante bei  $\mathbf{X}_* = (150.0, -37.5, 0.0)^T$  ist ebenfalls der Einfluss der tragenden Struktur der Belastung zu erkennen. Auffälliger hierbei ist die hohe Sensitivität des Biegebereichs direkt bei der Einspannung und die seitliche Verlagerung des hoch sensitiven Bereichs in negativer  $\mathbf{e}_2$ -Richtung auf die Seite des Einzelpunktes.



**Abbildung 6.30:** Topologische Sensitivität des Verschiebungsfunktionals bei  $\mathbf{X}_* = (150.0, -37.5, 0.0)^T$  nach „erst differenzieren – dann diskretisieren“, 1. Lastfall (in  $\text{mm}^{-2}$ )

### 6.2.2 Auswertung des 2. Lastfalls

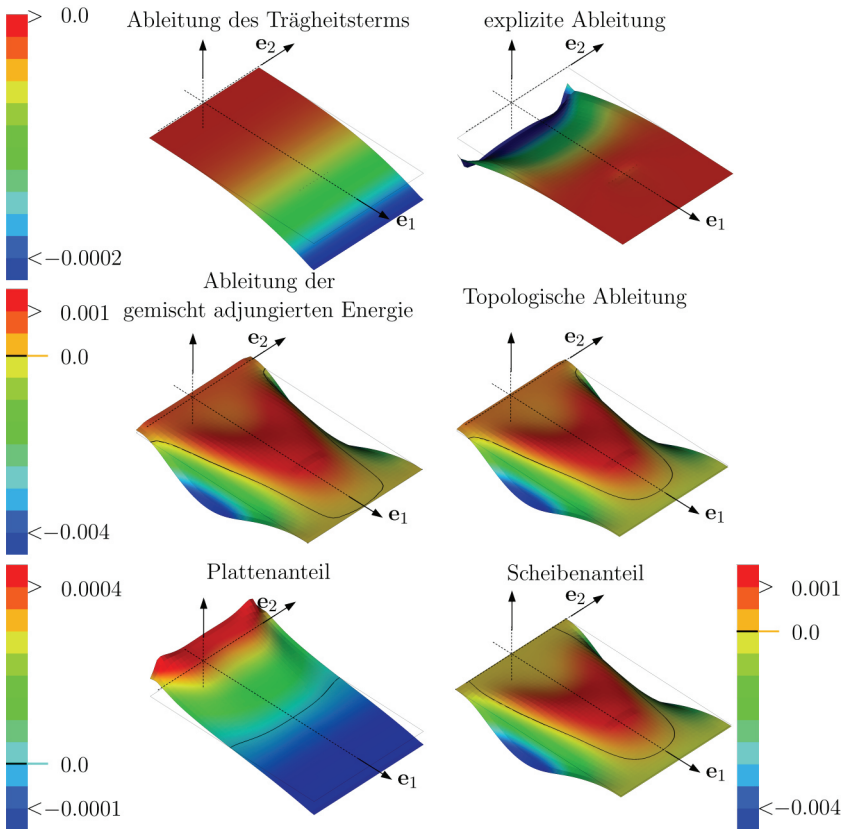
Durch die Verschiebung der Krafteinleitung zur Einspannung hin, gibt es weniger Hebelwirkung und der Bereich der plastischen Dehnung wird kleiner. Bei der Auswertung der von Misesschen Vergleichsspannung in Abbildung 6.31 fällt der „Schatten“ der Spannung zwischen der Krafteinleitung und dem freien Ende des Balkens auf. Die Beanspruchung des Kragträgers endet also nicht direkt bei der Krafteinleitung.



**Abbildung 6.31:** Maßstabsgetreue Verformung und Belastung des Kragträgers im 2. Lastfall

Die Topologische Ableitung nach dem adjungierten Lösungsschema „erst differenzieren – dann diskretisieren“ wird zuerst ausgewertet. Die Höhenlinie zum Niveau null der Topologischen Ableitung in Abbildung 6.32 reicht weit um die Krafteinleitung herum. Für dieses Beispiel ist es interessant, den Platten- und den Scheibenanteil der Topologischen Ableitung getrennt zu betrachten, wie in Abbildung 6.32 unten. Der Plattenanteil ist nur ca.  $\frac{2}{5}$  so groß ist wie der Scheibenanteil. Der Plattenanteil ist erwartungsgemäß an der Einspannung am größten, also bei Biegung am Ort der höchsten Biegebelastung, und nimmt zur Krafteinleitung hin ab. Der Scheibenanteil dominiert die Mitte des Kragträgers und zeigt in zwei Strahlen von der Lasteinleitung zur Einspannung.

Die Sensitivität des Verschiebungsfunktionals des Punktes  $\mathbf{X}_* = (75.0, 0.0, 0.0)^T$  in Abbildung 6.33 zeigt einen ähnlichen Verlauf wie die Topologische Ableitung der inneren Energie. Auch hier reicht der Bereich des Kragträgers, dessen Sensitivität größer als null ist, um die Krafteinleitung herum.



**Abbildung 6.32:** Topologische Sensitivität der inneren Energie nach „erst differenzieren – dann diskretisieren“, 2. Lastfall (in  $\text{kg} \cdot \text{mm}^{-1} \text{ms}^{-2}$ )

Die Topologische Ableitung des Verschiebungsfunktional des Punktes an der Vorderkante bei  $\mathbf{X}_* = (150.0, -37.5, 0.0)^T$  in Abbildung 6.34 zeigt eine andere Charakteristik. Der Punkt wird von einem umlaufenden Rahmen der Ableitung der gemischt adjungierten Energie getragen. Zwischen Einspannung und Kraft-einleitung, unmittelbar vor der Kräfteinleitung, hat der Kragträger die geringste Sensitivität.

In den Abbildungen 6.35a bis 6.35c sind die Topologischen Ableitungen des Verschiebungsfunktional für die Exponenten  $p = 2$ ,  $p = 3$  und  $p = 4$  nach dem

adjungierten Lösungsschema „erst diskretisieren – dann differenzieren“ dargestellt.

*Mechanische Interpretation der ermittelten Topologischen Ableitung:*

Für die gezielte Erweichung des Kragträgers wird durch die Topologische Ableitung der sensitivste Bereich in der Mitte des Trägers unmittelbar vor der Krafteinleitung aufgezeigt.

Dieser Bereich trägt auch wieder zur Stützung des Einzelpunktes in der Trägermitte bei  $\mathbf{X}_* = (75.0, 0.0, 0.0)^T$  bei, wobei dieser noch stärker von der Biegesteifigkeit an der Einspannung profitiert. Erwartungsgemäß haben die Seitenflanken außerhalb des tragenden Dreiecks und das freie Ende des Trägers wenig Einfluss auf die lokale Verschiebung in der Mitte.

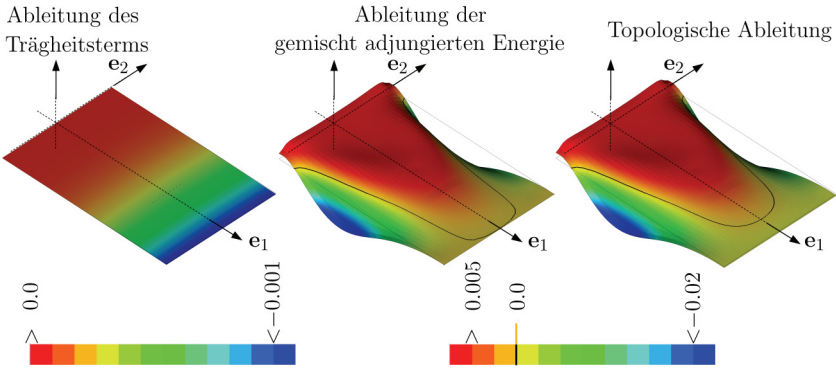
Der Punkt  $\mathbf{X}_* = (150.0, -37.5, 0.0)^T$  hingegen wird durch die Seitenflanken und die Biegesteifigkeit an der Einspannung getragen. Ein Bereich von geringer Sensitivität in der Mitte des Trägers zeigt, dass das Einbringen einer Aussparung dort die innere Energie am effektivsten steigern würde, die Verschiebung des Randpunktes aber weniger beeinflussen würde, als eine Aussparung entlang des Randes. In dem niedrig sensitiven Bereich könnten durch das Einbringen einer Aussparung also große Verzerrungen erzeugt werden, solange der Punkt durch einen äußeren Rahmen getragen wird.

Diese Interpretationen sind jedoch nur eine Momentaufnahme. Für die Bauteilauslegung muss das Einbringen einer Aussparung sukzessive beispielsweise in einem Optimierungsprozess erfolgen, da die Sensitivität sich durch die Bauteilform ändert und die Topologische Ableitung nur eine Sensitivität für eine sehr kleine Aussparung liefern kann.

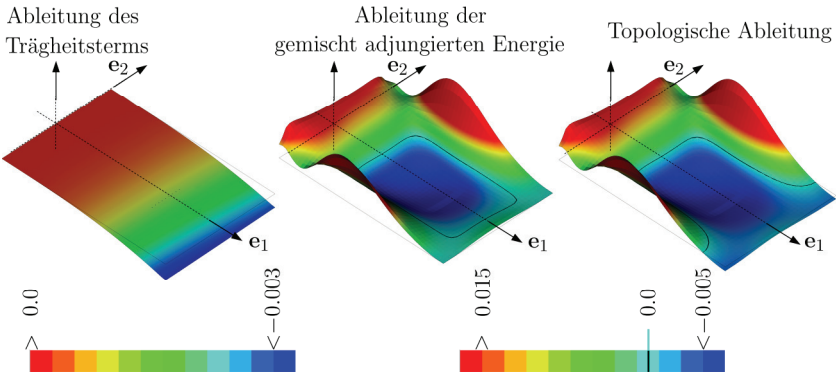
Der Stützrahmen für die Einzelpunktverschiebung wird mit dem Exponenten  $p$  verschärft. Bei kleinerem Exponenten trägt ein zeitlich längerer Bereich der Belastung zur Ermittlung der Sensitivität bei. Je größer der Exponent wird, desto größer wird der Einfluss der maximalen Verschiebung und desto kleiner wird der Zeitbereich der Verformungsgeschichte, der die Sensitivität des Einzelpunktes beeinflusst. Im Fall des Kragträgers ist das für einen großen Exponenten der Zeitbereich unmittelbar vor dem Simulationsende.

An dieser Stelle bleiben zwei Fragen offen:

1. Wie kann die hier berechnete Topologische Ableitung quantitativ überprüft werden?
2. Welchen Einfluss hat die Belastungsmodellierung auf die Topologische Ableitung?

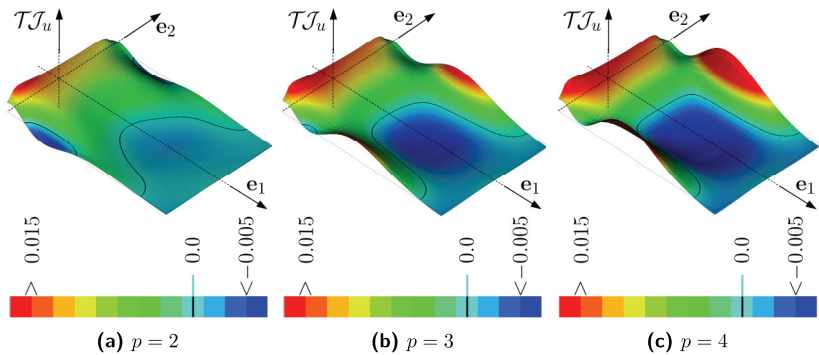


**Abbildung 6.33:** Topologische Sensitivität des Verschiebungsfunktional  
bei  $\mathbf{X}_* = (75.0, 0.0, 0.0)^T$  nach „erst differenzieren – dann diskretisieren“, 2. Lastfall (in  $\text{mm}^{-2}$ )



**Abbildung 6.34:** Topologische Sensitivität des Verschiebungsfunktional  
bei  $\mathbf{X}_* = (150.0, -37.5, 0.0)^T$  nach „erst differenzieren – dann diskretisieren“, 2. Lastfall  
(in  $\text{mm}^{-2}$ )

Eine quantitative Überprüfung von analytischen Sensitivitäten kann nur mit dem Differenzenquotienten erfolgen. Dabei werden die Entwurfsvariablen tatsächlich verändert und der Differenzenquotient zur ungestörten Strukturantwort mit der berechneten Sensitivität verglichen. Im Fall der Topologischen Ableitung ist dies eine Geometrieänderung durch Ausschneiden und Neuvernetzung. Der Differenzenquotient muss dann nach der Definition 4.1 ermittelt werden. Vor allem für die echte Geometrieänderung eignet sich die Modellierung mit Einzelkräften auf



**Abbildung 6.35:** Topologische Sensitivität des Verschiebungsfunktionals am Punkt  $\mathbf{X}_* = (150.0, -37.5, 0.0)^T$  nach „erst diskretisieren – dann differenzieren“, 2. Lastfall (in  $\text{mm}^{-2}$ )

Elementknoten mit vorgegebenen Kraftkurven nicht für die Überprüfung mit einem Differenzenquotienten, da hier keine feste Energie (als kinetische Energie beispielsweise) vorgegeben wird, die als innere Energie von der Struktur aufgenommen wird.

In zukünftigen Forschungen müssen daher physikalischere Modellierungen in Betracht gezogen werden, wie beispielsweise Impaktor-Belastungen, die den Charakter einer Crashbelastung bestimmen. Dazu ist die Einbindung von Kontakt in der Sensitivitätenberechnung unumgänglich.

## 6.3 Ergebniszusammenfassung

In diesem Kapitel wurde zunächst der Grenzübergang der nichtlinear transienten Topologischen Ableitung zur linear elastischen Topologischen Ableitung geprüft. Im ersten Beispiel wurde ein elastischer Euler-Bernoulli-Balken rein analytisch untersucht, eine zeitliche Diskretisierung war zur Lösung nicht erforderlich. Auch die Adjungierte kann in diesem Fall für die innere Energie analytisch bestimmt werden, da die Eigenschwingungsformen und -frequenzen des Balkens eine Lösung der adjungierten Gleichung ermöglichen. Solange die Berechnung des originären Lastfalls ohne Trägheitseffekte und mit einem langsamen Belastungsanstieg durchgeführt wird, kann die nichtlineare Topologische Ableitung der inneren Energie auf die lineare Topologische Ableitung zurückgeführt werden. Unter quasistatischer



Belastung aber dynamischer Berechnung unter Berücksichtigung der Trägheitseffekte konnte die Topologische Ableitung nicht mehr auf die linear elastische Lösung zurückgeführt werden, da bereits bei der Belastung des Balkens eine - wenn auch minimale - Schwingung der Verschiebung vorliegt. Es ergibt sich abhängig vom Endzeitpunkt der Berechnung ein Störfaktor in der Topologischen Ableitung, dessen Interpretation und physikalische Ursache nicht abschließend geklärt ist. Ob dieser Störfaktor bei anderen Funktionalen als der inneren Energie oder bei komplexeren Verformungen auch auftritt, bleibt für zukünftige Untersuchungen offen.

Am Beispiel eines Kragträgers unter hochdynamischer Belastung wurden sowohl die innere Energie als auch das Verschiebungsfunktional ausgewertet. Abhängig vom Ort der Belastung stellte sich eine qualitative Änderung der Topologischen Ableitung ein. Die Ergebnisse der adjungierten Lösungsschemata unterscheiden sich dabei zwar quantitativ, aber nicht qualitativ. Die Sensitivität für das Verschiebungsfunktional wurde für zwei Punkte ausgewertet, um beurteilen zu können, ob die Sensitivitäten eine Entkoppelung von Krafteinleitung und Ort der Einzelpunktverschiebung anzeigen können. Die Ergebnisse lassen eine Interpretation der tragenden Struktur zu, die vom Lastpfad der Krafteinleitung unabhängig ist.

Die Schwingungen insbesondere der Adjungierten machen eine Berechnung des Lastfalls in kleinen Zeitschritten nötig, so dass der Vorteil größerer Zeitschritte bei der impliziten Zeitintegration nicht mehr ausgenutzt werden kann.

# 7 Zusammenfassung und Ausblick

Für die Topologische Ableitung bei nichtlinearem Materialverhalten und großen transienten Deformationen und Verzerrungen kann die vorliegende Dissertation wesentliche Einblicke in die Besonderheiten bei der Berechnung mithilfe der adjungierten Methode geben.

## 7.1 Ergebnisübersicht

Die Topologische Ableitung eines Punktes ist die Sensitivität, die beschreibt, wie sich ein Funktional ändert, wenn an diesem Punkt in den mechanischen Körper eine infinitesimale Aussparung eingebracht wird. Wie in der linearen Theorie bereits üblich, wird sie mithilfe der Formableitung ausgedrückt. Es wird physikalisch keine Aussparung eingebracht, sondern fiktiv betrachtet, wie ein Loch das strukturelle Verhalten beeinflussen würde.

Mit der adjungierten Methode wird zunächst allgemein das Funktional um die mechanischen Gleichgewichtsbedingungen samt Lagrange-Multiplikator erweitert, der auch Adjungierte genannt wird. Um die direkte Ableitung der Verschiebungen nach dem Dimensionierungsparameter der Aussparung zu vermeiden, wird für die Adjungierte eine spezielle Lösung gefordert. Es entstehen, in Abhängigkeit der Reihenfolge von zeitlicher Diskretisierung und Differenziation, zwei Lösungsschemata. In beiden Fällen entsteht ein Randwertproblem mit Endwertbedingungen, das vom Endwert her rückwärts gelöst wird und in jedem Zeitschritt linear in der Massenmatrix und der tangentialen Steifigkeitsmatrix des Systems ist, auch wenn das Materialverhalten im Crash selbst nichtlinear ist. Für die adjungierte Methode wird schon berücksichtigt, dass zukünftig sowohl die Sensitivitäten von Funktionalen mit Verschiebungs- und Geschwindigkeitsabhängigkeit als auch mit Beschleunigungsabhängigkeit berechnet werden können.

Die Integrale auf dem fiktiven Aussparungsrand, der durch die Berechnung der Topologischen Ableitung mit der materiellen Methode entsteht, lassen sich unter nichtlinearem Materialverhalten nicht so auflösen, wie dies bei linear elastischem Materialverhalten noch möglich ist. Es bedarf hier einer numerischen Näherung. Diese wird für alle Randintegrale mit einer Interpolation des elasto-plastischen Materialverhaltens und im Speziellen für die Schalenmodellierung entwickelt. Die Auswertung der Randintegrale erfolgt konkret für die innere Energie und für die Verschiebung eines Einzelpunktes. Die beiden Funktionale sollen kombiniert klassische Craschanforderungen wie minimale Beschleunigung des Fahrzeuginsassen beim Aufprall und Sicherung des Überlebensraums bedienen. Soll das Volumen oder die Masse eines Körpers in der Optimierung berücksichtigt werden, ist deren Topologische Ableitung im gesamten Körper gleich. Daher wird keine weitere Berechnung benötigt.

Für die Berechnung der Topologischen Ableitung ergibt sich ein nacheinander folgender Ablauf, bei dem zuerst das Anfangsrandwertproblem des Crash-Lastfalls berechnet werden muss. Anschließend wird das Endwertproblem mit einem der beiden adjungierten Lösungsschemata beginnend mit den Endwerten gelöst. Die Berechnung der Adjungierten ist durch die temporäre Linearität der Steifigkeit weniger komplex als die Crashsimulation. Die Auswertung der Randintegrale vervollständigt die Topologische Ableitung. Diese Auswertung kann parallel für alle finiten Elemente durchgeführt werden. Da alle Integrationspunkte der Elemente zu allen Zeitpunkten der Zeitintegration ausgewertet werden, steigt die Gesamtberechnungsdauer für die Topologische Ableitung aller Punkte eines Körpers zusätzlich um eine weitere Berechnung von etwa dem Umfang der Crashberechnung. Bei der Auswertung mehrerer Funktionale ist trotzdem nur eine zusätzliche Endwertrechnung notwendig, lediglich der Aufwand für die Auswertung auf Elementebene summiert sich über die Funktionale.

Anhand zweier akademischer Beispiele wurde die entwickelte Berechnungsmethode inhärent plausibilisiert. Mit dem Balken-Beispiel konnten die Schwingungen der Adjungierten im Eigenfrequenzbereich begreifbar gemacht werden. Selbst für einfache Belastungen ist deshalb die Lösung des Anfangsrandwertproblems mit impliziter Zeitintegration mit so kleinen Zeitschritten nötig, die sonst nur bei expliziter Zeitintegration gefordert sind. Quasistatisch mit einer langsam gesteigerten Einzelkraft geht die Topologische Ableitung des Balkens für einen großen Belastungszeitraum in die lineare Topologische Ableitung ohne transiente Betrachtung über. Sobald die Trägheitseffekte in die Berechnung einbezogen werden, entsteht auch bei der linearen Belastung schon eine Schwingung, die bei der Integration mit der schwingenden Adjungierten im ungünstigsten Fall der Belastungsdauer

eine Umkehr der hoch und niedrig sensitiven Bereiche des Balkens zur Folge hat. Die beiden adjungierten Lösungsschemata liefern dabei qualitativ gleichwertige Ergebnisse. Mithilfe des Kragträgers unter hochdynamischer Belastung konnte mit der Variation des Ortes der Belastung das Verschiebungsfunktional nachvollzogen werden. Liegt der Ort der zu messenden Einzelpunktverschiebung nahe der Kraftereinleitung, wird die Sensitivität maßgeblich durch den allgemeinen Lastpfad beeinflusst. Bei größeren Abständen zwischen Kraftereinleitung und Einzelpunkt kann die Sensitivität veränderte Trägerstrukturen aufzeigen. Die Grundlagenforschung für die Topologieoptimierung crashbelasteter Strukturen ist damit um einen wesentlichen Teil erweitert.

## 7.2 Diskussion und Verbesserungspotenzial der vereinfachenden Annahmen

Für die numerische Auswertung der Topologischen Ableitung wurden vereinfachende Annahmen getroffen, die zum Teil mit besserem Wissen über die Materialformulierung zukünftig ersetzt oder wenigstens verbessert werden können, ohne die Aktualität und Richtigkeit dieser Arbeit aufzuheben.

Dass die Anfangswerte des Anfangsrandwertproblems unabhängig von der Form des Körpers sind, ist eine haltbare Voraussetzung, da bei Crashtestprotokollen beispielsweise die Aufprallgeschwindigkeit festgelegt ist, unabhängig von der Bauweise des Fahrzeugs. Auch die Lage eines Anschraubpunktes der betrachteten Fahrzeugkomponente ändert sich nicht durch die Topologische Variation.

Die äußere Belastung wurde in dieser Arbeit noch als von der Verschiebung unabhängig vorausgesetzt. Das schließt Kontaktphänomene aus, denn die Kräfte, die durch Kontakt zu umgebenden Bauteilen oder Selbstkontakt entstehen, treten im Allgemeinen erst mit der Verformung auf. Hier kann die Arbeit von der Forschung zu den Dichtemethoden profitieren und erweitert werden.

Für die Berechnung der Pseudolast der inneren Energie wurde die Zeitableitung des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors implizit über die Zeitableitung des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors berechnet. Diese Annahme kann durch spezifischere Formulierungen des Materialmodells ersetzt werden. Mit der Kenntnis der Spannungsrate in jedem Integrationspunkt kann auch die Annahme der Unabhängigkeit der Endspannung von der Verformungsgeschichte bei der Berechnung der expliziten Ableitung der inneren Energie durch ein Zeitintegral

ersetzt und die Ableitung genauer berechnet werden. Die Materialinterpolation für die Auswertung der Randintegrale beruht im Wesentlichen auf der Annahme temporär linear elastischen Materialverhaltens. Der Tangentenmodul wird dabei phänomenologisch aus der plastischen Dehnung ermittelt. Eine Verwendung des Tangentenmoduls, der bei der Crash-Berechnung tatsächlich verwendet wird, würde hier eine Unsicherheitsstelle eliminieren.

Die Auswertung der Randintegrale erfolgte gemischt mit den Spannungsgrößen der Momentankonfiguration, aber mangels genauer Kenntnis der durch die Verformung entstehenden Lochform, auf dem undeformierten Aussparungsrand in der Referenzkonfiguration. Eine Berechnung der Lochform durch die Integration der Dehnungen am Lochrand setzt allerdings die gleiche Kenntnis des Dehnungstensors am Lochrand voraus, die auch für die Spannungsberechnung benötigt wird. Für die Berechnung dieses Dehnungstensors wurde die vereinfachende Annahme getroffen, dass die linearen Formeln zur Spannungsberechnung am Lochrand basierend auf der Kirchhoffschen Plattentheorie und dem ebenen Spannungszustand superponiert gelten, aber mit dem temporären Tangentenmodul der Materialinterpolation. Diese Annahmen haben solange Bestand, bis eine Berechnung der Spannungen am Aussparungsrand auch bei plastischer Dehnung möglich ist. Die Spannungsberechnung auf dem Aussparungsrand in rein analytischer Form prognostizieren zu können, würde die Auswertung der Topologischen Ableitung verbessern. Als Vorstufe kann mit Hilfe einer Approximation eine bessere Abschätzung der Randintegrale in Abhängigkeit der makroskopischen Spannungen und Momente vorgenommen werden.

Durch die notwendig gewordenen kleinen Zeitschritte der Crashsimulation, muss zunächst die Datenschnittstelle zur Berechnungssoftware verbessert werden, um effizient die externen Daten lesen, schreiben und verarbeiten zu können. Nur dann kann die Untersuchung der Belastungsdauer für komplexere Beispiele erfolgen. Hier muss insbesondere bewertet werden, ob bei einem größeren Anteil plastischer Dehnungen in der Verformung die Abhängigkeit von der Länge des Belastungszeitraums weiterhin vorhanden ist. Zur Überprüfung müssen die Topologischen Ableitungen über den Differenzenquotient validiert werden.

Um die Akzeptanz der Verwendung der Topologischen Ableitung in der Optimierung crashbelasteter Strukturen zu erhöhen, ist zunächst die Behandlung von Kontaktphänomenen einzubauen, damit komplexe Verformungsbilder wie Faltenbeulen betrachtet werden können. Dann ist die Anwendung mit der Level-Set-Methode attraktiv für die praktische Anwendung.

# Literaturverzeichnis

- Alberty J, Carstensen C, Funken S, Klose R (2002) Matlab implementation of the finite element method in elasticity. *Computing* 69: 239–263
- Allaire G, Dapogny C, Frey P (2011) Topology and geometry optimization of elastic structures by exact deformation of simplicial mesh. *Comptes Rendus Mathematique* 349: 999–1003
- Allaire G, Jouve F, Toader AM (2004) Structural Optimization Using Sensitivity Analysis and a Level-set Method. *Journal of Computational Physics* 194: 363–393
- Altenbach H (2018) *Kontinuumsmechanik : Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. 4. Aufl. 2018. Springer Berlin Heidelberg, Imprint: Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg.
- Amstutz S, André H (2006) A new algorithm for topology optimization using a level-set method. *Journal of Computational Physics* 216: 573–588
- Amstutz S, Novotny AA (2010) Topological optimization of structures subject to Von Mises stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 41: 407–420
- Amstutz S, Novotny AA (2011) Topological asymptotic analysis of the Kirchhoff plate bending problem. *ESAIM. Control, Optimisation and Calculus of Variations* 17; 2011: 705–721
- Amstutz S, Takahashi T, Vexler B (2008) Topological sensitivity analysis for time-dependent problems. *ESAIM-Control Optimisation and Calculus of Variations* 14; Jg. 2008-09-01: 427–455
- Bandi P, Schmiedeler JP, Tovar A (2013) Design of Crashworthy Structures With Controlled Energy Absorption in the Hybrid Cellular Automaton Framework. *Journal of Mechanical Design* 135

- Bathe KJ (2002) *Finite-Elemente-Methoden*. 2., vollst. neu bearb. und erw. Aufl. Springer, Berlin u.a.
- Becker W, Gross D (2002) *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- Behnke H, Sommer F (1965) *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*. 3. Aufl. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Teil 77. Springer, Berlin u.a.
- Bendsøe MP (1989) Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 1; Jg. 1989-12-01: 193–202
- Bendsøe MP, Kikuchi N (1988) Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 71: 197–224
- Beyer F, Schneider D, Schumacher A (2021) Finding three-dimensional layouts for crashworthiness load cases using the graph and heuristic based topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 63: 59–73
- de Boer R (1982) *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer-Verlag, Berlin-New York.
- Bojczuk D, Mróz Z (2008) Topological sensitivity derivative and finite topology modifications: application to optimization of plates in bending. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 39: 1–15
- Bruns TE, Tortorelli DA (2001) Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190: 3443–3459
- Burger M, Haackl B, Ring W (2004) Incorporating topological derivatives into level set methods. *Journal of Computational Physics* 194: 344–362
- Céa J, Garreau S, Guillaume P, Masmoudi M (2000) The shape and topological optimizations connection. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 188: 713–726
- Cesàro E (1906) Sulle formole del volterra fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche. *Il Nuovo Cimento (1901-1910)* 12: 143–154

- Choi W, Park G (2002) Structural optimization using equivalent static loads at all time intervals. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191; Jg. 2002: 2105–2122
- Dahl J, Jensen JS, Sigmund O (2008) Topology optimization for transient wave propagation problems in one dimension. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 36: 585–595
- van Dijk NP, Maute K, Langelaar M, van Keulen F (2013) Level-set methods for structural topology optimization: a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 48: 437–472
- Dinkler D (2017) *Einführung in die Strukturmechanik: Modelle und Anwendungen*. 2. Aufl. 2017. Springer Fachmedien Wiesbaden, Imprint: Springer Vieweg, Wiesbaden.
- Duan X, Li F (2015) Material distribution resembled level set method for optimal shape design of Stokes flow. *Applied Mathematics and Computation* 266; Jg. 2015-09-01: 21–30
- Dvorkin EN, Bathe K (1984) A continuum mechanics based fournode shell element for general nonlinear analysis. *Engineering Computations* 1; Jg. 1984: 77–88
- Eschenauer HH, Kobelev VV, Schumacher A (1994) Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural Optimization* 8: 42–51
- Felger J, Becker W (2019) A closed-form analytical approach for stress concentrations at elliptical holes in moderately thick plates. *PAMM* 19
- Fernandez F, Puso MA, Solberg J, Tortorelli DA (2020) Topology optimization of multiple deformable bodies in contact with large deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 371
- Fernandez F, Tortorelli DA (2018) Semi-analytical sensitivity analysis for nonlinear transient problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 58: 2387–2410
- Forsberg J, Nilsson L (2007) Topology optimization in crashworthiness design. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 33: 1–12
- Forster O (2017a) *Analysis 2: Differentialrechnung im  $\mathbb{R}^n$* . Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Forster O (2017b) *Analysis 3: Maß- und Integrationstheorie, Integralsätze im  $\mathbb{R}^n$  und Anwendungen*. 8. Aufl. Springer Fachmedien Wiesbaden.



- Fries TP, Belytschko T (2010) The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 84: 253–304
- Gangl P, Amstutz S, Langer U (2015) Topology Optimization of Electric Motor Using Topological Derivative for Nonlinear Magnetostatics. *IEEE Transactions on Magnetics* 52
- Gasch R, Knothe K, Liebich R (2012) *Strukturodynamik: Diskrete Systeme und Kontinua*. 2. Aufl. 2012. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Giusti S, Sokołowski J, Stebel J (2015) On Topological Derivatives for Contact Problems in Elasticity. *Journal of Optimization Theory and Applications* 165: 279–294
- Gross D, Hauger W, Wriggers P (2018) *Technische Mechanik 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. 10. Aufl. 2018. Springer Berlin Heidelberg, Imprint: Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg.
- Gross D, Seelig T (2016) *Bruchmechanik: Mit einer Einführung in die Mikro-mechanik*. 6. Aufl. 2016. Springer Berlin Heidelberg, Imprint: Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg.
- Göllmann L (2020) *Lineare Algebra*. Springer Berlin Heidelberg.
- Hahn HG (1985) *Elastizitätstheorie: Grundlagen der linearen Theorie und Anwendungen auf eindimensionale, ebene und räumliche Probleme*. B.G. Teubner, Stuttgart.
- Harzheim L (2014) *Strukturoptimierung: Grundlagen und Anwendungen*. 2. Aufl. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten.
- Hassani B, Tavakkoli SM, Ghasemnejad H (2013) Simultaneous shape and topology optimization of shell structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 48: 221–233
- Hinze M, Pinnau R, Ulbrich M, Ulbrich S (2009) *Optimization with PDE Constraints*. Springer Science + Business Media B.V.
- Hoffmann M, Seeger T (1985a) A Generalized Method for Estimating Multiaxial Elastic-Plastic Notch Stresses and Strains, Part 1: Theory. *Journal of Engineering Materials and Technology* 107; 1985: 250–254

- Hoffmann M, Seeger T (1985b) A Generalized Method for Estimating Multiaxial Elastic-Plastic Notch Stresses and Strains, Part 2: Application and General Discussion. *Journal of Engineering Materials and Technology* 107; Jg. 1985-10-01: 255–260
- Hoffmann M, Seeger T (1989) Estimating Multiaxial Elastic-Plastic Notch Stresses and Strains in Combined Loading. *Biaxial and Multiaxial Fatigue*: 3–23
- Huang X, Xie YM, Lu G (2007) Topology optimization of energy-absorbing structures. *International Journal of Crashworthiness* 12: 663–675
- Hunkeler S (2013) Topology Optimisation in Crashworthiness Design via Hybrid Cellular Automata for Thin Walled Structures. Diss. School of Engineering and Materials Science, Queen Mary University of London.
- Il'in M (1992) *Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems*. Bd. 102. Translations of Mathematical Monographs. AMS, Providence.
- Ivarsson N, Wallin M, Tortorelli DA (2018) Topology optimization of finite strain viscoplastic systems under transient loads. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 114: 1351–1367
- Jensen JS, Nakshatrala PB, Tortorelli DA (2014) On the consistency of adjoint sensitivity analysis for structural optimization of linear dynamic problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 49: 831–837
- Jung D, Gea HC (2004) Topology optimization of nonlinear structures. *Finite Elements in Analysis and Design* 40: 1417–1427
- Lawry M, Maute K (2018) Level set shape and topology optimization of finite strain bilateral contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 113: 1340–1369
- Lopes CG, Novotny AA (2016) Topology design of compliant mechanisms with stress constraints based on the topological derivative concept. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 54: 737–746
- Lopes CG, dos Santos RB, Novotny AA, Sokołowski J (2017) Asymptotic analysis of variational inequalities with applications to optimum design in elasticity. *Asymptotic Analysis* 102: 227–242

- LSTC (2019) *LS-DYNA®Theory Manual*. r:10859. Dyna-Version 10.1. Livermore Software Technology Corporation. P. O. Box 712 Livermore, California 94551-0712.
- Magnus K, Popp K, Sextro W (2016) *Schwingungen: Grundlagen, Modelle, Beispiele*. 10. Aufl. 2016. Springer Fachmedien Wiesbaden, Imprint: Springer Vieweg, Wiesbaden.
- Maute K, Schwarz S, Ramm E (1998) Adaptive topology optimization of elastoplastic structures. *Structural Optimization* 15; Jg. 1998: 81–91
- Mayer RR, Kikuchi N, Scott RA (1996) Application Of Topological Optimization Techniques To Structural Crashworthiness. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39: 1383–1403
- Michaleris P, Tortorelli DA, Vidal CA (1994) Tangent operators and design sensitivity formulations for transient non-linear coupled problems with applications to elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37: 2471–2499
- Michels HH (1963) Abscissas and Weight Coefficients for Lobatto Quadrature. *Mathematics of Computation* 17: 237–244
- Neuber H (1961) Theory of Stress Concentration for Shear-Strained Prismatical Bodies With Arbitrary Nonlinear Stress-Strain Law. *Journal of Applied Mechanics* 28; Jg. 1961-12-01: 544–550
- Newmark NM (1959) A method of computation for structural dynamics. American Society of Civil Engineers
- Norato JA, Bendsøe MP, Haber RB, Tortorelli DA (2007) A topological derivative method for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 33: 375–386
- Novotny AA, Sokołowski J, Źochowski A (2019a) Topological Derivatives of Shape Functionals. Part I: Theory in Singularly Perturbed Geometrical Domains. *Journal of Optimization Theory and Applications* 180: 341–373
- Novotny AA, Sokołowski J, Źochowski A (2019b) Topological Derivatives of Shape Functionals. Part II: First-Order Method and Applications. *Journal of Optimization Theory and Applications* 180: 683–710

- Novotny AA, Sokołowski J, Żochowski A (2019c) Topological Derivatives of Shape Functionals. Part III: Second-Order Method and Applications. *Journal of Optimization Theory and Applications* 181: 1–22
- Novotny AA, Sokołowski J (2013) *Topological Derivatives in Shape Optimization*. Springer, Heidelberg.
- Novotny AA, Sokołowski J, Żochowski A (2019d) *Applications of the Topological Derivative Method*. 1. Aufl. Studies in Systems, Decision and Control. Springer, Cham.
- Olschinka C, Schumacher A (2008) Graph Based Topology Optimization of Crashworthiness Structures. *PAMM* 8: 10029–10032
- Ortmann C (2015) Entwicklung eines graphen- und heuristikbasierten Verfahrens zur Topologieoptimierung von Profilquerschnitten für Crashlastfälle. Diss. Bergische Universität Wuppertal, Shaker Verlag.
- Ortmann C, Schumacher A (2013) Graph and heuristic based topology optimization of crash loaded structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 47: 839–854
- Osher S, Sethian JA (1988) Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics* 79: 12–49
- Park GJ (2011) Technical overview of the equivalent static loads method for nonlinear static response structural optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 43: 319–337
- Patel NN, Kang BS, Renaud JE, Tovar A (2009) Crashworthiness Design Using Topology Optimization. *Journal of Mechanical Design* 131: 061013
- Pedersen C (2003) Topology optimization design of crushed 2D-frames for desired energy absorption history. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 25: 368–382
- Pedersen C (2004) Crashworthiness design of transient frame structures using topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193: 653–678

- Pereira C, Bittencourt M (2008) Topological sensitivity analysis in large deformation problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 37: 149–163
- Sawin GN (1956) *Spannungserhöhung am Rande von Löchern*. VEB Verlag Technik.
- Schumacher A (1995) Topologieoptimierung von Bauteilstrukturen unter Verwendung von Lochpositionierungskriterien. Diss. TIM-Forschungsberichte Nr. T09-01.96: Institut für Mechanik und Regelungstechnik, Universität Siegen.
- Schumacher A (2005) Parameter-based topology optimization for crashworthiness structures. In: *Proc. of the World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-6), Rio-de-Janeiro, Brazil, May 30 - June 3, 2005*.
- Schumacher A (2020) *Optimierung mechanischer Strukturen - Grundlagen und industrielle Anwendungen*. 3. Aufl. Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg.
- Seeger T, Heuler P (1980) Generalized Application of Neuber's Rule. *Journal of Testing and Evaluation* 8; 1980: 1–204
- Sokołowski J, Żochowski A (1999) On the Topological Derivative in Shape Optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization* 37(4): 1251–1272
- Sokołowski J, Zolesio JP (1992) *Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis*. Springer-Verlag GmbH, Berlin.
- Soto CA (2004) Structural topology optimization for crashworthiness. *International Journal of Crashworthiness* 9: 277–283
- Ulbrich M, Ulbrich S (2012) *Nichtlineare Optimierung*. Birkhäuser, Basel.
- Wagner M (2017) *Lineare und nichtlineare FEM: Eine Einführung mit Anwendungen in der Umformsimulation mit LS-DYNA®*. Springer Fachmedien Wiesbaden, Imprint: Springer Vieweg, Wiesbaden.
- Wallin M, Ivarsson N, Tortorelli DA (2018) Stiffness optimization of non-linear elastic structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 330: 292–307
- Wallin M, Jönsson V, Wingren E (2016) Topology optimization based on finite strain plasticity. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 54: 783–793

- Weider K, Marschner A, Schumacher A (2017) A Systematic Study on Topology Optimization of Crash Loaded Structures using LS-TaSC. In: *Proceedings of the 11th European LS-DYNA Conference 2017, Salzburg, Austria*.
- Weider K, Schumacher A (2016) On the calculation of Topological Derivatives considering an exemplary nonlinear material model. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 16: 717–718
- Weider K, Schumacher A (2018) A Topology Optimization Scheme for Crash Loaded Structures Using Topological Derivatives. In: *Advances in Structural and Multidisciplinary Optimization*. Hrsg. von A Schumacher, T Vietor, S Fiebig, KU Bletzinger, K Maute. Springer International Publishing, Cham: 1601–1614.
- Weider K, Schumacher A (2019) Adjoint Method for Topological Derivatives for Optimization Tasks with Material and Geometrical Nonlinearities. In: *EngOpt 2018 Proceedings of the 6th International Conference on Engineering Optimization*. Hrsg. von H Rodrigues, J Herskovits, C Mota Soares, A Araújo, J Guedes, J Folgado, F Moleiro, JFA Madeira. Springer International Publishing, Cham: 867–878.
- Wriggers P (2001) *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer Berlin Heidelberg.

# Anhang A

## Softwaresachweis

---

Software	Vertreiberfirma
LS-Dyna®	Livermore Software Technology, LLC, 7374 Las Positas Road Livermore, California 94551 USA, <a href="http://www.lstc.com">www.lstc.com</a> , DYNAmore GmbH, Industriestraße 2, D-70565 Stuttgart, <a href="http://www.dynamore.de">www.dynamore.de</a>
LS-TaSC®	Livermore Software Technology, LLC, 7374 Las Positas Road Livermore, California 94551 USA, <a href="http://www.lstc.com">www.lstc.com</a> , DYNAmore GmbH, Industriestraße 2, D-70565 Stuttgart, <a href="http://www.dynamore.de">www.dynamore.de</a>
Genesis®	Vanderplaats Research & Development, Inc. 1767 S. 8 <sup>th</sup> Street, Suite 100, Colorado Springs, CO 80906, USA, <a href="http://www.vrand.com">www.vrand.com</a>
Numpy	NumFOCUS, Inc., P.O. Box 90596, Austin, TX 78709, USA
OptiStruct®	Altair Engineering GmbH, Calwer Straße 7, 71034 Böblingen, <a href="http://www.altair.de">www.altair.de</a>
Python	Python Software Foundation, 9450 SW Gemini Dr., ECM# 90772, Beaverton, OR 97008, USA
Radioss®	Altair Engineering GmbH, Calwer Straße 7, 71034 Böblingen, <a href="http://www.altair.de">www.altair.de</a>

---

# Anhang B

## Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

### B.1 Mehrfachintegration

Die beiden verwendeten Integrations-Transformationen in dieser Arbeit basieren auf mathematischem Grundwissen über Mehrfachintegration und sind der Standard-Lehrliteratur zur Analysis (*Analysis 3*, Forster 2017b) wörtlich entnommen.

Die erste Formel ist die bekannteste, da sie prinzipiell eine Erweiterung der Substitutionsregel der einfachen Integration ist. Die zweite Formel wird zur Integration über Untermannigfaltigkeiten benötigt. In dieser Arbeit ist das die Integration auf dem Referenzelement in der Methode der finiten Elemente für Schalen und bei den Integrationen auf dem Aussparungsrand.

#### B.1.1 Die Transformationsformel

*Schreibweise* (Funktionalmatrix). Seien  $U$  und  $V$  zwei offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ . Die Funktionalmatrix einer Abbildung  $\Phi : U \rightarrow V$  wird mit

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

bezeichnet.



**Satz.** Seien  $U, V$  offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  und  $\Phi : U \rightarrow V$  eine  $\mathcal{C}^1$ -invertierbare Abbildung<sup>1</sup>. Eine Funktion  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann über  $V$  integrierbar, wenn die Funktion  $(f \circ \Phi) |\det D\Phi| : U \rightarrow \mathbb{R}$  über  $U$  integrierbar ist und es gilt dann

$$\int_U f(\Phi(x)) |\det D\Phi(x)| \, d^n x = \int_V f(y) \, d^n y.$$

## B.1.2 Integration über Untermannigfaltigkeiten

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Es soll das Integral von  $f$  über  $M$  erklärt werden. Dies geschieht mittels Karten.

Sei zunächst vorausgesetzt, dass es eine Karte  $\varphi : T \rightarrow V \subset M$ , ( $T \subset \mathbb{R}^k$ , offen) von  $M$  gibt, so dass  $f|M \setminus V = 0$ . Es sei  $g$  die Gramsche Determinante bezüglich  $\varphi$ :

$$g(t) = \det \left( \mathbf{J}_t(\varphi)^T \mathbf{J}_t(\varphi) \right).$$

Dann heißt  $f$  *integrierbar* über  $M$ , falls die Funktion

$$t \mapsto f(\varphi(t)) \sqrt{g(t)}$$

über  $T$  integrierbar ist und man setzt

$$\int_M f(x) \, dS(x) := \int_T f(\varphi(t)) \sqrt{g(t)} \, d^k t.$$

Man nennt  $dS(x)$  das  $k$ -dimensionale Flächenelement.

Der Lochrand  $\partial c_r(\mathbf{X}_0)$  ist bei dünnen Bauteilen im Verhältnis zu der Räumlichen Ausdehnung eine zylindrische Ausstanzung. Die Integrationsfläche kann in Zylinderkoordinaten parametrisiert werden. Die Karte  $\Phi_Z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  und ihre Jacobimatrix sind gegeben durch

$$\Phi_Z(\varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{J}_{(\varphi, z)} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi & 0 \\ r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup>d. h. bijektiv und  $\Phi$  und  $\Phi^{-1}$  sind stetig differenzierbar

Die Gramsche Determinante der Karte ist  $\det \mathbf{J}_{(\varphi,z)}^T \mathbf{J}_{(\varphi,z)} = r^2$ . Die Zylindermantelfläche ist definiert als  $Z := \Phi\left((0, 2\pi) \times \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right)\right)$  und die Integration einer Funktion über der Zylindermantelfläche kann durch

$$\int_Z f(x) \, dS(x) = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(\Phi(\varphi, z)) r \, d\varphi \, dz$$

erfolgen. Ist insbesondere  $f = 1$ , so ist die Mantelfläche

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(\Phi(\varphi, z)) r \, d\varphi \, dz = 2\pi r h.$$

## B.2 Gaußscher Integralsatz

Der Gaußsche Integralsatz erlaubt, das Volumenintegral durch ein Oberflächenintegral zu ersetzen. Die folgende Formulierung des Satzes ist wörtlich dem Lehrbuch *Analysis 3* (Forster 2017a) entnommen:

**Satz.** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand,  $\nu : \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n$  das äußere Einheits-Normalenfeld und  $U \supset A$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\int_A \operatorname{div} F(x) \, d^n x = \int_{\partial A} F(x) \cdot \nu(x) \, dS(x).$$

*Bemerkung.* Der Gaußsche Integralsatz gilt auch noch, wenn der Rand von  $A$  nicht glatt ist, sondern niederdimensionale Singularitäten (Kanten, Ecken, etc.) hat und das Vektorfeld  $F$  nicht in einer vollen Umgebung von  $A$  stetig differenzierbar ist.

Daraus resultieren die Integrale für das Vektorfeld  $\mathbf{u}$  und für das Tensorfeld  $\mathbf{T}$  auf dem Rand des Körpers

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \operatorname{Div} \mathbf{u} \, d\Omega \quad \text{und} \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \operatorname{Div} \mathbf{T} \, d\Omega.$$

## B.3 Satz über die differenzierbare Abhängigkeit vom Parameter

Die Vertauschbarkeit von Differenziation und Integration wird mit dem Satz über die differenzierbare Abhängigkeit vom Parameter begründet. Der Satz für die

Mehrfachintegration ist dem Analysis-Lehrbuch *Analysis 3* Forster 2017b wörtlich entnommen.

**Satz.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $I \subset \mathbb{R}$  ein nicht-entartetes Intervall. Weiter sei

$$f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, t) \mapsto f(x, t),$$

eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- Für jedes feste  $t \in I$  ist die Funktion  $x \mapsto f(x, t)$   $\mu$ -integrierbar auf  $\Omega$ .
- Für jedes feste  $x \in \Omega$  ist die Funktion  $t \mapsto f(x, t)$  differenzierbar in  $I$ .
- Es gibt eine integrierbare Funktion  $F : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  mit

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq F(x) \quad \text{für alle } (x, t) \in \Omega \times I.$$

Dann ist die durch

$$g(t) := \int_{\Omega} f(x, t) \, d\mu(x)$$

definierte Funktion  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Für jedes feste  $t \in I$  ist die Funktion  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$  über  $\Omega$  integrierbar und es gilt

$$g'(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, d\mu(x).$$

## B.4 Integrale über Nullmengen

Die Definition und der folgende Satz sind wörtlich dem Lehrbuch *Analysis 3* von Forster 2017b entnommen:

**Definition.** Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  das zugehörige äußere Maß. Eine Teilmenge  $S \subset \Omega$  heißt  $\mu$ -Nullmenge, falls  $\mu^*(S) = 0$ . Im Falle des Lebesgueschen Maßes spricht man von Lebesgue-Nullmengen.

**Satz.** Eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann eine Lebesguesche Nullmenge, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Folge  $W_k, k \geq 1$ , von kompakten Würfeln  $W_k \subset \mathbb{R}^n$  gibt mit

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \text{Vol}_n(W_k) < \varepsilon.$$

Die Folgerungen für die Integration auf Nullmengen sind dem Vorlesungsskript *Mehrfachintegration* von Steffen Roch<sup>2</sup> wörtlich entnommen.

**Folgerungen.**

- Ist  $f$  messbar und  $\mu(E) = 0$ , so ist  $\int_E f \, d\mu = 0$ .
- Sind  $A \subseteq B$  messbare Mengen mit  $\mu(B \setminus A) = 0$  und ist  $f$  Lebesgue-integrierbar, so ist

$$\int_A f \, d\mu = \int_B f \, d\mu.$$

---

<sup>2</sup>Sommersemester 2007, Technische Universität Darmstadt, Vorlesung *Mehrfachintegration*, [https://www.mathematik.tu-darmstadt.de/media/analysis/lehmaterial\\_anapde/roch/integrat.pdf](https://www.mathematik.tu-darmstadt.de/media/analysis/lehmaterial_anapde/roch/integrat.pdf), Aufruf am 31.03.21





