

Entwicklung einer Optimierungsmethodik für die Form- und Topologieoptimierung von tiefziehbaren Blechstrukturen

Dissertation
zur Erlangung eines Doktorgrades

in der
Fakultät für Maschinenbau und Sicherheitstechnik
der
Bergischen Universität Wuppertal



vorgelegt von
Robert Dienemann
aus Weimar

Wuppertal 2018

Tag der mündlichen Prüfung: 27.08.2018

Robert Dienemann

Entwicklung einer Optimierungsmethodik für die Form- und Topologieoptimierung von tiefziehbaren Blechstrukturen

Dissertation, Bergische Universität Wuppertal,
Fakultät für Maschinenbau und Sicherheitstechnik,
Lehrstuhl für Optimierung mechanischer Strukturen, April 2018

Kurzfassung

Blechbauteile sind häufig genutzte Leichtbaustrukturen, die in der Großserienfertigung geringe Herstellungskosten verursachen. Die möglichst gute Auslegung von Blechstrukturen umfasst die mechanischen Anforderungen bei vorgegebenen Lastfällen als auch die Anforderungen des Fertigungsverfahrens.

Die Strukturoptimierung ist ein Werkzeug, um Bauteile iterativ zu verbessern. Dabei werden Strukturberechnungen durchgeführt und anhand des Bauteilverhaltens wird die Struktur geändert. Dies geschieht so lange bis keine signifikante Verbesserung mehr erwartet wird.

In dieser Dissertation werden Werkzeuge der Topologieoptimierung genutzt. Die Topologieoptimierung ist eine Art der Strukturoptimierung, die das Entstehen oder Verschwinden von Löchern in der Struktur zulässt. Damit werden gleichzeitig die Topologie und die Form von Bauteilen optimiert, sodass beliebig komplexe Strukturen entstehen. Um Blechbauteile zu erhalten, werden neue Fertigungsrestriktionen in die Topologieoptimierung integriert. Diese erlauben die Optimierung von Blechbauteilen, die durch einstufiges Tiefziehen bei Raumtemperatur hergestellt werden.

Als Ansatz für die Topologieoptimierung wird die Dichtemethode gewählt, die Bauteile anhand von Sensitivitäten verbessert. Diese Methode wird zunächst so erweitert, dass möglichst viele mechanische Anforderungen (Masse, Steifigkeit, Festigkeit, Eigenfrequenz, Beulen etc.) in der Optimierung berücksichtigt werden können. Anschließend wird eine Fertigungsrestriktion für Blechstrukturen ohne Hinterschnitte vorgestellt, die Sensitivitäten der Zielfunktion in Elementen manipuliert, wenn diese Elemente weit von der aktuellen Mittelfläche entfernt sind. Weiterhin werden Fertigungsrestriktionen für minimale Umformradien und für Vermeidung von Reißen während des Tiefziehens implementiert. Dazu wird zusätzlich zur Strukturberechnung mit den vorgegebenen Lastfällen eine Tiefziehsimulation durchgeführt. Deren Ergebnisse werden zur Glättung der Mittelfläche an kritischen Stellen genutzt. Diese Fertigungsrestriktionen werden als Heuristiken umgesetzt.

Stichworte: Topologieoptimierung, Fertigungsrestriktion, Dichtemethode, Bleche, Tiefziehen, Statik, Eigenwertprobleme

Robert Dienemann

Development of an optimization scheme for shape and topology optimization of deep drawable sheet metal constructions

PhD thesis, University of Wuppertal, School of Mechanical Engineering and Safety Engineering, Chair for Optimization of Mechanical Structures, April 2018

Abstract

Sheet metal parts are commonly applied lightweight structures incurring low manufacturing costs in mass production. A good design of sheet metal structures covers the mechanical requirements at prescribed load cases and the requirements of the manufacturing process.

Structural optimization is a tool for iterative improvement of components. Structural calculations are performed and the structure is adopted based on the component's performance. This loop is processed until no more significant improvement is expected.

In this thesis, tools for topology optimization are utilized. Topology optimization is a type of structural optimization allowing for holes to occur or vanish. Thereby the topology and the shape of components are optimized, so that any complex structure can emerge. To obtain sheet metal parts, new manufacturing constraints are implemented in the topology optimization. They allow for the optimization of sheet metal parts, which are manufactured by single-step deep drawing at room temperature.

The density method is chosen as approach for the topology optimization. It improves components according to their sensitivities. First this method is extended, so that numerous structural responses (mass, stiffness, strength, eigenfrequency, buckling etc.) can be addressed during the optimization. Afterwards a manufacturing constraint for sheet metal structures without undercuts is introduced. Thereby the sensitivities of the objective function are manipulated for elements that are far away from the current mid surface. Furthermore, manufacturing constraints for minimal draw radii and for the prevention of tearing during the deep drawing are implemented. In addition to the structural calculation with the prescribed load cases, a deep drawing simulation is performed. Its results are used to smooth the mid surface in critical areas. These manufacturing constraints are realized as heuristics.

Keywords: Topology Optimization, Manufacturing Constraint, Density Method, Sheet Metal, Deep Drawing, Statics, Eigenvalue Problems

Vorwort und Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Optimierung mechanischer Strukturen an der Bergischen Universität Wuppertal.

Ich möchte allen Kollegen und Freunden danken, die mich während meiner Doktoranden-Zeit unterstützt und begleitet haben.

Besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. Axel Schumacher. Danke für deine Anregungen, kritischen Fragen und dass du mich stets mit Rat und Tat sowie Kontakten unterstützt hast und dabei den nötigen kreativen Freiraum gelassen hast.

Prof. Dr.-Ing. Thomas Vietor von der TU Braunschweig möchte ich herzlich für die Übernahme des Zweitgutachtens danken.

Dr.-Ing. Sierk Fiebig und Thilo Franke vom Kompetenz-Center Fahrwerk der Volkswagen Komponente Braunschweig danke ich für die gute Zusammenarbeit und für Anregungen aus der Entwicklung realer Blechbauteile. Für die Einblicke in die Tiefziehsimulation und deren Anforderungen danke ich Thomas Diederich vom Werkzeugbau der Volkswagen Komponente Braunschweig.

Für die Unterstützung bei der Einbeziehung von OptiStruct[®] in die Topologieoptimierung unter Berücksichtigung des Beulens möchte ich Kristian Holm von Altair Engineering meinen Dank aussprechen.

Die Kooperation mit Armin Geiser von der TU München ermöglichte den Vergleich der Methodiken zur Schalenoptimierung.

Meinen Kollegen am Lehrstuhl möchte ich für die freundschaftliche Arbeitsumgebung, die Hilfsbereitschaft sowie die vielen wissenschaftlichen Diskussionen danken. Insbesondere meine Bürokollegin Katrin Weider hat regelmäßig den Frust über Programmierfehler oder die Freude über Erfolgserlebnisse mit mir geteilt.

Den Kollegen aus der Doktorandenrunde möchte ich für die vielen fruchtbaren Diskussionen bedanken, insbesondere bei Niklas Klinke, der die Problematik des Tiefziehens thematisch mit mir teilt.

Auch den Studenten Fabian Plate und Steffen Figge, die meine Arbeit im Rahmen von Projekt- und Abschlussarbeiten voranbrachten, gebührt ein Dankeschön.

Für die umfassende Unterstützung während meiner Studienzeit danke ich besonders herzlich meinen Eltern. Auch während der Promotionszeit waren Sie und Nina eine unverzichtbare Stütze.

Wuppertal im April 2018

Robert Dienemann

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis	IV
1 Einleitung	1
1.1 Problemstellung und Motivation	1
1.2 Optimierungsansatz und Aufbau der Dissertation	3
2 Struktursimulation und -optimierung von Schalenbauteilen	5
2.1 Herausforderung bei der Optimierung von tiefziehbaren Schalenstrukturen	5
2.1.1 Auslegungskriterien	5
2.1.2 Fertigungsverfahren Tiefziehen	7
2.1.3 Berücksichtigung der Fertigung in der Optimierung	10
2.2 Grundlagen der Struktursimulation	11
2.2.1 Simulation des linearen Strukturverhaltens	11
2.2.2 Verwendung von Schalenelementen	15
2.2.3 Simulation des Tiefziehens	19
2.3 Grundlagen der Strukturoptimierung	23
2.3.1 Begriffsdefinitionen	23
2.3.2 Arten der Strukturoptimierung	26
2.3.3 Einordnung von Optimierungsalgorithmen	28
2.3.4 Topologieoptimierungsverfahren	31
2.4 Stand der Technik zur Optimierung von tiefziehbaren Schalenstrukturen	36
2.4.1 Formoptimierung	37
2.4.2 Topologie- und Formoptimierung mit Schalenansatz	39
2.4.3 Topologie- und Formoptimierung für Schalenstrukturen mit der Dichtemethode auf einem Volumennetz	40
3 Grundlagen der Dichtemethode zur Topologieoptimierung	41
3.1 Elementdichten	41
3.2 Optimierungsablauf	42
3.3 Materialinterpolationen	43
3.3.1 SIMP	44
3.3.2 RAMP	45

3.4	Entwurfsvariablen und Filtertechniken	46
3.4.1	Sensitivitätenfilter	46
3.4.2	Dichtefilter	47
3.4.3	Projektionsfilter	48
3.5	Optimierungsalgorithmus	49
3.5.1	Method of Moving Asymptotes	49
3.5.2	Duale Optimierung	50
3.6	Konvergenzkriterien	51
3.7	Grundlegende Struktureigenschaften und Sensitivitäten	52
3.7.1	Volumen	52
3.7.2	Volumenfüllung	52
3.7.3	Masse	53
3.7.4	Compliance	53
3.7.5	Knotenverschiebung	58
3.8	Continuation Method	59
4	Erweiterungen der Dichtemethode um zusätzliche Struktureigenschaften	61
4.1	Vergleichsspannung	61
4.2	Eigenfrequenz	65
4.3	Beulen	67
5	Dichtemethode für Schalenstrukturen ohne Hinterschnitte	71
5.1	Fertigungsrestriktion für Schalenstrukturen ohne Hinterschnitte .	71
5.1.1	Ziele der Fertigungsrestriktion	71
5.1.2	Berechnung der Mittelfläche	72
5.1.3	Bestrafung der Sensitivitäten der Zielfunktion weit entfernt von der Mittelfläche	73
5.1.4	Maßnahmen zur verbesserten Konvergenz	75
5.1.5	Optimierungsablauf mit Fertigungsrestriktion für Schalen- strukturen ohne Hinterschnitte	76
5.2	Zweischalige Strukturen	80
5.2.1	Multimaterial-Ansatz	81
5.2.2	Anwendung des Multimaterial-Ansatzes auf zweischalige Strukturen	82

6	Berücksichtigung der Tiefziehbarkeit während der Optimierung	85
6.1	Reihenfolge der Fertigungsschritte	85
6.2	Berücksichtigung minimaler Umformradien	87
6.3	Berücksichtigung von Herstellungsfehlern mittels Umformsimulationen	93
6.3.1	Automatisierung der Umformsimulation	93
6.3.2	Mapping von Ergebnissen der Umformsimulation	93
6.3.3	Heuristik für die Sicherstellung der Herstellbarkeit	94
7	Erhöhung der Effizienz des Optimierungsalgorithmus	99
7.1	Elementdeaktivierung für Verkürzung der FE-Simulationszeit . . .	99
7.2	Aktive Steuerung der Schalenmittelfläche für schnellere Konvergenz	102
8	Praktische Anwendungen	103
8.1	Kragbalken	103
8.1.1	Netzkonvergenzstudie	104
8.1.2	Netz- und Strukturverfeinerung	105
8.1.3	Wandstärkenvariation	107
8.1.4	Variation der Stempelrichtung	110
8.1.5	Variation der Optimierungsaufgabe	113
8.2	Quadratische Platte	115
8.2.1	Ohne Fertigungsrestriktion	116
8.2.2	Mit Fertigungsrestriktion für Schalenstruktur	116
8.2.3	Mit Berücksichtigung minimaler Umformradien	117
8.2.4	Mit Berücksichtigung der Risskriterien	118
8.2.5	Vergleich mit Ergebnissen der Formoptimierung	118
8.3	Querlenker	121
8.3.1	Ohne Fertigungsrestriktion	124
8.3.2	Mit Fertigungsrestriktion für Schalenstruktur	126
9	Zusammenfassung und Ausblick	129
	Literaturverzeichnis	131

Anhang

A Herleitung der Sensitivitäten	138
A.1 Compliance	138
A.2 Knotenverschiebung	139
A.3 Vergleichsspannung	140
A.4 Eigenfrequenz	142
A.5 Beulen	143
B Sensitivitäten für Level-Set-Optimierung	145

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

Abkürzungen

BESO	Bi-directional Evolutionary Structural Optimization
CAD	Computer Aided Design
CM	Continuation Method
CPU	Central Processing Unit (Prozessor)
ESO	Evolutionary Structural Optimization
FE	Finite Elemente
FEA	Finite-Elemente-Analyse
FEM	Finite-Elemente-Methode
FET	Finite Element based Topology optimization
FLC	Forming Limit Curve (Grenzformänderungskurve)
FLD	Forming Limit Diagramm (Formänderungsschaubild)
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
MMA	Method of Moving Asymptotes
MMO	Multi-Material-Optimierung
NURB	Non-uniform rational B-Splines
PA	Polyamid
RAMP	Rational Approximation of Material Properties
SIMP	Solid Isotropic Material with Penalization of intermediate densities
SLP	Sequential Linear Programming
SW	Schrittweite
VMM	Vertex Morphing Method

Operatoren

Symbol	Bedeutung
x	Skalar
\mathbf{x}	Vektor (Spaltenvektor), \mathbf{x}^T ist der zugehörige Zeilenvektor
x_i	i -te Komponente des Vektors \mathbf{x}
$ \mathbf{x} $	Betrag des Vektors \mathbf{x} , $ \mathbf{x} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$
$ \Omega $	n -dimensionales Volumen des Gebiets Ω
\mathbf{X}	Matrix
\mathbf{X}^{-1}	Inverse der Matrix
\mathbf{X}^T	Transponierte der Matrix
$\frac{\partial f}{\partial x}$	partielle Ableitung der Funktion f nach dem Skalar x
\bar{f}	Näherung der Funktion f
\otimes	dyadisches Produkt
∇	Nabla-Operator $\nabla^T = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} \right]$
$\int_A f da$	Integral über Fläche A , in kartesischen Koordinaten $\int_A f da = \iint_A f dx dy$
$\int_V f dv$	Integral über Volumen V , in kartesischen Koordinaten $\int_V f dv = \iiint_V f dx dy dz$

Mengenlehre

\setminus	$A \setminus B$: Differenz der Mengen A und B
\in	$i \in A$: das Element i ist in der Menge A enthalten
\notin	$i \notin A$: das Element i ist nicht in der Menge A enthalten
\forall	$\forall i \in A$: für alle Elemente i in der Menge A

Lateinische Zeichen

Symbol	Bedeutung	Einheit
a	Diskretheit der Bestrafungsfunktion für Fertigungsrestriktion	-
\mathbf{A}_{Ei}	Assemblierungsmatrix von Element i , $\mathbf{u}_{Ei} = \mathbf{A}_{Ei}\mathbf{u}$	-
b	Schalendicke	mm
b_c	aktuelle Zielwandstärke für Fertigungsrestriktion	mm
b_f	finale Zielwandstärke für Fertigungsrestriktion	mm
\mathbf{B}	Dehnungs-Verschiebungs-Matrix: $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{N}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{Ei} = \mathbf{B}\mathbf{u}_{Ei}$	mm^{-1}
$B_{\rho T}$	Aussparung vom Radius ρ_T	
c	Compliance (mittlere Nachgiebigkeit), identisch mit der Formänderungsenergie	Nmm
\mathbf{C}	Ableitungen der Ansatzfunktionen $\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \end{bmatrix}$	mm^{-1}
c_s	Faktor für Unterschied zwischen Spannungskriterium und maximaler Vergleichsspannung	-
c_{ti}	Risskriterium	-
d	aktuelle Iteration	-
\mathbf{D}	Matrixdifferentialoperator: $\mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}$	mm^{-1}
d_i	kürzester Abstand des Mittelpunkts des Elements i von der Schalenmittelfläche	mm
\mathbf{E}	Elastizitätsmatrix	MPa
\mathbf{E}_{Ei}	Elastizitätsmatrix in Element i : $\boldsymbol{\sigma}_{Ei} = \mathbf{E}_{Ei}\boldsymbol{\varepsilon}_{Ei}$	MPa
\mathbf{e}_i	Einheitsvektor mit einzigem Eintrag in Komponente i	-
E_{Ei}	Elastizitätsmodul des Elements i	MPa
E_{Gi}	Elastizitätsmodul des Elements i für die geometrische Steifigkeitsmatrix	MPa
E_{Ki}	Elastizitätsmodul des Elements i für die lineare Steifigkeitsmatrix	MPa
E_{0i}	Elastizitätsmodul des Grundmaterials von Element i	MPa
E_{min}	minimal zulässiger Elastizitätsmodul	MPa

Symbol	Bedeutung	Einheit
f	Zielfunktion	
$\frac{\partial f'}{\partial x_i}$	bestrafte Sensitivität der Zielfunktion f für Fertigungsrestriktion	
f_i	i -te Eigenfrequenz	Hz
\mathbf{F}	Plattensteifigkeiten: \mathbf{F}_1 für Biegung, \mathbf{F}_2 für Schub	
\mathbf{g}	Vektor der Ungleichheitsrestriktionen	
\mathbf{G}	geometrische Systemsteifigkeitsmatrix	Nmm ⁻¹
\mathbf{G}_{Ei}	geometrische Elementsteifigkeitsmatrix von Element i (mit $\tilde{x}_i = 1$)	Nmm ⁻¹
\mathbf{h}	Vektor der Gleichheitsrestriktionen	
j	Faktor für die aktive Verlagerung der Mittelfläche	-
k	Spannungsexponent für Spannungskriterium σ_k bzw. Exponent für Eigenfrequenz- und Beulnormen	-
\mathbf{K}	lineare Systemsteifigkeitsmatrix	Nmm ⁻¹
\mathbf{K}_{Ei}	lineare Elementsteifigkeitsmatrix von Element i (mit $\tilde{x}_i = 1$)	Nmm ⁻¹
\mathbf{K}_{Ei}^G	lineare Elementsteifigkeitsmatrix von Element i (mit $\tilde{x}_i = 1$) im globalen Koordinatensystem, für Voxel gilt in dieser Arbeit $\mathbf{K}_{Ei}^G = \mathbf{K}_{Ei}$	Nmm ⁻¹
\mathcal{L}	Lagrangefunktion	
\mathbf{l}_A	untere Asymptoten für die Entwurfsvariablen	-
m	Masse des Designbereichs	t
m_i	Masse des Elements i	t
\mathbf{M}	Systemmassenmatrix	t
\mathbf{M}_{Ei}	Elementmassenmatrix von Element i (mit ρ_{0i})	t
\mathbf{M}_0	von-Mises-Verschiebungs-Matrix: $\sigma_{vM_i}^2 = \tilde{x}_i^{2s} \mathbf{u}_{Ei}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_{Ei}$, $\mathbf{M}_0 = (\mathbf{EB})^T \mathbf{VEB}$	N ² mm ⁻⁶
\mathbf{N}	Matrix der Ansatzfunktionen für Voxel: $\begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}^T = \mathbf{N} \mathbf{u}_{Ei}$	-
N_A	Anzahl der aktiven Designelemente	-
N_C	Anzahl an Elementen in einem der N_P Elementsets	-
N_D	Anzahl der Designelemente	-

Symbol	Bedeutung	Einheit
N_E	Anzahl der Elemente	-
N_G	Anzahl der Ungleichheitsrestriktionen	-
N_H	Anzahl der Gleichheitsrestriktionen	-
N_K	Anzahl der Knoten im FE-Modell	-
N_M	Anzahl an diskreten Materialien für Multimaterial-Ansatz	-
N_P	Anzahl an Elementsets, die in Stempelrichtung ausgeprägt sind, für Schalen-Fertigungsrestriktion in OptiStruct [®]	-
\mathbf{N}_R	Matrix der Ansatzfunktionen für Platte	-
N_S	Anzahl an Elementen in einer Spannungsnorm	-
\mathbf{N}_T	Matrix der Ansatzfunktionen für Scheibe	-
\mathbf{o}_i	Position des Mittelpunkts von Element i	mm
\mathbf{p}	Systemlastvektor $\mathbf{p}^T = [p_{1x} p_{1y} p_{1z} p_{2x} p_{2y} p_{2z} \dots p_{N_K z}]$	N
P_i	Bestrafungsfaktor der Sensitivität der Zielfunktion von Element i für die Fertigungsrestriktion	-
p_{fi}	Wert für Ableitung der MMA-Approximation der Zielfunktion nach der i -ten Entwurfsvariable	-
\mathbf{p}_{gi}	Vektor für Ableitung der MMA-Approximationen der Restriktionen nach der i -ten Entwurfsvariable	-
q	Spannungsrelaxationsexponent	-
q_{fi}	Wert für Ableitung der MMA-Approximation der Zielfunktion nach der i -ten Entwurfsvariable	-
\mathbf{q}_{gi}	Vektor für Ableitung der MMA-Approximationen der Restriktionen nach der i -ten Entwurfsvariable	-
R	Filterradius für Dichte-/Sensitivitätenfilter	mm
r_b	Basisfilterradius für Schalenglättung	mm
r_c	Umformradius	mm
r_f	Wert für Offset der MMA-Approximation der Zielfunktion	-
\mathbf{r}_g	Vektor für Offset der MMA-Approximationen der Restriktionen	-
r_r	Filterradius für Glättung der Filterradien für Schalenglättung	mm
\mathbf{r}_s	Filterradien für Schalenglättung	mm

Symbol	Bedeutung	Einheit
$\tilde{\mathbf{r}}_s$	gefilterte Filtrerradien für Schalenglättung	mm
s	Penaltyexponent	-
$t(i, j)$	Wichtungsfaktor für das Filtern	-
T_i	i -te Beulsicherheit	-
T_k	Norm aus Beulsicherheiten, Beulkriterium	-
\mathbf{u}	Systemverschiebungsvektor $\mathbf{u}^T = [u_{1x} \ u_{1y} \ u_{1z} \ u_{2x} \ u_{2y} \ u_{2z} \ \dots \ u_{N_{Kz}}]$	mm
\mathbf{u}_{Ei}	Elementverschiebungsvektor von Element i , Voxel: $\mathbf{u}_{Ei} = [u_{1x} \ u_{1y} \ u_{1z} \ u_{2x} \ u_{2y} \ u_{2z} \ \dots \ u_{8z}]^T$	mm
\mathbf{u}_A	obere Asymptoten für die Entwurfsvariablen	-
\mathbf{V}	von-Mises-Matrix: $\sigma_{vM_i}^2 = \boldsymbol{\sigma}_{Ei}^T \mathbf{V} \boldsymbol{\sigma}_{Ei}$, $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	-
v	gefülltes Volumen des Designbereichs	mm ³
v_i	gefülltes Volumen des Elements i	mm ³
v_{0i}	Grundvolumen des Elements i	mm ³
v_f	Volumenfüllung des Designbereichs	-
w	Elementkantenlänge der Voxel	mm
\mathbf{W}_{Ei}	Transformationsmatrix eines Elements i	-
\mathbf{x}	Vektor der Entwurfsvariablen, Ausnahme: bei Topologischer Ableitung ist \mathbf{x} eine Position	-
$\tilde{\mathbf{x}}$	allgemein: Strukturmodell, Dichtemethode: Vektor der Elementdichten, $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ ist das Mapping der Entwurfsvariablen auf das Strukturmodell	-
x_B	Parameter zur Verringerung des Einflusses von Elementen geringer Dichte auf die Beulmoden	-

Symbol	Bedeutung	Einheit
\mathbf{x}_{max}	maximaler Wert für die Entwurfsvariablen (außer für MMO alle $x_{max,i}$ gleich)	-
\mathbf{x}_{min}	minimaler Wert für die Entwurfsvariablen (außer für MMO alle $x_{min,i}$ gleich)	-
\tilde{x}_{min}	minimaler Wert der Elementdichten	-
\mathbf{x}_{Aj}	Entwurfsvariablen für Multimaterial-Ansatz: Materialanteil von Material j , $x_{Aj,i} = \frac{x_{Mj,i}}{x_{Fi}}$	-
\mathbf{x}_F	Entwurfsvariablen für Multimaterial-Ansatz: Füllung der Elemente, $\mathbf{x}_F = \sum_{j=1}^{N_M} \mathbf{x}_{Mj}$	-
\mathbf{x}_{Mj}	Vektor der Entwurfsvariablen für Material j	-
$\tilde{\mathbf{x}}_{Mj}$	Vektor der Elementdichten für Material j	-

Griechische Zeichen

Symbol	Bedeutung	Einheit
α_i	maximale Winkeldifferenz zwischen Nachbarelementen am Knoten i	°
α_{max}	maximal zulässige Winkeldifferenz zwischen zwei Nachbarelementen	°
α_s	Faktor aus Optimierungshistorie für c_s	-
β_i	maximal zulässige 1. Hauptdehnung $\varepsilon_{Hi,maxzul}$ bei gleichbleibender minimaler Hauptdehnung $\varepsilon_{Hi,min}$, dabei liegt $\varepsilon_{Hi,maxzul}$ auf der FLC	-
γ_0	Wert für Initialisierung der Asymptotenabstände δ_i	-
γ_i	Wert für Veränderung der Asymptotenabstände δ_i	-
γ_{dec}	Wert für Verringerung der Asymptotenabstände δ_i	-
γ_{inc}	Wert für Vergrößerung der Asymptotenabstände δ_i	-
Γ	Rand eines Gebietes	-
δ	Abstand der Asymptoten ($\mathbf{l}_A, \mathbf{u}_A$) zu den Entwurfsvariablen \mathbf{x}	-
Δ_{max}	maximale Änderung der Entwurfsvariablen pro Iteration	-
ϵ	Wert für Konvergenzkriterium	-
ε_{Ei}	Verzerrungen in Element i in Voigt'scher Notation $\varepsilon_{Ei}^T = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \varepsilon_{yz} \ \varepsilon_{xz} \ \varepsilon_{xy}]$	-
ε_{Hi}	Hauptdehnungen im Element i	-
ε_{pl}	plastische Dehnung	-
ζ	Richtung normal zur Stempelrichtung, in 3D gibt es zwei Richtungen normal zur Stempelrichtung: ζ_1, ζ_2	mm
ζ_m	Mittelflächenkoordinaten normal zur Stempelrichtung, in 3D gibt es zwei Koordinaten normal zur Stempelrichtung: ζ_{m_1} und ζ_{m_2}	mm
θ_i	Rotation um die Achse i	-
κ	adjungierter Zustandsvektor für adjungierte Sensitivitätsanalyse	-
λ	Vektor der Lagrangemultiplikatoren	-

Symbol	Bedeutung	Einheit
$\boldsymbol{\mu}$	Vektor der Schlupfvariablen	-
μ_0	Reibungskoeffizient	-
ν	Querkontraktionszahl (Poissonzahl)	-
ξ_i	Position in Stempelrichtung für Mittelflächenberechnung	mm
$\boldsymbol{\xi}_m$	Mittelflächenpositionen in Stempelrichtung	mm
$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_m$	geglättete Mittelflächenpositionen in Stempelrichtung	mm
Π	elastisches Potential	Nmm
ρ_i	physikalische Dichte des Elements i	tmm ⁻³
ρ_{0i}	physikalische Dichte des Grundmaterials von Element i	tmm ⁻³
ρ_T	Radius einer Aussparung für die Topologische Ableitung	mm
σ_k	Spannungsnorm	MPa
$\boldsymbol{\sigma}_{Ei}$	Spannungen in Element i in Voigt'scher Notation $\boldsymbol{\sigma}_{Ei}^T = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{xy}]$	MPa
$\boldsymbol{\sigma}_{Ni}$	Matrix der Spannungen im Referenzlastfall (für lineares Beulen) in Element i	MPa
$\boldsymbol{\sigma}_{Mi}$	Spannungstensor in Element i , $\boldsymbol{\sigma}_{Mi} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx,i} & \sigma_{xy,i} & \sigma_{xz,i} \\ \sigma_{xy,i} & \sigma_{yy,i} & \sigma_{yz,i} \\ \sigma_{xz,i} & \sigma_{yz,i} & \sigma_{zz,i} \end{bmatrix}$	MPa
σ_{vMi}	von-Mises-Vergleichsspannung in Element i	MPa
σ_{vMi}^{rel}	relaxierte von-Mises-Vergleichsspannung in Element i	MPa
τ	Korrekturfaktor für out-of-plane Schubspannungen	-
ϕ	Level-Set-Funktion	-
φ_i	i -te Eigenform	-
$\varphi_{i,Ej}$	i -te Eigenform, Einträge des j -ten Elements	-
χ	Faktor für Projektionsfilter	-
ψ_i	i -ter Eigenwert	-
ψ_k	Norm aus Eigenwerten, Eigenwertkriterium	-
Ω	Bauraum	-
ω	Freiheitsgrade für Reissner-Mindlin-Schale	-

1 Einleitung

1.1 Problemstellung und Motivation

Die Auslegung eines Bauteils umfasst die bestmögliche Erfüllung der mechanischen Anforderungen (z.B. Steifigkeit und Festigkeit), die Masse sowie die Gewährleistung der Herstellbarkeit unter Beachtung der Kosten. Um die mechanischen Anforderungen bestmöglich zu erfüllen, können Optimierungsalgorithmen genutzt werden, die die Geometrie eines Bauteils iterativ verbessern sollen. Dabei wird das Bauteilverhalten in der Regel numerisch berechnet und die Gestalt des Bauteils so verändert, dass eine Verbesserung zu erwarten ist.

Die sogenannte Topologieoptimierung beinhaltet die Änderung der grundlegenden geometrischen Eigenschaften eines Bauteils. Das Ergebnis der Topologieoptimierung ist eine Materialverteilung in einem vorgegebenen Bauraum. Für jeden Punkt im Bauraum wird festgelegt, ob dort Material vorhanden ist oder nicht. Somit können sich während der Topologieoptimierung Löcher in der Struktur bilden oder sich schließen. In der Strukturoptimierung wird der Bauraum häufig in geometrische Primitive wie Würfel, sogenannte Voxel, aufgeteilt und jeweils ermittelt, ob ein Voxel für die Erfüllung der Optimierungsaufgabe zum Bauteil gehört. Somit ermöglicht dieser Ansatz ein großes Optimierungspotential. Gängige Methoden zur Topologieoptimierung berücksichtigen die Herstellbarkeit in der Regel nicht.

Blechbauteile werden im Leichtbau häufig genutzt, da sie einen zweiachsigen Spannungszustand aufweisen können, geschlossene Strukturen bilden können und gleichzeitig ein geringes Gewicht und geringe Herstellungskosten in der Großserienfertigung aufweisen. Blechbauteile sind Schalen, also gekrümmte Körper, deren Dicke im Verhältnis zu ihren übrigen Ausmaßen, gering ist. Sie bestehen aus Metall und werden üblicherweise aus einer ebenen Platine hergestellt. Besonders effizient sind Schalen, die einen Membranspannungszustand aufweisen, also nur auf Zug und Druck und nicht auf Biegung beansprucht werden. Massive Bauteile wie Guss- und Schmiedebauteile können einen dreidimensionalen Spannungszustand aufweisen und können so beispielsweise zum Einsatz kommen, wenn Blechbauteile

die mechanischen Anforderungen nicht erfüllen können. Blechbauteile kommen unter anderem im Automobilbau, Schienenfahrzeugbau, Maschinenbau und Bauingenieurwesen zum Einsatz. Sie können sehr dünnwandig ausgeführt werden, was beispielsweise mit Gussbauteilen nicht möglich ist. Außerdem weisen Sie aufgrund ihrer Herstellung durch Umformen wenig Defekte auf und können infolge der plastischen Umformung und Verfestigung große Streckgrenzen besitzen.

Das am häufigsten in Großserienfertigung angewendete Fertigungsverfahren für Blechbauteile ist das Tiefziehen, bei dem die initial ebene Platine durch eine Relativbewegung von Stempel und Matrize in die gewünschte Form gebracht wird. Daher soll zur Gewährleistung der Herstellbarkeit in dieser Arbeit ausschließlich die Tiefziehbarkeit berücksichtigt werden. Bisher gibt es keine Methode, um Topologie, Form und Dimension von Schalenstrukturen gleichzeitig zu optimieren und dabei die Herstellbarkeit zu berücksichtigen.

Gegenwärtig müssen Bauteile, die mit einer Voxelmethode topologisch optimiert wurden, manuell in eine Konstruktion mittels Computer Aided Design (CAD) überführt werden, wobei der Konstrukteur das Optimierungsergebnis richtig interpretieren muss. Im Anschluss wird die Herstellbarkeit überprüft. Oft muss das Bauteil danach (ggf. mehrfach) angepasst werden. Bei dieser Anpassung geht die Optimalität des Bauteils verloren. Außerdem sorgen die Schleifen im Produktentwicklungsprozess für einen langen Entwicklungszyklus.

Ziel dieser Arbeit ist es daher, eine durchgängige, vollautomatisierte Prozesskette mit gleichzeitiger Optimierung von Topologie, Form und Dimension sowie integrierter Fertigungssimulation und -restriktion für das Tiefziehen zu entwickeln. Durch die Berücksichtigung der Fertigbarkeit während der Optimierung entfällt die nachträgliche Bauteilanpassung, die zu suboptimaler Bauteilgestalt und längeren Entwicklungszeiten führt. Mit einer durchgängigen Prozesskette kann die Bauteilperformance verbessert und die Durchlaufzeit des Entwicklungszyklus durch Vermeidung händischer Entwicklungsschleifen verkürzt werden.

Als Fertigungsverfahren wird im Folgenden spezifisch das einstufige Tiefziehen bei Raumtemperatur berücksichtigt, wobei während der Optimierung die Prozessparameter für das Tiefziehen konstant bleiben. Abgesehen von der Herstellbarkeit wird für die Auslegungskriterien ein linear-statisches Strukturverhalten angenommen. Außerdem werden Anforderungen an die Eigenfrequenzen und das lineare Beulverhalten berücksichtigt.

1.2 Optimierungsansatz und Aufbau der Dissertation

In Kapitel 2 dieser Arbeit wird in die Struktursimulation und -optimierung eingeführt. Es werden die Herausforderungen für die Auslegung von Schalenbauteilen detailliert erläutert, die Simulationsmethoden erklärt, die Strukturoptimierung klassifiziert und bestehende Methoden zur Topologieoptimierung vorgestellt. In Kapitel 3 wird die im Folgenden verwendete Dichtemethode mit ihrem theoretischen Hintergrund beschrieben. Ab Kapitel 4 werden eigene Forschungserkenntnisse vorgestellt. Dies beginnt mit der Erweiterung der Dichtemethode um zusätzliche Auslegungskriterien. Bis dahin können alle beschriebenen Methoden auch für Volumenbauteile (nicht nur für Schalen) genutzt werden. Erst in Kapitel 5 wird die Fertigungsrestriktion eingeführt, die für Strukturen konstanter Dicke ohne Hinterschnitte sorgt. In Kapitel 6 wird die Methode zur Sicherung der Tiefziehbarkeit erklärt. Dabei wird die Tiefziehsimulation in die Optimierung implementiert und das Bauteil wird entsprechend einer Heuristik an kritischen Stellen geglättet. Um die Effizienz des Optimierungsalgorithmus zu steigern, werden in Kapitel 7 eine Methode zur Verkürzung der Berechnungszeit einer Struktursimulation und eine Methode zur Beschleunigung der Konvergenz der Schalenoptimierung vorgestellt. Abschließend werden die entwickelten Methoden in Kapitel 8 auf mehrere Beispiele angewendet. In Kapitel 9 werden die gewonnen Erkenntnisse zusammengefasst und Erweiterungsmöglichkeiten werden diskutiert.

2 Struktursimulation und -optimierung von Schalenbauteilen

In diesem Kapitel wird erläutert, welche Anforderungen an Schalenbauteile gestellt werden. Dazu wird in die Berechnung des Strukturverhaltens mittels Finite-Elemente-Methode eingeführt. Anschließend werden Grundlagen der Strukturoptimierung beschrieben, um darauf folgend den aktuellen wissenschaftlichen Stand zur Optimierung von tiefziehbaren Schalenstrukturen darzustellen.

2.1 Herausforderung bei der Optimierung von tiefziehbaren Schalenstrukturen

Zunächst werden die Auslegungskriterien für Schalenstrukturen erläutert. Auf die Anforderungen des Tiefziehprozesses wird anschließend eingegangen. Zuletzt werden die aktuellen Arbeiten zur Berücksichtigung von Fertigungsrestriktionen in der Optimierung erläutert.

2.1.1 Auslegungskriterien

In dieser Arbeit wird das Ziel verfolgt eine Methodik zu entwickeln, um Blechbauteile möglichst gut auszulegen. Die betrachteten Lastfälle sind statische bzw. quasistatische Ersatzlastfälle, die im Wesentlichen lineares Strukturverhalten hervorrufen.

Nichtlinearitäten können unterteilt werden in (Wriggers 2001)

- **nichtlineare Randbedingungen:** Nichtlineare Randbedingungen wie Kontakt werden in dieser Arbeit nicht berücksichtigt.

- **nichtlineares Geometrieverhalten:** Nichtlineares Geometrieverhalten in Form von großen Verschiebungen wird ausschließlich durch lineare Beulanalysen betrachtet.
- **nichtlineares Material:** Nichtlineares Materialverhalten wie Plastizität oder zeitabhängiges Verhalten wird in dieser Arbeit nicht berücksichtigt.

Wie von Ortmann (2015) beschrieben, erschweren starke Nichtlinearitäten die Optimierung.

Zur Auslegung flächiger Strukturen werden folgende Kriterien in Betracht gezogen:

- **Masse:** In den meisten industriellen Anwendungen soll die Masse unter Berücksichtigung der technischen Nebenbedingungen und der Fertigungskosten minimiert werden. Dies reduziert den Materialeinsatz und sorgt bei bewegten Bauteilen für einen geringeren Energieaufwand, um diese zu beschleunigen. Dies resultiert im Fahrzeugbau oder der Luftfahrt in verringerten Emissionen.
- **Festigkeit:** Ist das Versagen oder die Vermeidung von plastischen Verformungen eines Bauteils relevant, so ist die Festigkeit Auslegungskriterium. Um plastische Verformungen zu vermeiden, muss die Vergleichsspannung an jeder Stelle des Bauteils unter der Streckgrenze liegen. Meist wird dabei ein Sicherheitsfaktor berücksichtigt.
- **Steifigkeit:** Unter Steifigkeit versteht man das Vermögen einer Struktur, sich unter Einwirkung einer Last möglichst wenig zu verformen. Überall im Maschinenbau, wo es auf hohe Genauigkeiten ankommt (Werkzeugmaschinen, Messmaschinen), ist die Steifigkeit Auslegungskriterium. Außerdem führt eine erhöhte Steifigkeit häufig zu verbesserten Eigenfrequenzen und Beulsicherheiten sowie zu verbesserter Akustik, Fahrdynamik und Aeroelastik.
- **Verschiebungen:** Für Präzisionsanwendungen oder bei Berücksichtigung von Volumenlasten sind Verschiebungen an bestimmten Punkten relevant für die Auslegung. Dabei sollen die Verschiebungen gering sein. Bei mechanischen Aktuatoren werden häufig Mechanismen eingesetzt, um die Verschiebungen des Aktuators durch elastische Deformationen zu vergrößern. Ziel ist es hierbei, große Verschiebungen an definierten Stellen zu erreichen. Die Steifigkeit berücksichtigt nur die Verschiebung an den Lastangriffspunkten in Lastrichtung. Verschiebungen an ausgewählten Punkten sind daher eine erweiterte Anforderung.

- **Eigenfrequenz:** Bei Bauteilen, die periodisch von äußeren Lasten angeregt werden, kann es zum dynamischen Versagen kommen. Diese Gefahr besteht besonders, wenn Resonanz auftritt. Daher sollten Eigenfrequenzen nicht in Frequenzbereichen der Anregung liegen. Neben dem Versagen ist auch die Akustik ein wesentliches Auslegungskriterium, für das die Eigenfrequenzen zur Bewertung verwendet werden können.
- **Beulsicherheit:** Werden Bauteile mit Druckspannungen in mindestens einer Richtung beansprucht, so kann es zu Instabilitäten (Knicken, Beulen, Kippen) kommen, auch wenn die Spannungen deutlich unterhalb der Streckgrenze liegen. Grund dafür sind die Veränderungen der Beanspruchungen im Bauteil bei großer Verformung. Da Instabilitäten zum Versagen des Bauteils führen können, müssen diese verhindert werden.

Zur Auslegung von Schalenbauteilen können die Form der Mittelfläche, die Wandstärke, Aussparungen und Sicken verändert werden. Oft ist es auch hilfreich, anstelle eines einschaligen Bauteils, Baugruppen aus mehreren Blechbauteilen zu entwickeln.

2.1.2 Fertigungsverfahren Tiefziehen

„Tiefziehen ist das Zugdruckumformen eines Blechzuschnitts zu einem Hohlkörper“ (aus DIN 8584). Abbildung 2–1 zeigt den prinzipiellen Aufbau beim Tiefziehen. Der initial ebene Blechzuschnitt (Platine genannt) wird durch die Relativbewegung des Stempels in Richtung der Matrize umgeformt. Um den Materialfluss des Bleches zu kontrollieren und möglichst an allen Stellen einen Zugspannungszustand zu generieren, wird das Blech üblicherweise von einem Niederhalter auf die Matrize gepresst. Niederhalter und Matrizen weisen oft Ziehicksen auf, um über die Rückhaltekraft den Materialfluss des Bleches zu kontrollieren und die Wirkung des Niederhalters zu verbessern (Siegert 2015).

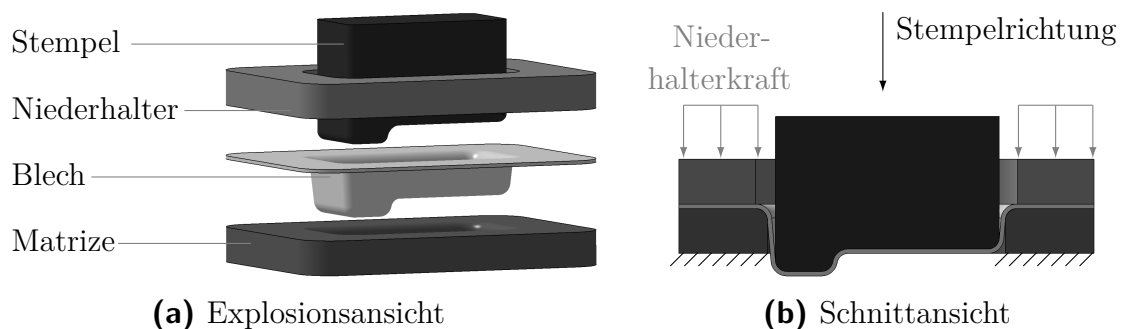


Abbildung 2–1: Tiefziehen – Prinzipbild

Das Tiefziehen kann als Kalt- und Warmumformung betrieben werden. Das Warmumformen wird bei Temperaturen oberhalb der Rekristallisationstemperatur des Metalls durchgeführt. Dadurch können höhere Umformgrade erreicht werden, weil die Rekristallisation eine Verfestigung verhindert bzw. kompensiert. Die Vorrichtung zur Wärmebehandlung sorgt für eine größere Komplexität des Werkzeugs, außerdem sind die Maßtoleranzen und Oberflächengüte (evtl. Verzerrungen) schlechter als beim Kaltumformen (Neugebauer und Herfurth 2001). Diese Arbeit beschränkt sich auf das einstufige Tiefziehen als Kaltumformung bei Raumtemperatur.

Abbildung 2–2 zeigt einen exemplarischen Querschnitt des umgeformten Bauteils aus Abbildung 2–1. In einem Fertigungsschritt, also einstufig, können nur Querschnitte ohne Hinterschnitt in Stempelrichtung hergestellt werden wie in Abbildung 2–2a. Geometrien mit Hinterschnitt in Stempelrichtung wie in Abbildung 2–2b können nur mehrstufig hergestellt werden und entfallen somit für die Betrachtungen in dieser Arbeit.



Abbildung 2–2: Herstellbarkeit eines Querschnitts

Auswertungskriterien für das Tiefziehen

Die Ergebnisse aus der Tiefziehsimulation werden häufig anhand des Formänderungsdiagramms (engl. forming limit diagram – FLD) ausgewertet (Hosford und Caddell 2007). Das FLD hängt vom Material und der Blechdicke ab. In Abbildung 2–3a wird beispielhaft das FLD des duktilen Kaltformstahls DC04 bei einer Dicke von 1 mm gezeigt. Abbildung 2–3b zeigt das gleiche Material bei einer größeren Blechdicke, Abbildung 2–3c einen hochfesten Komplexphasenstahl.

Zur Auswertung werden die Hauptdehnungen ε_{Hi} (in der Schale $\varepsilon_{Hi}^T = [\varepsilon_{Hi,1} \ \varepsilon_{Hi,2}] = [\varepsilon_{Hi,max} \ \varepsilon_{Hi,min}]$) berechnet, um das Auftreten von Reißern vorherzusagen. Die relevante Kurve für Reißer ist die Grenzformänderungskurve (engl. forming limit curve – FLC). Oberhalb dieser Kurve reißt das Blech. Oft wird ein Sicherheitsfaktor angewendet, um das Risiko von Reißern zu vermeiden. Diese Zone ist gelb schattiert und hat einen beispielhaften vertikalen Offset von der FLC von 20 %. Eine andere kritische Zone ist der Bereich der potentiellen Faltenbildung (blau/violett), da durch lokales Beulen der Schale die gewünschte Form des umgeformten Bleches nicht erreicht werden kann.

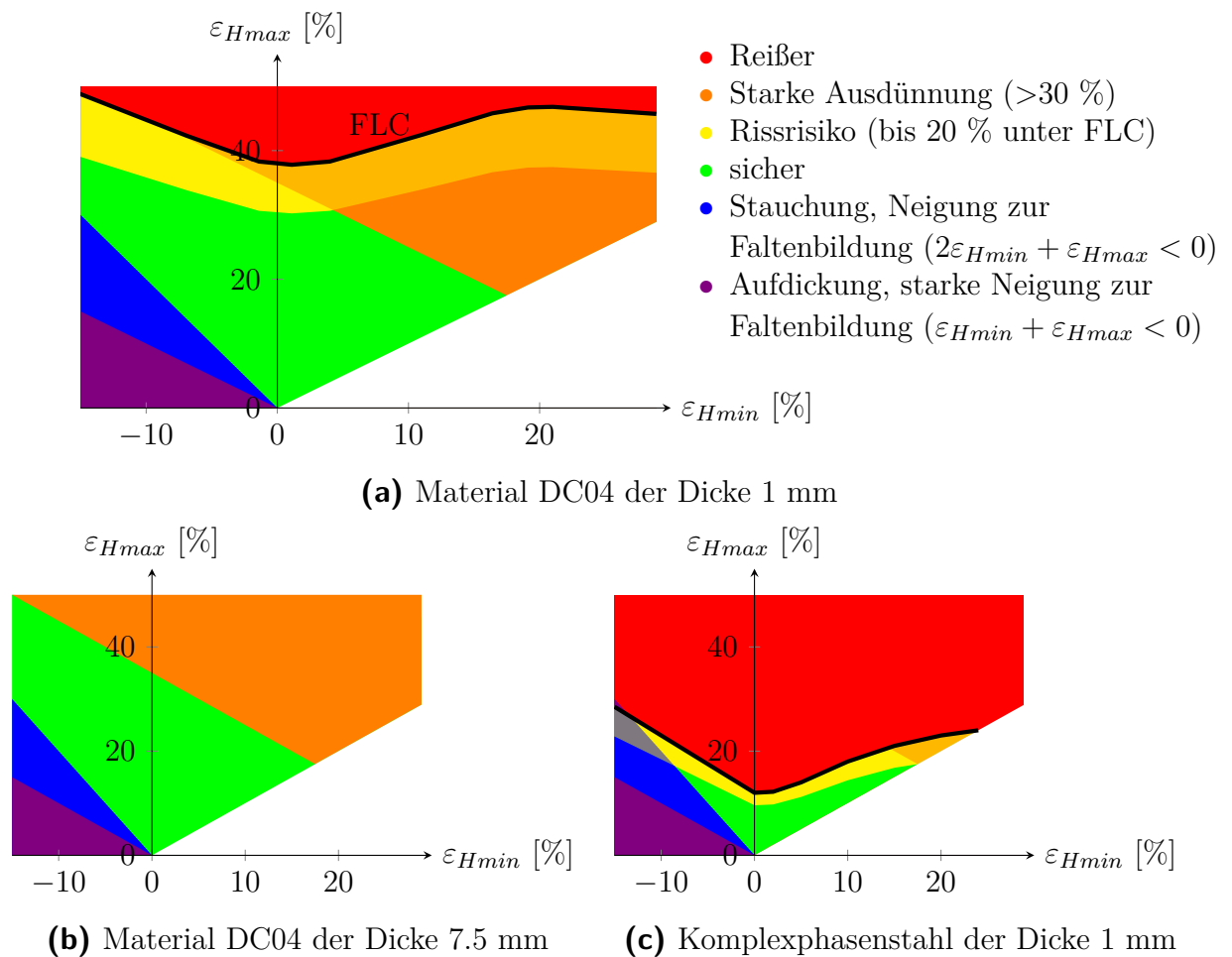


Abbildung 2–3: Formänderungsdiagramme (FLD) mit Grenzformänderungskurven (FLC) abhängig von Material und Blechdicke

Um Reißer zu identifizieren, wird in Abbildung 2–4 das Risskriterium

$$c_{ti} = \frac{\varepsilon_{Hi,max}}{\beta_i} \quad (2-1)$$

für eine beliebige Stelle i erläutert. Der schwarze Punkt in Abbildung 2–4 ist der Dehnungszustand an dieser exemplarischen Stelle. β_i ist dabei der Wert der maximalen Hauptdehnung, bei dem, bei gleichbleibender minimaler Hauptdehnung $\varepsilon_{Hi,min}$, die FLC erreicht wird. Das Risskriterium c_{ti} beschreibt den Verzerrungszustand des Elements i im FLD in Relation zur FLC. Bei $c_{ti} = 1$ liegt der Verzerrungszustand auf der FLC, bei $c_{ti} < 1$ darunter. Ein Auslegungskriterium kann also sein, dass alle Risskriterien kleiner als ein vorgegebener Wert sein müssen, beispielsweise $c_{ti} \leq 0.8$.

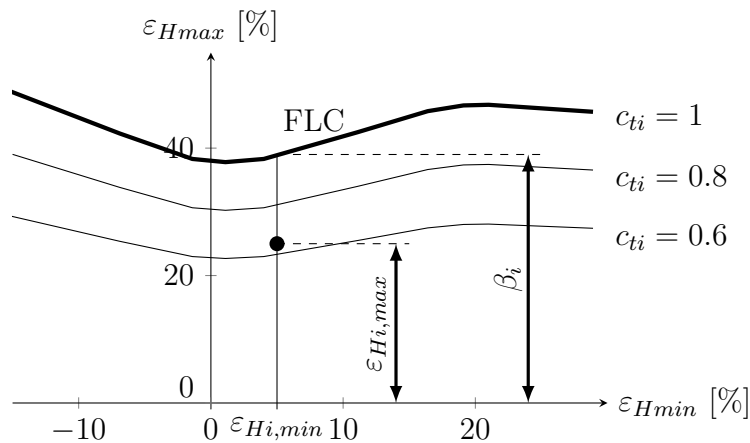


Abbildung 2–4: Risskriterium im FLD für Material DC04 der Dicke 1 mm

2.1.3 Berücksichtigung der Fertigung in der Optimierung

Neben den technischen Nebenbedingungen müssen Bauteile auch die Anforderungen des Fertigungsverfahrens erfüllen. Entscheidend für das Fertigungsverfahren sind das Lastniveau und der Leichtbaubedarf eines Bauteils, in der Großserienfertigung jedoch hauptsächlich die Herstellungskosten. Moderne Verfahren wie die generative Fertigung („3D-Druck“) reduzieren die Ansprüche der Fertigung an ein Bauteil, sind aber vergleichsweise teuer.

Gängige Fertigungsverfahren wie das Urformen werden bereits in der Topologieoptimierung berücksichtigt. Tabelle 2–1 zeigt Anforderungen an die Gießbarkeit, die bereits in Optimierungen berücksichtigt werden.

Um dem fertigen Bauteil möglichst nah zu kommen, werden immer mehr Kriterien bezüglich der Fertigung in der Optimierung berücksichtigt. Grundlegende Anforderungen zur Fertigbarkeit können anhand geometrischer Kriterien formuliert werden. Wie Franke (2018) aber zeigt, kann es trotz geometrischer Kriterien zu Problemen beim Füllen der Kavität kommen oder es entstehen Porositäten während der Erstarrung. Um diese Anforderungen während der Optimierung zu berücksichtigen, ist eine Implementierung der Fertigungssimulation nötig, die ggf. eine Modifikation des Bauteils hinsichtlich der Herstellbarkeit bedingt.

Wifi et al. (2007) geben einen Überblick über die Optimierung unter Berücksichtigung der Tiefziehbarkeit. Dabei werden Niederhalterkräfte, die äußere Kontur des Blechzuschnitts, Werkzeug- und Prozessparameter optimiert, wobei die Tiefziehbarkeit gewährleistet werden soll. Die Geometrie des Bauteils wird dabei nicht verändert. Für die gleichzeitige Topologie- und Formoptimierung von tiefziehbaren Blechstrukturen mit implementierter Fertigungssimulation konnte keine Literatur gefunden werden.

Tabelle 2–1: Literaturübersicht zur Optimierung mit Gussrestriktion

Veröffent- lichung	Optimierungs- ansatz	Geometrische Kriterien	Fertigungs- simulation
Harzheim und Graf 2005	Soft Kill Option (SKO)	Auszugsrichtung, minimale Wandstärke	-
Xia et al. 2010	Level Set	Auszugsrichtung	-
Zhou et al. 2011	Dichtemethode	Auszugsrichtung, minimale Wandstärke	-
Allaire et al. 2013	Level Set	Auszugsrichtung, minimale Wandstärke	-
Franke 2018	Bidirectional Evo- lutionary Structural Optimization (BESO) mit Heuristiken	Auszugsrichtung, minimale Wandstärken, minimale Taschengrößen, Entformungsschrägen, minimale Lochgrößen	Formfüllung, Erstarrung

2.2 Grundlagen der Struktursimulation

2.2.1 Simulation des linearen Strukturverhaltens

Das mechanische Verhalten einer Struktur kann häufig nicht mit analytischen Verfahren bestimmt werden, daher werden numerische Verfahren wie die Finite-Elemente-Methode (FEM) eingesetzt. Die Finiten Elemente (FE) sind geometrische Primitive wie Dreiecke oder Vierecke in 2D bzw. Tetraeder oder Hexaeder in 3D, in die die Struktur aufgeteilt wird. Diese Aufteilung wird Diskretisierung genannt. Die Finiten Elemente werden anhand der Knoten und deren Position beschrieben. Die Knoten können Ecken der Finiten Elemente sein oder zusätzlich an charakteristischen Stellen des Elements liegen. In dieser Arbeit werden ausschließlich lineare Voxel verwendet (engl. volumetric pixel, wobei pixel ein Kunstwort für picture element ist). Dies sind Würfel-Elemente mit 8 Knoten an den Elementecken (vgl. Abbildung 2–5).

Als Ansatzfunktionen im Voxel werden lineare Funktionen verwendet. Diese beschreiben gleichermaßen die Geometrie und die Verschiebungen innerhalb des Voxels (sogenannte Isogeometrische Finite Elemente). Die Ansatzfunktionen für einen Voxel gemäß Abbildung 2–5 sind

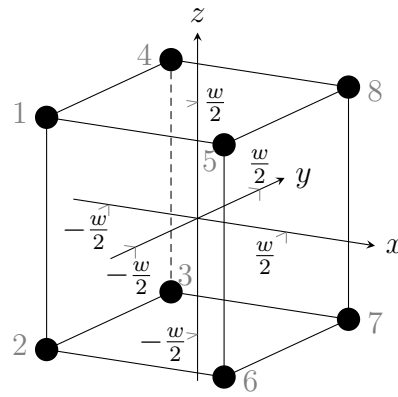


Abbildung 2–5: Voxel mit Elementkantenlänge w – Knotennummerierung (grau)

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \left(\frac{1-x}{2} - \frac{x}{w}\right) \left(\frac{1-y}{2} - \frac{y}{w}\right) \left(\frac{1+z}{2} + \frac{z}{w}\right) \\
 N_2 &= \left(\frac{1-x}{2} - \frac{x}{w}\right) \left(\frac{1-y}{2} - \frac{y}{w}\right) \left(\frac{1-z}{2} - \frac{z}{w}\right) \\
 N_3 &= \left(\frac{1-x}{2} - \frac{x}{w}\right) \left(\frac{1+y}{2} + \frac{y}{w}\right) \left(\frac{1-z}{2} - \frac{z}{w}\right) \\
 N_4 &= \left(\frac{1-x}{2} - \frac{x}{w}\right) \left(\frac{1+y}{2} + \frac{y}{w}\right) \left(\frac{1+z}{2} + \frac{z}{w}\right) \\
 N_5 &= \left(\frac{1+x}{2} + \frac{x}{w}\right) \left(\frac{1-y}{2} - \frac{y}{w}\right) \left(\frac{1+z}{2} + \frac{z}{w}\right) \\
 N_6 &= \left(\frac{1+x}{2} + \frac{x}{w}\right) \left(\frac{1-y}{2} - \frac{y}{w}\right) \left(\frac{1-z}{2} - \frac{z}{w}\right) \\
 N_7 &= \left(\frac{1+x}{2} + \frac{x}{w}\right) \left(\frac{1+y}{2} + \frac{y}{w}\right) \left(\frac{1-z}{2} - \frac{z}{w}\right) \\
 N_8 &= \left(\frac{1+x}{2} + \frac{x}{w}\right) \left(\frac{1+y}{2} + \frac{y}{w}\right) \left(\frac{1+z}{2} + \frac{z}{w}\right).
 \end{aligned} \tag{2-2}$$

Dabei gilt $\sum_{i=1}^8 N_i = 1$ und am Knoten i ist $N_j = 1$, wenn $i = j$, und $N_j = 0$, wenn $i \neq j$. Sind die Knotenverschiebungen des Elements

$\mathbf{u}_{Ei}^T = [u_{1x} \ u_{1y} \ u_{1z} \ u_{2x} \ u_{2y} \ u_{2z} \ \dots \ u_{8z}]$ bekannt (u_{1x} ist beispielsweise die Verschiebung am Knoten 1 in x -Richtung), so kann die Verschiebung an jeder Stelle des Elements berechnet werden mit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{Ei} \\
 &= \mathbf{N} \mathbf{u}_{Ei}.
 \end{aligned} \tag{2-3}$$

Dabei ist \mathbf{N} die Matrix der Ansatzfunktionen.

Die Verzerrungen ergeben sich aus der Ableitung der Verschiebungen

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{Ei} = \mathbf{D} \mathbf{N} \mathbf{u}_{Ei} = \mathbf{B} \mathbf{u}_{Ei} \tag{2-4}$$

mit dem Matrixdifferentialoperator $\mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}$

und der Dehnungs-Verschiebungs-Matrix $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{N}$. Die Spannungen können im Falle linearer Elastizität für jedes Element i aus $\boldsymbol{\sigma}_{Ei} = \mathbf{E}_{Ei}\boldsymbol{\varepsilon}_{Ei}$ berechnet werden. Dabei ist \mathbf{E}_{Ei} die Elastizitätsmatrix.

Damit kann das elastische Potential Π in der linearen Statik mit ausschließlich Einzellasten \mathbf{p} geschrieben werden als

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dv - \mathbf{p}^T \mathbf{u} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_E} \int_{v_i} \boldsymbol{\varepsilon}_{Ei}^T \boldsymbol{\sigma}_{Ei} dv - \mathbf{p}^T \mathbf{u} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_E} \mathbf{u}_{Ei}^T \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{u}_{Ei} - \mathbf{p}^T \mathbf{u} \quad (2-5)$$

mit der Anzahl der Finiten Elemente N_E , dem Volumen v_i des Elements i und den Elementsteifigkeitsmatrizen

$$\mathbf{K}_{Ei} = \int_{v_i} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_{Ei} \mathbf{B} dv, \quad (2-6)$$

die für alle Voxel gleicher Größe und des gleichen Materials identisch sind. Die Elementsteifigkeitsmatrizen werden assembliert zur Systemsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N_E} \mathbf{A}_{Ei}^T \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{A}_{Ei} \quad (2-7)$$

mit den Assemblierungsmatrizen \mathbf{A}_{Ei} , die den Elementfreiheitsgraden die Systemfreiheitsgrade zuordnen ($\mathbf{u}_{Ei} = \mathbf{A}_{Ei} \mathbf{u}$). Daraus folgt $\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{p}^T \mathbf{u}$.

Aus dem Variationsprinzip $\delta\Pi = 0$ folgt das Gleichgewicht für lineare Statik

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}. \quad (2-8)$$

Damit können bei der Vorgabe äußerer Lasten \mathbf{p} die Verschiebungen \mathbf{u} berechnet werden. Bei direkten Gleichungslösern darf dafür die Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} nicht singulär sein, was durch ausreichende Lagerung der Struktur gelingt. Bei iterativen Gleichungslösern reicht häufig eine Minimallagerung aus, um eine Konvergenz zu erreichen.

Modalanalyse

Mit der Finite-Elemente-Methode können auch Eigenfrequenzprobleme gelöst werden. Bei der Modalanalyse

$$(\mathbf{K} - \psi_j \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi}_j = \mathbf{0} \quad (2-9)$$

werden die Eigenwerte ψ_j und die zugehörigen Eigenformen φ_j berechnet. Üblicherweise werden die n kleinsten Eigenwerte berechnet, deren Größe von ψ_1 bis ψ_n steigt. \mathbf{M} ist die Systemmassenmatrix, die analog zu Gleichung 2–7 aus den Elementmassenmatrizen

$$\mathbf{M}_{Ei} = \int_{v_i} \rho_i \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv \quad (2-10)$$

assembliert wird.

Lineare Beulanalyse

Stabilitätsprobleme aufgrund geometrischer Nichtlinearitäten können mithilfe eines ähnlichen Eigenwertproblems gelöst werden. Dazu wird zunächst eine linearstatische Berechnung $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{p}$ durchgeführt (Referenzlastfall). Anschließend wird das Eigenwertproblem

$$(\mathbf{G} + \psi_j \mathbf{K}) \varphi_j = \mathbf{0} \quad (2-11)$$

gelöst. Die geometrische Steifigkeitsmatrix \mathbf{G} beschreibt, wie sich die lineare Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} durch die Verschiebungen im Referenzlastfall verändert. Die Eigenwerte ψ_j beschreiben die Beulsicherheiten $T_j = \frac{1}{\psi_j}$. Die Beulsicherheit T_j ist ein Faktor, der beschreibt, wie die Last aus dem Referenzlastfall vervielfacht werden muss, damit die Beulform φ_j auftritt. Dabei wird davon ausgegangen, dass sich die Steifigkeitsmatrix linear mit der Last ändert. Die n größten Eigenwerte ($\psi_1 \geq \psi_2 \geq \dots \geq \psi_n$) werden berechnet, also die n kleinsten positiven Beulsicherheiten T_j .

Die geometrischen Elementsteifigkeitsmatrizen

$$\mathbf{G}_{Ei} = \int_{v_i} \mathbf{C}^T \boldsymbol{\sigma}_{Ni} \mathbf{C} dv \quad (2-12)$$

werden berechnet aus den Ableitungen der Ansatzfunktionen

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

und den Spannungen aus dem Referenzlastfall

$$\boldsymbol{\sigma}_{Ni} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{Mi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}_{Mi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}_{Mi} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma}_{Mi} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx,i} & \sigma_{xy,i} & \sigma_{xz,i} \\ \sigma_{xy,i} & \sigma_{yy,i} & \sigma_{yz,i} \\ \sigma_{xz,i} & \sigma_{yz,i} & \sigma_{zz,i} \end{bmatrix}. \quad (2-14)$$

Die geometrische Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{G} wird analog zu Gleichung 2–7 aus den geometrischen Elementsteifigkeitsmatrizen \mathbf{G}_{Ei} assembliert.

2.2.2 Verwendung von Schalenelementen

Eine Einleitung in die FEM wurde im vorangegangenen Abschnitt anhand von Kontinuums-elementen gegeben. Für die Berechnung von Blechstrukturen kommen jedoch üblicherweise Schalenelemente zum Einsatz. Eine Schale ist eine Kombination aus Scheibe und Platte. Scheiben können nur Lasten in der Mittelebene aufnehmen, Platten nehmen nur Lasten senkrecht zur Mittelfläche auf. Durch die Schalenkrümmung sorgt eine Last, die lokal senkrecht zur Schale wirkt, an anderer Stelle auch für Schnittlasten in der Mittelebene. Ebenso erzeugt eine Last in Schalenebene bei gekrümmten Schalen Schnittlasten in Dickenrichtung. Platten- und Scheibenzustand sind in einer gekrümmten Schale folglich gekoppelt.

Um Schalen zu berechnen, gibt es vielfältige Theorien. An dieser Stelle wird auf die Theorie nach Reissner (1945) und Mindlin (1951) der schubweichen Schale eingegangen. Diese basiert auf den Annahmen, dass

- sich die Schalendicke während der Deformation nicht ändert.
- eine Normale zur Mittelfläche im deformierten Zustand gerade bleibt. Bleibt die Normale auch im deformierten Querschnitt senkrecht zur Schalenebene, kann die einfachere Schalentheorie nach Kirchhoff und Love (1888) angewendet werden.
- die Normalspannung in Dickenrichtung vernachlässigbar ist.

Diese Annahmen sorgen für die Anwendbarkeit der Theorie für kleine Verschiebungen und Verzerrungen von dünnen und mäßig dicken Schalen (Querausdehnungen mehr als 10 mal so groß wie Schalendicke).

Eine weitere Annahme für die FE-Diskretisierung ist, dass die Schale nur moderat gekrümmt ist. Gilt diese Annahme, lassen sich bei hinreichend feiner Vernetzung Platten- und Scheibenzustand auf Elementebene separieren. Anhand des vierknotigen Schalenelementes in Abbildung 2–6 wird die Elementsteifigkeitsmatrix für Scheibe und Platte separat hergeleitet.

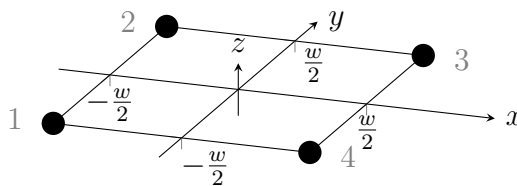


Abbildung 2–6: Vierknotiges, regelmäßiges Schalenelement mit Kantenlänge w – Knotennummerierung (grau)

Für die Scheibe können die Ansatzfunktionen

$$\begin{aligned} N_1 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{w}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{w}\right) \\ N_2 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{w}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{w}\right) \\ N_3 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{w}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{w}\right) \\ N_4 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{w}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{w}\right). \end{aligned} \quad (2-15)$$

verwendet werden. Die Verschiebung \mathbf{u} an jeder Stelle des Scheibenelements kann aus den Knotenverschiebungen $\mathbf{u}_{Ei}^T = [u_{1x} \ u_{1y} \ u_{2x} \ u_{2y} \ \dots \ u_{4y}]$ mit

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{Ei} = \mathbf{N}_T \mathbf{u}_{Ei} \quad (2-16)$$

berechnet werden. Mit diesem Ansatz kann bei linearem Materialverhalten die Steifigkeitsmatrix analog zu Gleichung 2-6 für ein Scheibenelement berechnet werden. Da der Scheibenzustand in Dickenrichtung konstant ist, wird aus der Volumenintegration eine Flächenintegration mit der Scheibendicke b :

$$\mathbf{K}_{Ei} = \int_{v_i} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_{Ei} \mathbf{B} dv = b \int_{A_i} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_{Ei} \mathbf{B} da. \quad (2-17)$$

Abbildung 2-7 zeigt die kinematischen Annahmen der Platte nach Reissner und Mindlin mit der Durchbiegung u_z und der Rotation θ_y um die y -Achse.

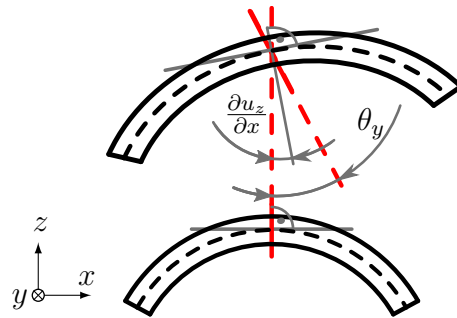


Abbildung 2-7: Querschnitt einer Platte nach Reissner-Mindlin, unten: Ausgangszustand, oben: deformierter Zustand, rot: eben bleibender Querschnitt

Für die Platte nach Reissner und Mindlin gilt die Annahme, dass die Verschiebungen in der Ebene linear aus den Rotationen θ_x um die x -Achse und θ_y um die y -Achse berechnet werden können. Die Durchbiegung u_z ist nicht von der Koordinate in Dickenrichtung abhängig:

$$\begin{aligned}
u_x(x, y, z) &= z\theta_y(x, y) \\
u_y(x, y, z) &= z\theta_x(x, y) \\
u_z &= u_z(x, y),
\end{aligned} \tag{2-18}$$

wobei die Rotationen θ_x und θ_y sowie die Durchbiegung u_z analog zu den Verschiebungen in der Ebene durch

$$\begin{bmatrix} u_z \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{Ei} = \mathbf{N}_R \mathbf{u}_{Ei} \tag{2-19}$$

interpoliert werden mit $\mathbf{u}_{Ei}^T = [u_{1z} \ \theta_{1x} \ \theta_{1y} \ u_{2z} \ \theta_{2x} \ \theta_{2y} \ \dots \ u_{4z} \ \theta_{4x} \ \theta_{4y}]$.

Die Dehnungen lassen sich aufspalten in den von z linear abhängigen Teil

$$[\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{xy}] = \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} \ \frac{\partial u_y}{\partial y} \ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] = z \left[\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right] = z \boldsymbol{\omega}_1^T \tag{2-20}$$

und den von z unabhängigen Teil

$$[\varepsilon_{xz} \ \varepsilon_{yz}] = \left[\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \ \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right] = \left[\frac{\partial u_z}{\partial x} + \theta_y \ \frac{\partial u_z}{\partial y} + \theta_x \right] = \boldsymbol{\omega}_2^T. \tag{2-21}$$

Im Folgenden dienen $\boldsymbol{\omega}_1$ und $\boldsymbol{\omega}_2$ als Abkürzungen. Aufgrund der Vernachlässigung der Normalspannungen in Dickenrichtung $\sigma_{zz} = 0$ korrespondiert die Situation mit dem ebenen Spannungszustand (hier für isotropes Material mit dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl ν):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 2 & 2\nu & 0 \\ 2\nu & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = z \mathbf{E} \boldsymbol{\omega}_1. \tag{2-22}$$

Die Schubspannungen σ_{xz} und σ_{yz} folgen aus dem dreidimensionalen Spannungszustand (hier für isotropes Material)

$$[\sigma_{xz} \ \sigma_{yz}] = \frac{\tau E}{2(1+\nu)} [\varepsilon_{xz} \ \varepsilon_{yz}] \tag{2-23}$$

mit dem Korrekturfaktor τ (üblicherweise $\tau = \frac{5}{6}$), der berücksichtigt, dass die tatsächliche Schubspannungsverteilung nicht konstant über die Dicke ist. Einsetzen in das elastische Potential

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dv - \mathbf{p}^T \mathbf{u} = \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2 \boldsymbol{\omega}_1^T \mathbf{E} \boldsymbol{\omega}_1 + \frac{\tau E}{2(1+\nu)} \boldsymbol{\omega}_2^T \boldsymbol{\omega}_2 \, dz \, da - \mathbf{p}^T \mathbf{u} \tag{2-24}$$

und Integration über die Schalendicke b ergibt

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\omega}_1^T \mathbf{F}_1 \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2^T \mathbf{F}_2 \boldsymbol{\omega}_2 da - \mathbf{p}^T \mathbf{u} \quad (2-25)$$

mit der Biegesteifigkeit $\mathbf{F}_1 = \frac{Eb^3}{24(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 2 & 2\nu & 0 \\ 2\nu & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix}$

und der Schubsteifigkeit $\mathbf{F}_2 = \frac{Eb\tau}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Darin sind als Schnittgrößen die Biegemomente $\mathbf{F}_1 \boldsymbol{\omega}_1$ und die resultierenden Querkräfte $\mathbf{F}_2 \boldsymbol{\omega}_2$ enthalten. Einsetzen der Ansatzfunktionen \mathbf{N}_R in Gleichung 2-25 liefert mit

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_E} \int_{A_i} \boldsymbol{\omega}_1^T \mathbf{F}_1 \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2^T \mathbf{F}_2 \boldsymbol{\omega}_2 da - \mathbf{p}^T \mathbf{u} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_E} \mathbf{u}_{Ei}^T \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{u}_{Ei} - \mathbf{p}^T \mathbf{u} \quad (2-26)$$

die Elementsteifigkeitsmatrix eines Plattenelements \mathbf{K}_{Ei} (Bathe 2014). Berücksichtigt man zusätzlich die Scheibenfreiheitsgrade, kann man die Elementsteifigkeitsmatrizen der Platte und der Scheibe überlagern.

Liegen Schalenelemente beliebig im Raum und nicht wie bisher angenommen in der x - y -Ebene, so kann die Elementsteifigkeitsmatrix in globalen Koordinaten \mathbf{K}_{Ei}^G aus der Elementsteifigkeitsmatrix in lokalen Koordinaten \mathbf{K}_{Ei} mithilfe der Transformationsmatrix \mathbf{W}_{Ei} berechnet werden:

$$\mathbf{K}_{Ei}^G = \mathbf{W}_{Ei}^T \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{W}_{Ei}. \quad (2-27)$$

Die Transformationsmatrix \mathbf{W}_{Ei} ist nur von den Richtungscosinus abhängig, also den Winkeln zwischen lokalem und globalem Koordinatensystem. Werden die Elementsteifigkeitsmatrizen in globalen Koordinaten zur Systemsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N_E} \mathbf{A}_{Ei}^T \mathbf{K}_{Ei}^G \mathbf{A}_{Ei}$ assembliert, so kommt es bei gekrümmten Schalen zur Kopplung von Platten- und Scheibenfreiheitsgraden.

Mit Schalenelementen können dieselben Berechnungen (u.a. linear-statische Berechnung, Modalanalyse, lineare Beulanalyse) wie mit Kontinuums-elementen durchgeführt werden. Durch die Berücksichtigung der Schalen-Kinematik sind Schalenelemente genauer und benötigen eine geringere Anzahl an Freiheitsgraden zur hinreichenden Diskretisierung als Kontinuums-elemente. Dadurch ist die Rechenzeit von Schalenmodellen deutlich kürzer.

2.2.3 Simulation des Tiefziehens

Die numerische Simulation des Umformvorgangs kann mithilfe der Finite-Elemente-Methode entweder durch Verwendung eines inkrementellen Solvers oder durch den inversen Ansatz erfolgen.

Ein inkrementeller Solver ermöglicht eine sehr detaillierte Abbildung des Umformprozesses. Mithilfe der expliziten oder impliziten Zeitintegration des FE-Modells können beliebig viele Prozessschritte nacheinander abgebildet werden (mehrstufige Umformung). Die Rückhaltung (Niederhalter und Ziehsicken) und die Werkzeuge (Matrize, Stempel) müssen detailliert modelliert werden. Durch die Simulation des Umformens als zeitabhängiger Vorgang können auch die Prozessparameter wie Werkzeugbewegung und Niederhalterkraft zeitlich variabel gestaltet und simuliert werden. Eingabeparameter sind die initiale Form und Dicke des Bleches, die Geometrien der Werkzeuge, die Prozessparameter und Materialdaten.

Der Aufbau eines Simulationsmodells für die inkrementelle Umformung kann nur unzureichend automatisiert werden. Das FE-Modell der Werkzeuge, die Rückhaltung mit Niederhalter und Ziehsicken sowie ggf. der zeitliche Verlauf der Werkzeugbewegungen müssten nach jeder Geometrieänderung angepasst werden. Auch die Rechenzeiten sind als kritisch für die Optimierungsdauer einzustufen.

Beim inversen Ansatz (Guo et al. 1990, auch OneStep genannt) werden die Knotenpositionen in der initialen, ebenen und unverformten Platine bestimmt, die mit den Knotenpositionen des umgeformten Bauteils korrespondieren. Dies geschieht durch eine iterative Abwicklung des Schalennetzes vom umgeformten Bauteil. Das umgeformte Bauteil ist dabei Teil der Eingangsdaten. Neben dem FE-Netz des umgeformten Bleches, werden die Materialdaten inklusive der Spannungs-Dehnungs-Kurve, der initialen Schalendicke, des Reibungskoeffizienten und der Randbedingungen (Rückhaltung an der Blechkontur) als Eingangsdaten spezifiziert.

Der nichtlineare Solver basiert auf den Annahmen eines linearen Verzerrungspfad und eines isotropen Materialverhaltens. Durch die Annahme eines linearen Verzerrungspfad können nur einstufige Umformprozesse realitätsnah simuliert werden. In der Software AutoForm[®] wird das Blech als Membran mit zusätzlicher Biegesteifigkeit behandelt (Kubli et al. 1991).

Aufgrund dieser Vereinfachungen dauert eine Simulation üblicherweise nur wenige Sekunden und der inverse Ansatz kann verhältnismäßig einfach in die Optimierung implementiert werden, da die Werkzeuge nicht explizit modelliert werden müssen und das Preprocessing dadurch effizient als batch-Prozess (ohne

Interaktion mit dem Benutzer) umgesetzt werden kann. Der inverse Ansatz ist allerdings eine Idealisierung des realen Tiefziehprozesses und die Ergebnisse sind nicht so akkurat wie die Ergebnisse aus einer inkrementellen Umformsimulation. Beispielsweise wird der Verzerrungspfad A-B in Abbildung 2–8 unter Annahme von dessen Linearität vom OneStep-Solver errechnet. Dieser lineare Verzerrungspfad erscheint unkritisch. Durch ungünstige Prozessparameter kann der reale Verzerrungspfad deutlich abweichen (gestrichelte Linie), was zu Reißern führen würde. Dies geschieht beispielsweise, wenn eine Stelle der Platine initial an einer Stempelverrundung anliegt und dort zunächst stark gedehnt wird. Nach dem Abgleiten von der Stempelverrundung kann diese Stelle wieder gestaucht werden, sodass der finale Dehnungszustand unkritisch ist. Tritt bei der initialen Dehnung ein Versagen auf, wird dies vom OneStep-Solver nicht erkannt, da der zeitliche Ablauf nicht berücksichtigt wird. Damit bildet der OneStep-Solver den bestmöglichen Fall eines Umformprozesses ab. Außerdem erlauben die OneStep-Ergebnisse keine präzise Vorhersage der Faltenbildung.

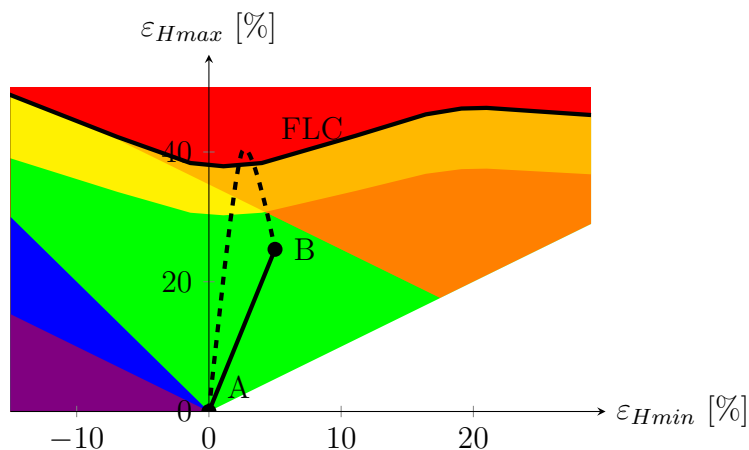


Abbildung 2–8: FLD (vgl. Abbildung 2–3a) mit beispielhaften Verzerrungspfaden

Beispielhafte Ergebnisse für den inversen Ansatz werden am S-Rail aus Roll et al. (2008) erläutert. Die Geometrie des S-Rails ist in Abbildung 2–9 gezeigt. Die Wandstärke beträgt $b = 1$ mm. Für genauere Maße wird auf die Veröffentlichung verwiesen, in der auch das verwendete Material HC260LAD entsprechend Abbildung 2–10 charakterisiert wird. Als Reibungskoeffizient wird $\mu_0 = 0.05$ verwendet. Der Stempel bewegt sich entgegen der z -Richtung.

Um den Effekt der Niederhalterkraft und von Ziehsicken zu zeigen, wird die Rückhaltung variiert. Dazu gibt Autoform[®] die Möglichkeit an FE-Knoten am Bauteilrand eine Rückhaltung zwischen 0 und 1 zu definieren. Eine Rückhaltung von 0 bedeutet, dass der Bauteilrand frei ist, es also keinen Niederhalter gibt.

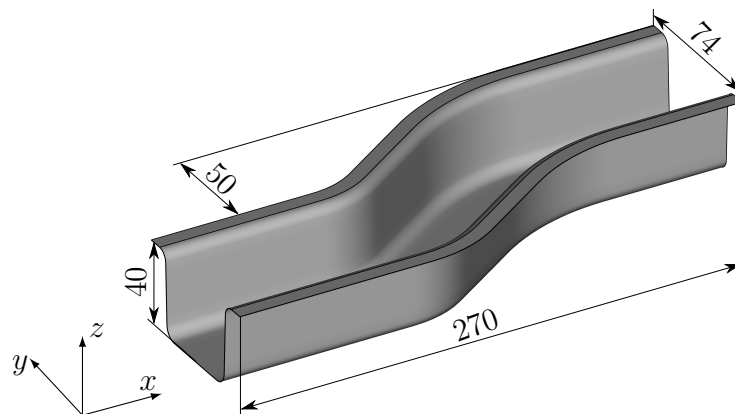


Abbildung 2-9: S-Rail – Geometrie, Maße in mm

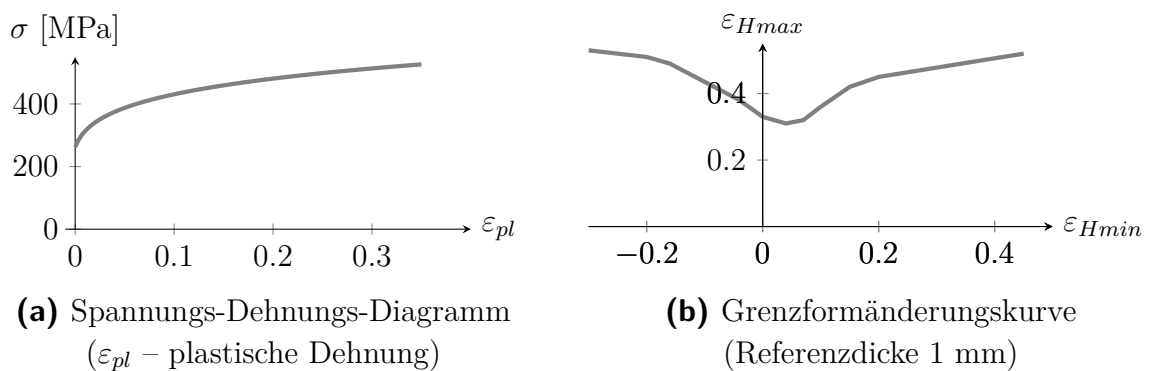


Abbildung 2-10: Materialdaten des Stahls HC260LAD

Das Tiefziehen ohne Niederhalter wird als Crashformen bezeichnet. Die Hauptdehnungen für das Crashformen des S-Rails werden in Abbildungen 2-11a und 2-11b gezeigt. Dabei erstellt Autoform[®] ein adaptiv verfeinertes Tria-Netz der Blechoberseite, die zum Stempel zeigt. Das Tiefziehen wird auch mit einer Rückhaltung von 0.3 berechnet, die im Gegensatz zu Roll et al. (2008) am gesamten Bauteilrand vorgegeben wird (vgl. Abbildungen 2-11c und 2-11d). Die Ergebnisse mit beiden Rückhaltungsvariationen weisen die höchsten Dehnungen in doppelt gekrümmten Bereichen auf sowie in der Nähe der Rückhaltung. Den Effekt der Rückhaltung zeigt Abbildung 2-12. Während beim Crashformen nur sehr geringe Dehnungen auftreten, führt die Rückhaltung von 0.3 zu Dehnungszuständen oberhalb der FLC. Damit kommt es beim Tiefziehen zu Reißen. Die geringen Dehnungen beim Crashformen hingegen begünstigen die Faltenbildung. Somit muss entweder die Rückhaltung oder das Bauteil modifiziert werden.

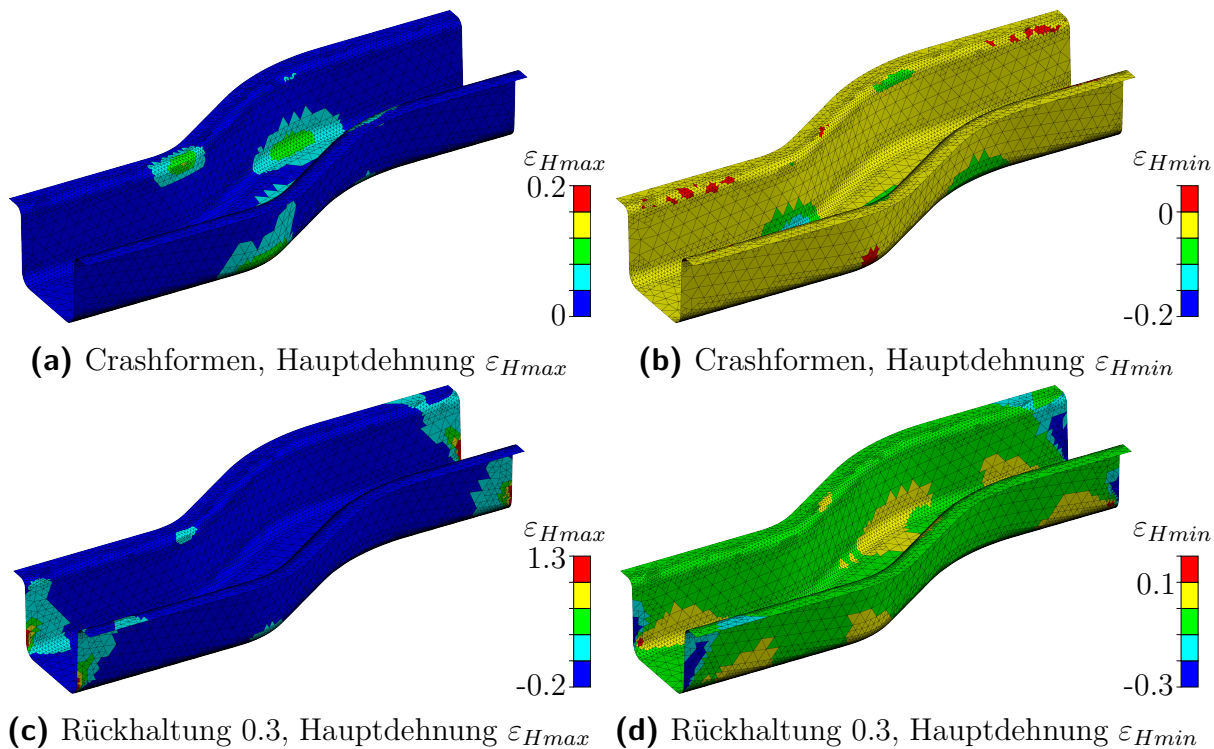


Abbildung 2–11: S-Rail – Ergebnisse der Tiefziehberechnungen mit dem inversen Ansatz

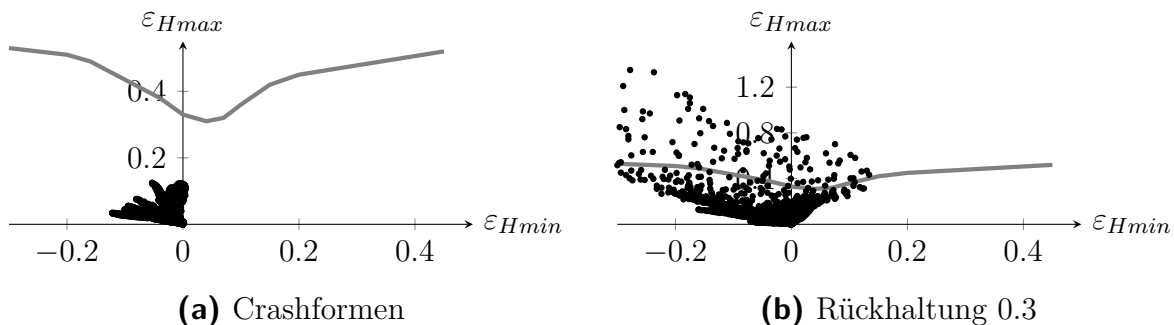


Abbildung 2–12: Formänderungsdiagramm (FLD) mit Ergebnissen des S-Rails

Die beiden prinzipiellen Ansätze zur Umformsimulation mittels FEM werden in Tabelle 2–2 verglichen. Aufgrund des Simulationsaufwandes und der batch-Fähigkeit wird in dieser Arbeit der inverse Ansatz verfolgt. Die inkrementelle Simulation würde zudem zu nicht vertretbaren Rechenzeiten führen. Wong (1999) nennt als Rechenzeiten für inkrementelle Solver die Größenordnung Tage im Gegensatz zu Minuten für den inversen Ansatz. Steinbeck-Behrens et al. (2012) geben eine OneStep-Berechnungszeit von weniger als einer Minute an im Vergleich zur inkrementellen Umformsimulation mit mehreren Stunden.

Tabelle 2–2: Vergleich inkrementeller Solver und inverser Ansatz

Kriterium	Inkrementeller Solver	Inverser Ansatz
Modellierung Werkzeug	detailliert	nicht benötigt
Eingabedaten Blech	im initialen Zustand (ebener Platinenzuschnitt)	im umgeformten Zustand
Zeitabhängigkeit	Prozessparameter können zeitabhängig simuliert werden	keine Zeitabhängigkeit modellierbar
Mehrstufigkeit	sehr gut abbildbar	schlecht abbildbar
Springback	wird berücksichtigt	wird nicht berücksichtigt
Reißer	gut vorhersagbar	vorhersagbar
Faltenbildung	vorhersagbar	ungenau vorhersagbar
Ergebnisqualität	sehr gut	für frühe Phase der Produktentwicklung geeignet
Rechenzeit	groß	gering

2.3 Grundlagen der Strukturoptimierung

In diesem Kapitel werden zunächst Begrifflichkeiten der Strukturoptimierung erklärt. Daraufhin werden die Arten der Strukturoptimierung und Optimierungsalgorithmen klassifiziert. Anschließend werden anhand der zuvor erklärten Kriterien ausgewählte Verfahren zur Topologieoptimierung vorgestellt.

2.3.1 Begriffsdefinitionen

Als Optimierung wird die algorithmierte Suche nach dem besten erreichbaren Resultat („Optimum“) oder zumindest nach einem verbesserten Resultat verstanden. Zur Veränderung der Struktur können Sensitivitäten oder Heuristiken zum Einsatz kommen. Die Strukturoptimierung ist die Optimierung eines Bauteils hinsichtlich seiner strukturmechanischen Eigenschaften. Weitere Begriffe werden in Tabelle 2–3 definiert.

Tabelle 2–3: Begriffsdefinitionen für die Strukturoptimierung,
modifiziert aus Ortmann (2015)

Begriff	Erklärung
Struktur- eigenschaft	Mathematische Beschreibung einer Eigenschaft der zu optimierenden Struktur, wie z.B. der Masse oder der Steifigkeit
Entwurfs- variable	Veränderlicher Parameter der zu optimierenden Struktur, beispielsweise die Wanddicke einer Blechstruktur. Die Werte aller Entwurfsvariablen werden in dem Entwurfsvariablenvektor \mathbf{x} zusammengefasst.
Struktur- modell	Das Strukturmodell $\tilde{\mathbf{x}}$ beinhaltet die geometrische Darstellung des Berechnungsmodells. Diese hängt von den Entwurfsvariablen ab. Teilweise ändern Entwurfsvariablen das Strukturmodell direkt (z.B. Wandstärken), teilweise erfolgt die Änderung indirekt, indem die Entwurfsvariablen \mathbf{x} auf das Strukturmodell $\tilde{\mathbf{x}}$ gemappt werden. Dieses Mapping geschieht beispielsweise, indem die Entwurfsvariablen den implizit beschriebenen Strukturrand verändern (z.B. Level Set, vgl. Kapitel 2.3.4) oder die Struktur von Elementdichten beschrieben wird, welche die gefilterten Entwurfsvariablen sind (Dichtemethode mit Dichtefilter, vgl. Kapitel 3.4.2).
Bauraum/ De- signbereich/ Non-Design- Bereich	Der Bauraum Ω ist der Bereich einer Struktur, in der sich das Bauteil ausbilden darf. Der Bauraum kann beispielsweise durch Anbauteile eingeschränkt werden. Sind Bereiche des betrachteten Bauteils vorgegeben (Lagerpunkte etc.), werden diese Non-Design-Bereich genannt. Bereiche, die durch die Veränderung der Entwurfsvariablen beeinflusst werden, gehören zum Designbereich. Designbereich und Non-Design-Bereich bilden den Bauraum.
Zielfunktion	Mathematische Beschreibung des Ziels der Optimierung $f(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$, also der Eigenschaft, die optimiert (maximiert oder minimiert) werden soll. In der Strukturoptimierung wird hierfür eine Struktureigenschaft oder ein mathematischer Ausdruck aus mehreren Struktureigenschaften verwendet. Die Festlegung auf eine Minimierung der Zielfunktion stellt keine Einschränkung dar, da $\max_{\tilde{\mathbf{x}}} f(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = -\min_{\tilde{\mathbf{x}}} -f(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u})$.

Begriff	Erklärung
Restriktion/ Nebenbedin- gung	Mathematische Beschreibung einer Einschränkung, die wäh- rend der Optimierung berücksichtigt werden muss. Hierfür werden, wie bei der Definition der Zielfunktion, Strukturei- genschaften verwendet. Es werden Ungleichheitsrestriktionen $\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \leq \mathbf{0}$ und Gleichheitsrestriktionen $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ unter- schieden.
Fertigungs- restriktion	Wird die Herstellbarkeit eines Bauteils berücksichtigt, kann die Struktur i.d.R. nicht mehr alle möglichen Geometrien an- nehmen. Ist die Fertigungsrestriktion mathematisch beschreib- bar, kann sie ein weiterer Teil der Restriktionen $\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}) \leq \mathbf{0}$ oder $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ sein. Kann die Fertigungsrestriktion nicht mathematisch formuliert werden, wird die Ausprägung des Strukturmodells implizit eingeschränkt.
Optimierungs- aufgabe/ Optimierungs- problem	Zusammenfassung der Zielfunktion, Restriktionen und Ent- wurfsvariablen in einer geschlossenen Problembeschreibung. Ein Beispiel hierfür ist die Minimierung der Masse einer Struk- tur unter Einhaltung von Steifigkeitsrestriktionen und unter Verwendung der Wanddicken der Struktur als Entwurfsvaria- blen. Mathematische Formulierung: $\begin{array}{ll} \min_{\tilde{\mathbf{x}}} & f(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) & \text{Minimierung der Zielfunktion} \\ \text{s.t.} & \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \leq \mathbf{0} & N_G \text{ Ungleichheitsrestriktionen} \\ & \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \mathbf{0} & N_H \text{ Gleichheitsrestriktionen} \\ & \mathbf{x}_{min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{max} & \text{explizite Restriktionen/} \\ & & \text{Entwurfsraum} \\ & \mathbf{x} \mapsto \tilde{\mathbf{x}} & \text{Mapping der Entwurfsvariablen } \mathbf{x} \\ & & \text{auf das Strukturmodell } \tilde{\mathbf{x}} \\ & \mathbf{K}(\tilde{\mathbf{x}})\mathbf{u} = \mathbf{p} & \text{beispielhafte Zustandsgleichung} \end{array}$
Optimierungs- algorithmus	Mathematische Handlungsvorschrift zur Lösung eines Op- timierungsproblems, also zur Minimierung der Zielfunktion mit Berücksichtigung der Restriktionen durch eine sukzessive Veränderung des Entwurfsvariablenvektors.
Sensitivität	Ableitung einer Struktureigenschaft nach einer Entwurfsvaria- ble $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g_i}{\partial x_i}, \frac{\partial h_k}{\partial x_i}$

Begriff	Erklärung
Lagrange-funktion	Umformulierung einer restringierten Optimierungsaufgabe in eine Gleichung mit Lagrangemultiplikatoren $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$ und Schlupfvariablen $\boldsymbol{\mu}$
	$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{N_G} \lambda_j (g_j(\mathbf{x}) + \mu_j^2) + \sum_{k=1}^{N_H} \lambda_k h_k(\mathbf{x}) \quad (2-28)$
Optimalitätskriterien	Optimalitätskriterien werden verwendet, um mögliche Optimalpunkte eines Problems aufzufinden. In der nichtlinearen Optimierung sind die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen (KKT, Kuhn und Tucker 1951) ein notwendiges Optimalitätskriterium. Sind die Bedingungen

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}^*} &= 0 && \text{für alle Entwurfsvariablen } i \\ \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} \right|_{\mathbf{x}^*} &= 0 && \text{für } j = 1 \dots N_G \\ \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_k} \right|_{\mathbf{x}^*} &= 0 && \text{für } k = 1 \dots N_H \\ \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_j} \right|_{\mathbf{x}^*} &= 0 && \text{für } j = 1 \dots N_G \end{aligned}$$

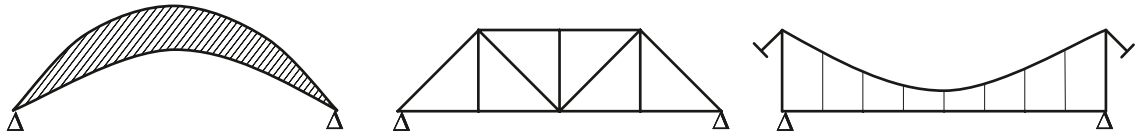
erfüllt, so handelt es sich an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ um einen stationären Punkt, also ein lokales Minimum, Maximum oder einen Sattelpunkt.

2.3.2 Arten der Strukturoptimierung

Abbildung 2–13 zeigt eine Einteilung der Strukturoptimierungsaufgaben nach Art der Entwurfsvariablen.

- Bauweise: Die Wahl der Bauweise ist der allgemeinste Optimierungsansatz, deshalb könnten hiermit die besten Optimierungsergebnisse erzielt werden. Algorithmierte Optimierungsmethodiken, die die Wahl der Bauweise beinhalten, sind nicht etabliert. Die Wahl der Bauweise beinhaltet z.B. die Entscheidung, ob eine mechanisch belastete Struktur als Metallprofil, als Fachwerk oder als Verbundstruktur eingesetzt werden soll.

Wahl der Bauweise:



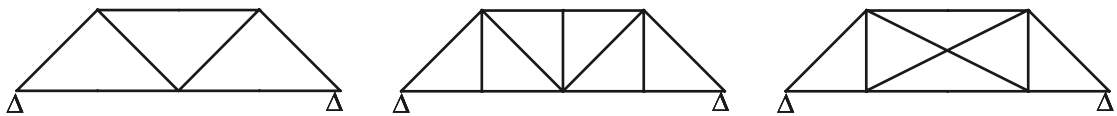
Wahl der Materialeigenschaften:

Aluminium

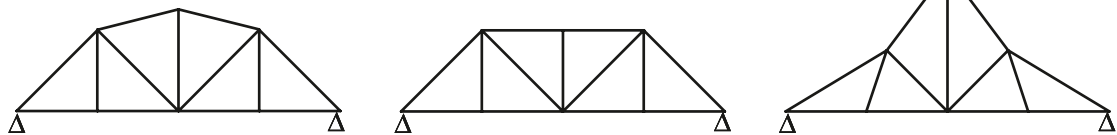
Stahl

Verbundwerkstoffe

Topologieoptimierung:



Formoptimierung:



Dimensionierung:

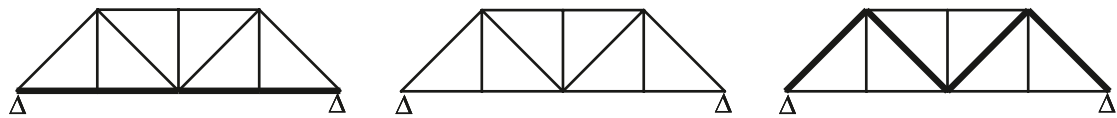


Abbildung 2–13: Klassifizierung von Strukturoptimierungsaufgaben nach der Art der Entwurfsvariablen, modifiziert aus Schumacher (2013)

- **Material:** Die Wahl des Materials kann im allgemeinsten Fall zu unterschiedlichen Materialeigenschaften an jedem Punkt der Struktur führen. Wie in Kennedy (2015) können auch diskrete Materialien vorgegeben werden, deren Verteilung optimiert wird.
- **Topologie:** Die Topologie beschreibt den Zusammenhang von Gebieten im Raum. Ein Ring und eine Tasse mit geschlossenem Henkel weisen trotz ihrer unterschiedlichen Gestalt die gleiche Topologiekategorie auf, denn beide weisen ein Loch auf. Robert Le Ricolais umschreibt die Topologieoptimierung folgendermaßen: „the art of structure is [...] where to put the holes“ (Bendsøe und Sigmund 2004). Abbildung 2–13 erläutert, dass die Veränderung der Anzahl und Anordnung von Fachwerkstäben zu einer Topologieänderung führt.

- Form: Bei der Formoptimierung wird die Topologie des Bauteils nicht verändert. Wie in Abbildung 2–13 gezeigt, können bspw. die Positionen der Fachwerkknoten verändert werden.
- Dimension: Die Dimensionierung beschreibt die Optimierung von Querschnitten (z.B. Wandstärken) der Struktur ohne Veränderung von Topologie und Form.

Die alleinige Optimierung der mathematischen Topologiekategorie einer mechanischen Struktur ist in der Regel nicht zielführend. Daher wird der Begriff der Topologieoptimierung meist für eine kombinierte Topologie- und Formoptimierung oder eine Kombination aus Topologie- und Formoptimierung sowie Dimensionierung verwendet.

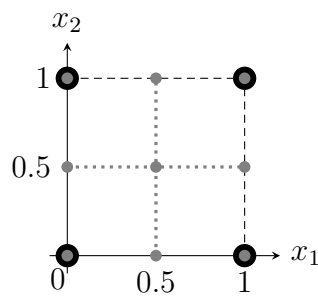
2.3.3 Einordnung von Optimierungsalgorithmen

Lokale/globale Verfahren

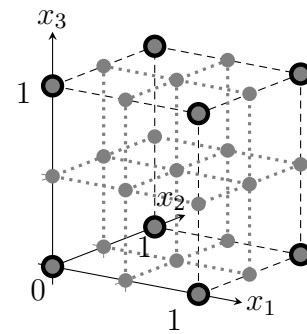
Ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal von Optimierungsalgorithmen ist die Art der Abtastung des Entwurfsraums. Lokale Algorithmen starten an einem Punkt im Entwurfsraum und verändern die Entwurfsvariablen sukzessive in jeder Iteration anhand von Kriterien aus der letzten Iteration. Damit wird zumeist nur ein kleiner Teil des Entwurfsraums abgetastet.

Globale Algorithmen können Kombinationen aus den Entwurfsvariablen über den gesamten Entwurfsraum verteilen. Sie sind zielführend für wenige Entwurfsvariablen, da die nötigen Funktionsaufrufe für eine ausreichend gute globale Abtastung des Entwurfsraum exponentiell mit der Anzahl der Entwurfsvariablen ansteigen. Dies wird beispielhaft für vollfaktorielle Versuchspläne in Abbildung 2–14 gezeigt.

Die Wahrscheinlichkeit, das globale Optimum mit lokalen Verfahren zu finden, hängt stark von der Art der Zielfunktion und der Restriktionen ab. Dies zeigt Abbildung 2–15. Die entscheidende Eigenschaft der beispielhaften Funktion f ist die Konvexität. Diese Funktion ist konvex, wenn deren zweite Ableitung nach der Entwurfsvariable $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geq 0$ ist. Das bedeutet, dass die Verbindung zweier beliebiger Punkte A und B auf der Funktion immer oberhalb oder auf der Funktion liegt. Ist die Konvexität gewährleistet, gibt es nur ein Minimum, das globale Minimum (Punkt C in Abbildung 2–15a). Die KKT-Bedingungen sind dann hinreichend. Somit können lokale Verfahren das globale Optimum finden, gradientenbasierte Verfahren tun dies mit Sicherheit.

**(a)** 2 Entwurfsvariablen:

2 Level (schwarz) $2^2 = 4$ Funktionsaufrufe
 3 Level (grau) $3^2 = 9$ Funktionsaufrufe

**(b)** 3 Entwurfsvariablen:

2 Level (schwarz) $2^3 = 8$ Funktionsaufrufe
 3 Level (grau) $3^3 = 27$ Funktionsaufrufe

Abbildung 2–14: Globale Abtastung des Entwurfsraums mit vollfaktoriellen Versuchsplänen

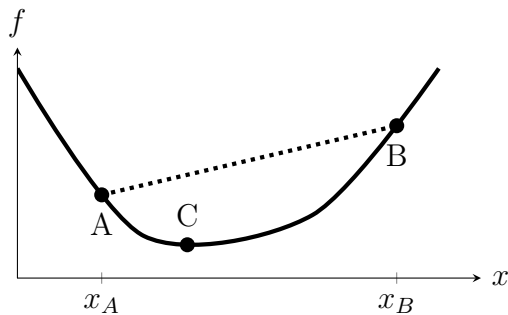
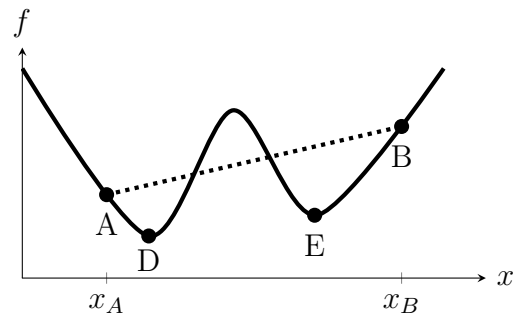
**(a)** Konvexe Funktion**(b)** Nicht-konvexe Funktion

Abbildung 2–15: Beispiel zur Konvexität einer Funktion, modifiziert aus Schumacher (2013)

Nichtkonvexe Funktionen wie in Abbildung 2–15b können mehrere lokale Minima (Punkte D und E) aufweisen. Lokale Verfahren können damit das globale Optimum am Punkt D nicht mit Sicherheit finden. Welches Minimum gefunden wird, hängt maßgeblich vom Startentwurf ab.

Globale Verfahren sind damit gut geeignet, um für wenige Entwurfsvariablen auch in komplizierten Versuchsräumen ein gutes Optimum zu finden. Die Wahrscheinlichkeit, das globale Optimum in nicht-konvexen Optimierungsaufgaben zu finden, ist mit globalen Algorithmen größer.

Für die linear-statische Topologieoptimierung werden üblicherweise viele Entwurfsvariablen benötigt, da ein fein aufgelöster Bauraum für gute Optima sorgen kann. Deshalb werden in dieser Arbeit lokale Verfahren verwendet.

Verwendung von Approximationen

Da der Funktionsverlauf der mechanischen Struktureigenschaften üblicherweise nicht analytisch in Abhängigkeit von den Entwurfsvariablen beschrieben werden kann, werden häufig Approximationen für die Optimierung benutzt. Ist man in der Lage, genaue mathematisch formulierte Approximationen für Zielfunktion und Restriktionen zu finden, so kann man ohne weitere Funktionsaufrufe auf der Approximation optimieren.

Es werden lokale und globale Approximationen unterschieden. Lokale Approximationen beschreiben den Verlauf der Zielfunktion und Restriktionen im Bereich um die aktuellen Entwurfsvariablen. Diese Approximationen können beispielsweise anhand der Sensitivitäten gebildet werden. Globale Approximationen erstrecken sich über große Teile des Entwurfsraums oder über den gesamten Entwurfsraum und können beispielsweise aus den Ergebnissen eines vollfaktoriellen Versuchsplans als Näherungsfunktion (z.B. aus Polynomen) abgeleitet werden. Mathematisch formulierte globale Approximationen werden auch Metamodelle genannt.

Verwendung von Sensitivitäten und Heuristiken

In der Strukturoptimierung erfolgt die Änderung der Entwurfsvariablen entweder aufgrund von Heuristiken oder aufgrund von Sensitivitäten, also den mathematisch hergeleiteten Gradienten der Zielfunktion und Restriktionen. Heuristiken sind Regeln zum direkten Lösen eines Problems. Sie sollen „mit unvollständigem eingeschränkten Wissen schnell [...] eine möglichst gute Lösung finden“ (Fiebig 2016).

Anhand der Sensitivitäten kann unter Verwendung von geeigneten Optimierungsalgorithmen eine Struktur unter allen Umständen verbessert werden, wenn die Struktur noch kein lokales Minimum darstellt. Heuristiken sind in der Strukturoptimierung oft Ansätze aus abgeleitetem Expertenwissen, die für bestimmte Probleme zielführend sind. Da Heuristiken nicht auf beliebige Optimierungsprobleme übertragbar sind, ist eine Verbesserung einer Struktur auf Basis von Heuristiken nicht in jedem Fall zu erwarten.

Einige Bereiche in der Strukturoptimierung lassen eine Bestimmung der Sensitivitäten nicht zu, so beispielsweise bei expliziter Zeitintegration (für hochgradig nichtlineares Strukturverhalten, Ortmann 2015) oder bei Fertigungsrestriktionen mit integrierter Fertigungssimulation. Bei Nichtlinearitäten wie Kontakt oder nicht-linearem Material ist die Berechnung der Sensitivitäten sehr aufwendig und damit nicht für komplexe Strukturen geeignet. In solchen Fällen muss auf Heuristiken zurückgegriffen werden, um Verbesserungen zu erreichen.

Weitere Unterscheidungsmerkmale für Optimierungsverfahren sind

- **kontinuierliche oder diskrete Entwurfsvariablen:** Kontinuierliche Entwurfsvariablen können zwischen einer oberen und einer unteren Grenze jeden Wert annehmen, diskrete Entwurfsvariablen können nur bestimmte, vordefinierte Werte annehmen. Sind für die Entwurfsvariablen nur die Zustände 0 oder 1 zulässig, so spricht man von binärer Kodierung.
- **kontinuierliche oder diskrete Strukturmodelle:** Diskrete Strukturmodelle besitzen einen scharfen Rand. Sie weisen nur die Zustände „Material vorhanden“ oder „Material nicht vorhanden“ auf. Kontinuierliche Strukturmodelle besitzen einen Übergangsbereich zwischen diesen Zuständen.
- **Lagrange- oder Euler-Ansatz:** Beim Lagrange-Ansatz wird das Rechenetz während der Optimierung verändert, es folgt dem Bauteilrand. Der Euler-Ansatz beschreibt ein gleichbleibendes Netz über die gesamte Optimierung (Sigmund und Maute 2013).

2.3.4 Topologieoptimierungsverfahren

Ausgewählte Verfahren zur Topologieoptimierung statischer Lastfälle werden in Tabelle 2–4 gemäß der in Kapitel 2.3.3 aufgeführten Kriterien eingeordnet und anschließend beschrieben. Aufgrund immer neuer Entwicklungen in der Topologieoptimierung erhebt diese Übersicht keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Durch neue Varianten und Kombinationen der beschriebenen Optimierungsverfahren können die Kriterien zur Einordnung fließend ineinander übergehen.

Die Homogenisierungsmethode wurde von Bendsøe und Kikuchi (1988) (auch Bendsøe 1989) entwickelt und basiert auf porösem Material. Die Porositäten werden geometrisch bestimmt in einer Mikrozeile parametrisiert, um den homogenisierten Elastizitätstensor \mathbf{E}_{Ei} in Abhängigkeit von den geometrischen Eigenschaften der Mikrozeile, die als Entwurfsvariablen dienen, zu ermitteln. Für das makroskopische Optimierungsproblem können für jedes Finite Element i die Ableitungen der Struktureigenschaften nach den Entwurfsvariablen \mathbf{x} berechnet werden: $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{E}_{i,jk}} \frac{\partial \mathbf{E}_{i,jk}}{\partial \mathbf{x}_i}$. Anhand dieser Sensitivitäten kann ein geeigneter Optimierungsalgorithmus durch eine Änderung der Mikrostruktur jedes Finiten Elements die Struktur optimieren.

Tabelle 2–4: Kategorisierung von Verfahren zur Topologieoptimierung,
 ● – trifft zu, ○ – trifft teilweise zu, sonst: trifft nicht zu

Kriterien	Homogen.meth.	Dichtemethode	Level Set	SKO	Topolog. Ableit.	Bubble Meth.	ESO	BESO
Lokales Verfahren	●	●	●	●	●	●	●	●
Globales Verfahren								
Lokale Approximation	○ ⁸	○ ⁸	○ ⁸			○ ⁹		
Globale Approximation								
Sensitivitäten	●	●	●		●	●	○ ³	○ ³
Heuristiken			○ ⁷	●	○ ³		○	○
Kontinuierliche Entwurfsvariablen	●	●	●	●	○	●		
Diskrete Entwurfsvariablen					○		●	●
Kontinuierliche Strukturmodelle	● ¹	●	○ ⁴	●				
Diskrete Strukturmodelle	○ ²		○ ^{5,6}		●	●	●	●
Lagrange-Ansatz			○ ^{5,6}		○	●		
Euler-Ansatz	●	●	○ ⁴	●	○		●	●

¹ Makromodell ² Mikrozelle

³ Designupdate auf Basis von Sensitivitäten, aber Beschnitt des Modells zum Teil heuristisch

⁴ Abbildung des Randes mit Ersatzmaterial (Zwischendichten)

⁵ Abbildung des Randes durch Neuvernetzung ⁶ Abbildung des Randes mit xFEM

⁷ Originalfassung (Sethian und Wiegmann 2000), heute meist basierend auf Sensitivitäten

⁸ Lokale Approximation: z.B. MMA, zum Teil ohne Approximation wie Optimalitätskriterium

⁹ Lokale Approximation bei Formoptimierung möglich, Topologieänderung ohne Approximation

Die Dichtemethode (Zhou und Rozvany 1991) ist eine Vereinfachung der Homogenisierungsmethode. Anstatt die Eigenschaften eines Finiten Elements von einer realen Mikrostruktur abhängig zu machen, werden die physikalischen Eigenschaften (Elastizitätstensor, Dichte etc.) abhängig von einer Elementdichte $0 < \tilde{x}_i \leq 1$ in jedem Finiten Element interpoliert. Damit entfällt der Schritt der Homogenisierung, allerdings ist auch eine physikalische Interpretation als Mikrostruktur nicht mehr möglich. Eine Elementdichte $\tilde{x}_i \approx 0$ bedeutet, dass Element i nicht gefüllt ist (kein Material), eine Elementdichte $\tilde{x}_i \approx 1$ ist Vollmaterial. Als Sensitivitäten können die Ableitungen der Struktureigenschaften nach den Elementdichten $\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_i}$ bestimmt werden. Im Gegensatz zur Homogenisierungsmethode kann es bei der

Dichtemethode nur eine Entwurfsvariable pro Finites Element geben, was den Optimierungsaufwand verringert.

Bei der Level-Set-Methode (Osher und Sethian 1988, Sethian und Wiegmann 2000) wird eine Level-Set-Funktion $\phi(\mathbf{x})$ genutzt, deren Kontur bei $\phi(\mathbf{x}) = 0$ den Rand der Struktur Γ im Bauraum Ω beschreibt

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega : \phi(\mathbf{x}) < 0 \\ 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega : \phi(\mathbf{x}) \geq 0. \end{cases} \quad (2-29)$$

Abbildung 2–16 zeigt, wie aus der Level-Set-Funktion ϕ eine Struktur mit scharfem Rand abgeleitet wird (Projektion der Kontur $\phi(\mathbf{x}) = 0$ beschreibt orange Struktur). Diese klare Kontur ist ein Vorteil gegenüber der Dichtemethode, da es bei der Dichtemethode immer einen kontinuierlichen Übergang zwischen Vollmaterial ($\tilde{x} = 1$) und Loch ($\tilde{x} = 0$) gibt und so kein klarer Bauteilrand als Optimierungsergebnis vorliegt.

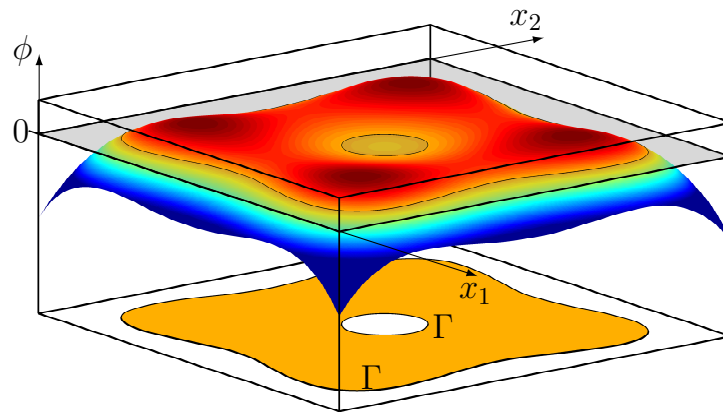


Abbildung 2–16: Level-Set-Ansatz für eine 2D-Optimierung, Einfärbung entsprechend Wert der beispielhaften Level-Set-Funktion ϕ

Die am häufigsten verwendeten Level-Set-Ansätze benötigen für die Sensitivitäten die Ableitung der Level-Set-Funktion $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}$. Die mechanische Struktur verändert sich für kleine Änderungen der Entwurfsvariablen $d\mathbf{x}$ nur durch eine Verlagerung des Randes. Daher sind die Sensitivitäten der Struktureigenschaften (für linear-statische Lastfälle mit konstanten Lasten, siehe Anhang B)

$$\frac{\partial f(\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x})))}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} - \boldsymbol{\kappa}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{u} \right) \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{K} \boldsymbol{\kappa} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \quad (2-30)$$

abseits des Randes vernachlässigbar (\mathbf{K} – Steifigkeitsmatrix, $\boldsymbol{\kappa}$ – adjungierter Zustandsvektor, \mathbf{u} – Vektor der Knotenverschiebungen). Somit sind Level-Set-Methoden Formoptimierungsmethoden, die keine Generierung neuer Löchern zulassen. Die Topologie kann sich nur durch Verschmelzen oder Verschwinden von Aussparungen ändern. Daher weisen Startentwürfe der Level-Set-Optimierung üblicherweise viele Aussparungen auf. Gegenstand der Forschung ist das Einbringen neuer Löcher während der Optimierung auf Basis von Heuristiken oder Topologischen Ableitungen.

Das SKO-Verfahren (Soft Kill Option, Baumgartner et al. 1992) ist ein evolutiv-närer Ansatz mit dem Ziel die Oberflächenspannung zu homogenisieren. Dabei wird der Elastizitätsmodul E_i eines Finiten Elements erhöht, wenn es eine höhere Spannung (maximale Spannung über alle Lastfälle) aufweist als ein benutzerdefinierter Referenzwert, und erniedrigt, wenn die Spannung geringer als dieser Referenzwert ist. Dabei gilt, dass der Elastizitätsmodul größer sein muss als ein Mindestwert und maximal so groß, wie der Elastizitätsmodul des Grundmaterials E_0 : $E_{min} \leq E_i \leq E_0$.

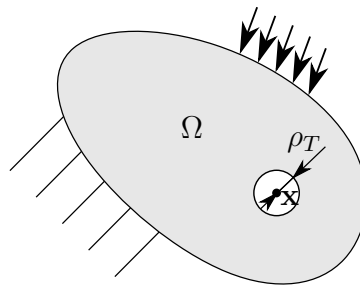
Die iterative Anpassung des Elastizitätsmoduls anhand des Spannungszustands wird als Wachstumsregel beschrieben (Harzheim 2014). Diese ist heuristisch und führt nicht unbedingt zu einer homogenisierten Spannung (z.B. bei einer Kerbe am Bauraumrand).

Die Topologische Ableitung wurde erstmals für die Topologie- und Formoptimierung von Eschenauer et al. (1994) genutzt. Sokołowski und Żochowski (1999) leiten die Topologische Ableitung der Struktureigenschaft f her als Differentialquotient

$$\mathcal{T}f(\mathbf{x}) = \lim_{\rho_T \searrow 0} \frac{f(\Omega \setminus B_{\rho_T}(\mathbf{x})) - f(\Omega)}{|B_{\rho_T}(\mathbf{x})|}, \quad (2-31)$$

wobei Ω der Bauraum ist und die Aussparung B_{ρ_T} vom Radius ρ_T an der Stelle \mathbf{x} infinitesimal wird (siehe Abbildung 2-17). Die Struktur mit der Aussparung wird mit $\Omega \setminus B_{\rho_T}(\mathbf{x})$ bezeichnet.

Damit beschreibt die Topologische Ableitung die Sensitivität einer Struktureigenschaft für das Einbringen einer infinitesimalen Aussparung in den Bauraum. Für einige Struktureigenschaften kann die Topologische Ableitung analytisch aus den Verschiebungen der Struktur berechnet werden. Diese Ableitung kann genutzt werden, um optimale Lochpositionen zu finden (z.B. für die Level Set oder Bubble-Methode) oder sie wird direkt in einem Optimierungsalgorithmus genutzt, um die Struktur in einer Optimierungsschleife zu verändern.

**Abbildung 2–17:** Topologische Ableitung

Die Bubble-Methode kombiniert Topologie- und Formoptimierung (Eschenauer et al. 1994, Schumacher 2013). Abwechselnd wird die Form der aktuellen Struktur optimiert und dann eine weitere Aussparung eingebracht. Die Ränder der Struktur werden mit Splines beschrieben, deren Koordinaten und Wichtungen der Kontrollpunkte als Entwurfsvariablen für die Formoptimierung dienen. Nach abgeschlossener Formoptimierung wird anhand der Topologischen Ableitung oder eines numerischen Lochpositionierungskriteriums die Topologie verändert, die neue Aussparung parametrisiert und die nächste Formoptimierung durchgeführt. Ein Beispiel zur Bubble-Methode zeigt Abbildung 2–18. Dabei wurde die Formänderungsenergie c einer Kragplatte minimiert, während die Volumenfüllung auf 50 % beschränkt wurde.

Alle bisher beschriebenen Verfahren wurden für kontinuierliche Entwurfsvariablen entwickelt, daher können diese Verfahren mit gradientenbasierten Optimierungsalgorithmen arbeiten. Die folgenden evolutionären Ansätze verwenden diskrete Entwurfsvariablen.

Der ESO-Ansatz (Evolutionary Structural Optimization, Xie und Steven 1993) nutzt eine FE-Diskretisierung, um iterativ Elemente zu entfernen. Dies kann anhand von Heuristiken (z.B. Elemente geringster Spannung) oder anhand von Sensitivitäten (Ableitung nach Elementdichte oder Topologische Ableitung) geschehen.

Im Gegensatz zu ESO beinhaltet der BESO-Ansatz (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization, Young et al. 1999) auch die Reaktivierung von Elementen. Die Reaktivierung geschieht wiederum anhand von Sensitivitäten oder Heuristiken (z.B. Anlagerung von Elementen an Bereichen hoher Spannung).

Ein detaillierter Vergleich einiger Optimierungsansätze erfolgt in Sigmund und Maute (2013).

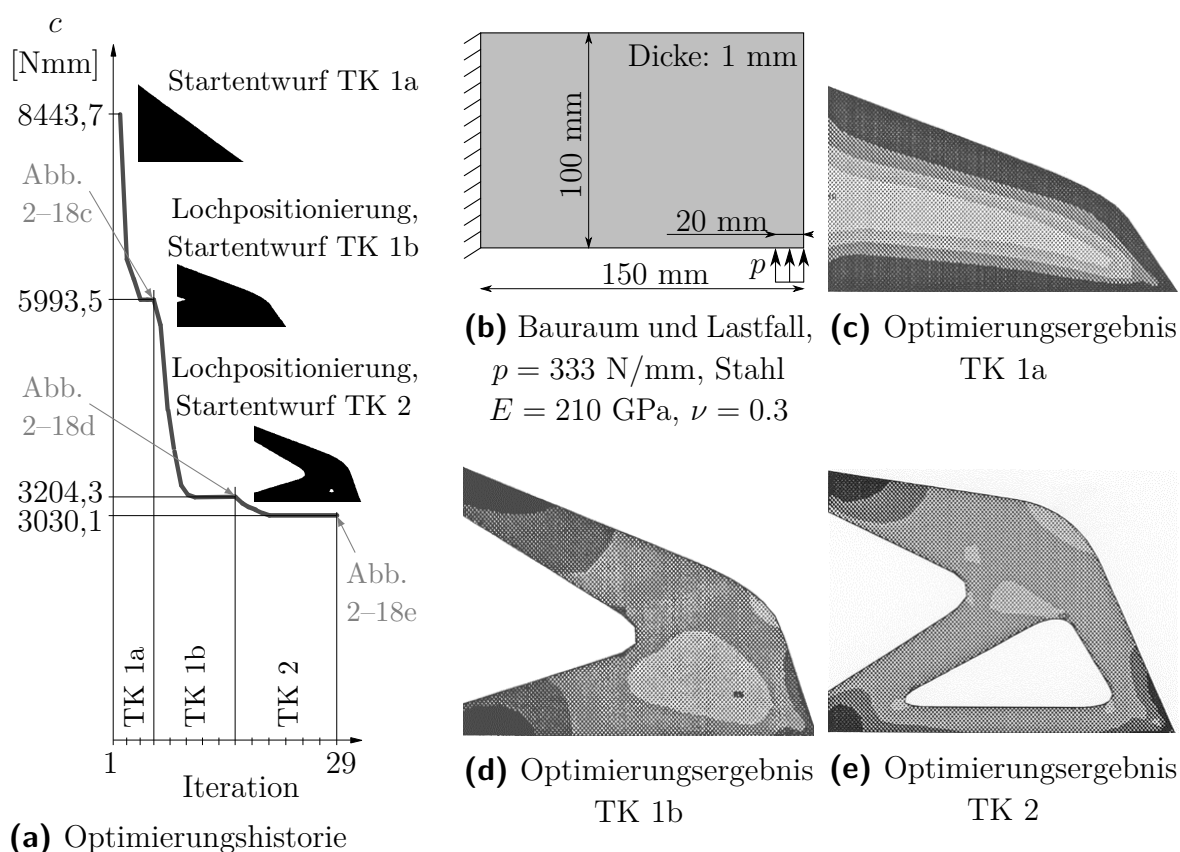


Abbildung 2–18: Beispiel zur Bubble-Methode, modifiziert aus Schumacher (2013),
 Abkürzung: TK – Topologieklasse

2.4 Stand der Technik zur Optimierung von tiefziehbaren Schalenstrukturen

Im Folgenden werden bestehende Verfahren für die Optimierung von Schalenstrukturen erläutert. Zunächst wird auf reine Formoptimierungsverfahren eingegangen, die im Folgenden mit der Topologieoptimierung gekoppelt werden. Diese Verfahren arbeiten mit einem Schalennetz und berücksichtigen keine Fertigungsrestriktion. Zuletzt wird auf die kombinierte Form- und Topologieoptimierung von Schalenstrukturen mit auf einem Volumennetz eingegangen. Dabei kommt bei einer Methode eine Fertigungsrestriktion für Strukturen konstanter Wandstärke ohne Hinterschnitte vor.

2.4.1 Formoptimierung

Zur Formoptimierung von Schalenstrukturen können grundsätzlich zwei Ansätze unterschieden werden. Entweder werden parametrisierte CAD-Modelle verwendet, deren Parameter optimiert werden und die automatisiert in ein FE-Modell überführt werden, oder es werden FE-Schalenmodelle verwendet, deren Knotenkoordinaten als Entwurfsvariablen dienen. Der Nachteil der CAD-Modelle liegt darin begründet, dass sie flexibel und stabil sein müssen, um jede mögliche Parameterkombination erzeugen zu können. Die Parametrisierung erfordert einen großen Aufwand und die Optimierungsergebnisse sind stark von der gewählten Parametrisierung abhängig. Analytische Sensitivitäten können für CAD-Parameter aus den Sensitivitäten der Knotenkoordinaten berechnet werden. Bletzinger et al. (2015) zeigen, dass Optimierung anhand von Splines als CAD-Parameter das gleiche ist wie die Optimierung anhand von regularisierten Knotenkoordinaten. Die Nutzung von Knotenkoordinaten als Entwurfsvariablen bietet die Möglichkeit der analytischen Berechnung der Sensitivitäten (Zienkiewicz und Campbell 1973), sodass Millionen von Entwurfsvariablen möglich sind. Einen problematischen Aspekt der gradientenbasierten Optimierung der Knotenkoordinaten zeigt Abbildung 2–19. Durch die Veränderung der Knotenkoordinaten können verzerrte FE-Netze entstehen, die aufgrund ihrer Ansatzfunktion die Optimierungsaufgabe sehr gut erfüllen, deren Diskretisierung das mechanische Problem aber nicht mehr korrekt abbildet.

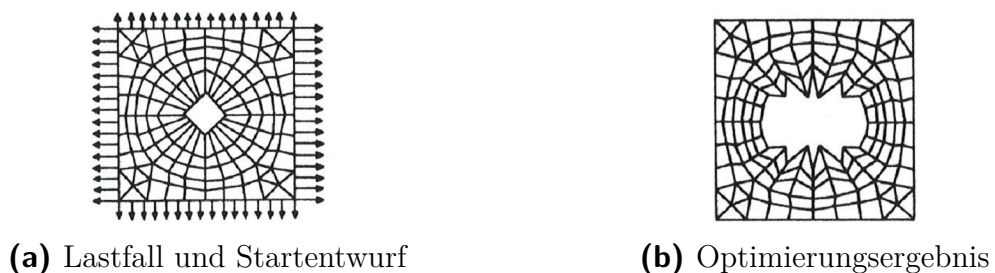


Abbildung 2–19: Knotenkoordinaten als Entwurfsvariablen Braibant et al. 1983

Shimoda und Liu (2014) behalten die Netzregularität bei, indem Ersatzkräfte so auf die Knoten verteilt werden, dass die sich daraus ergebende deformierte Struktur die optimierte Geometrie abbildet. Außerdem muss eine unkontrollierte Knotenverschiebung in Normalenrichtung der Schale durch lineare Federelemente mit der Federkonstanten α an jedem Knoten unterbunden werden (vgl. Abbildung 2–20a), die Wahl der Federkonstanten α beeinflusst das Optimierungsergebnis maßgeblich.

A bezeichnet dabei die initiale Schalenmittelfläche, V die optimierte Schalenmittelfläche, G sind die Ersatzkräfte. Mit dieser Methode wurden bisher lediglich Sicken optimiert. Große Formänderungen sind aufgrund der Netzregularität nicht möglich.

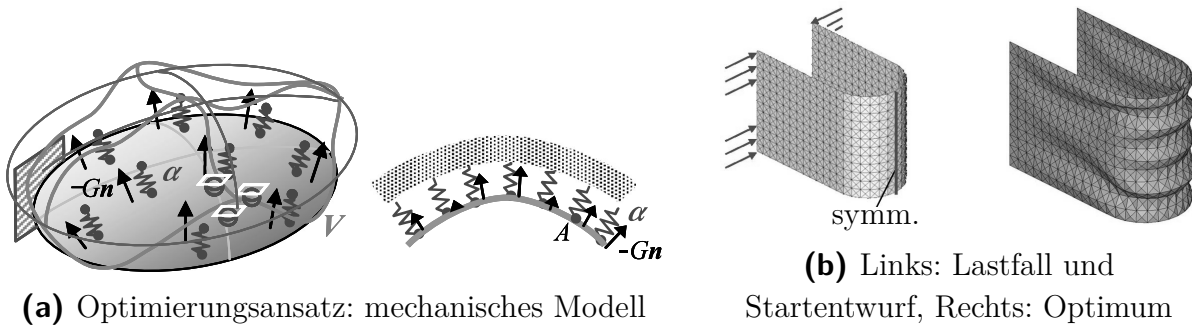


Abbildung 2–20: Formoptimierung einer Schale aus Shimoda und Liu (2014)

Bletzinger (2014) zeigt, dass große Formänderungen auch bei der Nutzung von Sensitivitäten der Knotenkoordinaten möglich sind, wenn Filtertechniken genutzt werden. Beim Filtern werden die Koordinaten in einem Nachbarschaftsbereich vom Filterradius R gemittelt. Diese Methode wird als Vertex Morphing Method (VMM) bezeichnet. Das Optimierungsergebnis ist maßgeblich von der Wahl des Filterradius R und der Querkontraktionszahl ν abhängig (vgl. Abbildung 2–21).

	a	b	c	d
ν	0	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
R [m]	beliebig	0.1	0.4	0.5

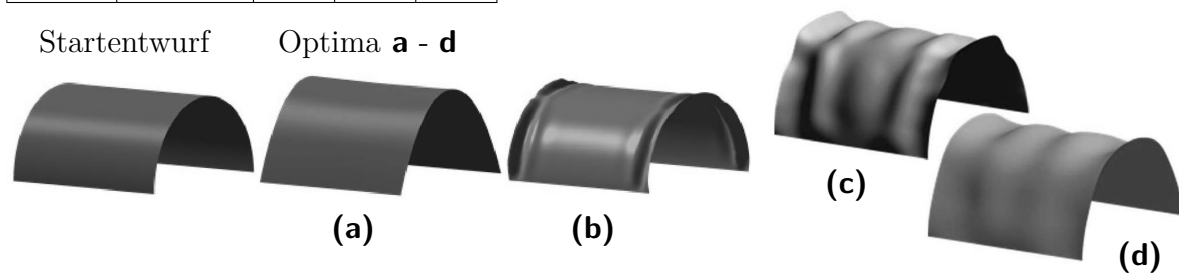


Abbildung 2–21: Formoptimierung eines zylindrischen Daches (Länge 2 m) unter Eigengewicht mit Querkontraktionszahl ν und Filterradius R (Bletzinger 2014)

2.4.2 Topologie- und Formoptimierung mit Schalenansatz

Ansola et al. (2002) kombinieren die Formoptimierung mit numerisch bestimmten Sensitivitäten und die Topologieoptimierung mit der Homogenisierungsmethode auf einem Schalennetz, indem diese beiden Schritte alternierend aufeinander folgen. Aufgrund der numerischen Sensitivitätsanalyse können nur einige wenige Entwurfsvariablen für die Formoptimierung effizient verwendet werden. Als Optimierungsalgorithmus wird SLP (Sequential Linear Programming) genutzt, wobei lineare Approximationen für die Zielfunktion und Restriktion(en) entwickelt werden. Abbildung 2–22 zeigt eine beispielhafte Optimierung mit diesem Ansatz.

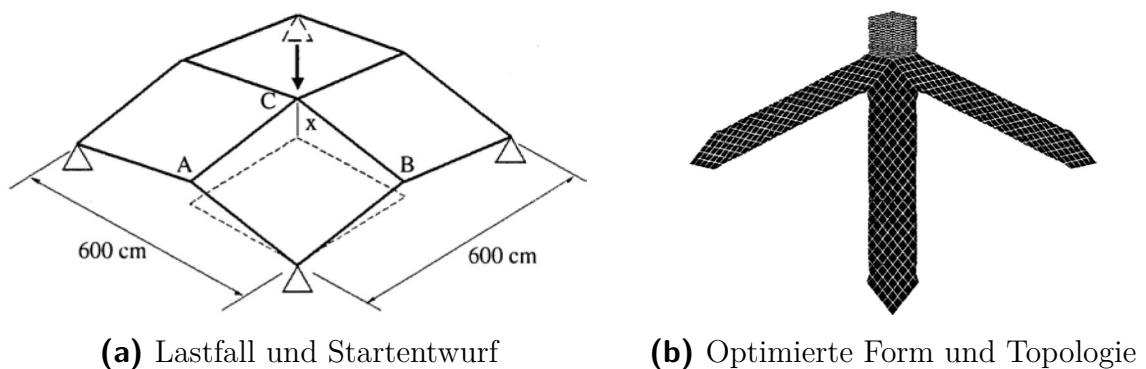


Abbildung 2–22: Optimierung einer Schale (Ansola et al. 2002),
einzige Entwurfsvariable für Formoptimierung ist x (Höhe von Punkt C)

Hassani et al. (2013) entwickelten diesen Ansatz weiter, indem Form- und Topologieoptimierung gleichzeitig durchgeführt werden. Sie beschreiben die Form mithilfe von NURBS (Non-uniform rational B-Splines, Spline-Fläche), die die Form sehr flexibel beschreiben können. Sie nutzen einen fortschrittlichen Optimierungsalgorithmus (MMA – Method of Moving Asymptotes, konvexe nichtlineare Approximation) und die Dichtemethode für die Topologieoptimierung.

Beide beschriebenen Ansätze nutzen Differenzenquotienten zur Bestimmung der Sensitivitäten der Entwurfsvariablen für die Formoptimierung. Dadurch kann nur eine geringe Anzahl dieser Entwurfsvariablen definiert werden und die Freiheit des Optimierers bei der Formfindung ist beschränkt. Das Optimierungsergebnis hängt außerdem maßgeblich von der Wahl der Entwurfsvariablen ab, die in den beschriebenen Ansätzen problemabhängig definiert werden müssen.

2.4.3 Topologie- und Formoptimierung für Schalenstrukturen mit der Dichtemethode auf einem Volumennetz

Ein Ansatz für die gleichzeitige Topologie- und Formoptimierung von tiefziehbaren Blechstrukturen wird in Zhou et al. (2011) beschrieben und wurde in den kommerziellen Optimierer und FE-Solver OptiStruct[®] implementiert. Dabei wird eine beliebige Stempelrichtung definiert, in deren Richtung die Struktur in N_P Elementsets mit jeweils N_C Elementen unterteilt wird. Die Summe der Elementdichten in diesen Elementsets wird mithilfe von N_P Restriktionen

$$\sum_{i=1}^{N_C} \tilde{x}_i \leq \frac{b_f}{w_K} \quad K = 1, \dots, N_P \quad (2-32)$$

beschränkt, wobei b_f die gewünschte Wandstärke und w_K die mittlere Netzgröße des K -ten Elementsets ist. Ein auftretendes Problem ist die Anzahl der Restriktionen, die je nach Bauraum und Stempelrichtung größer als 1000 werden kann und so ein Problem für den Optimierungsalgorithmus darstellt. Außerdem stimmt die Dickenrichtung einer gekrümmten Schale nicht mit der Stempelrichtung überein. Daher ist die Beschränkung der Elementdichten in Stempelrichtung wenig zielführend. Hinterschnitte in Stempelrichtung sind möglich, können aber durch eine geschickte Wahl des Filterradius R , des Penaltyexponenten s und der Wandstärke b_f vermieden werden.

Lochner-Aldinger und Schumacher (2014) sowie Lochner-Aldinger (2009) nutzen Ergebnisse der Dichtemethode ohne Fertigungsrestriktion, um Isoflächen (Flächen gleicher Elementdichte) aus den Optimierungsergebnissen zu extrahieren, die als Schalenmittelfläche verwendet werden. Zur Formfindung ist dieses Postprocessing geeignet, allerdings ist die Lösung eines Schalen-Optimierungsproblems mit dieser Methode nicht mit gesichert guten Ergebnissen möglich.

Die beiden in diesem Kapitel erläuterten Methoden zeigen, dass die Dichtemethode eine gleichzeitige Form- und Topologieoptimierung ermöglicht. Durch die effiziente Verwendung von vielen Entwurfsvariablen (> 1 Mio.) kann sowohl die Topologie als auch die Form sehr frei gewählt werden. Daher wird die Dichtemethode in dieser Arbeit weiterverfolgt und entsprechende Fertigungsrestriktionen zur Absicherung der Herstellbarkeit werden entwickelt.

Keine der aufgezeigten Optimierungsmethoden für Schalenstrukturen schließt bei der Optimierung die Herstellung mit ein. Somit können Optimierungsergebnisse entstehen, die nicht mit herkömmlichen Fertigungsverfahren herstellbar sind. Daher ist ein Ziel der vorliegenden Arbeit die Berücksichtigung der Herstellung.

3 Grundlagen der Dichtemethode zur Topologieoptimierung

In diesem Kapitel wird zunächst erklärt, wie die Struktur bei der Dichtemethode repräsentiert wird. Anschließend wird der Optimierungsablauf erläutert und auf jedes Element dieses Ablaufs eingegangen. Zum Schluss werden Optimierungsbeispiele für grundlegende Struktureigenschaften gezeigt und Auswirkungen von Änderungen der Optimierungsparameter aufgezeigt.

3.1 Elementdichten

Ziel der Topologieoptimierung ist es, für jeden Punkt im Bauraum festzulegen, ob dieser Teil des Bauteils ist oder nicht. Dabei soll eine beliebige Zielfunktion minimiert und alle Restriktionen eingehalten werden. Somit ist das ursprüngliche Optimierungsproblem binär, da es nur die Zustände „Material vorhanden“ $\tilde{x}_i(\mathbf{x}) = 1$ oder „nicht vorhanden“ $\tilde{x}_i(\mathbf{x}) = 0$ erlaubt. In mathematischer Form kann das Optimierungsproblem folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{\mathbf{x}}} \quad & f(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \leq \mathbf{0} \\ & \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \mathbf{0} \\ & \tilde{x}_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \text{im gesamten Bauraum } \Omega \\ & \mathbf{K}(\tilde{\mathbf{x}})\mathbf{u} = \mathbf{p} \quad \text{oder andere Zustandsgleichung} \end{aligned} \tag{3-1}$$

Für dieses Optimierungsproblem sind aufgrund der binären Strukturdarstellung effiziente gradientenbasierte Optimierungsverfahren nicht verwendbar und damit ist das Optimierungsproblem für viele Entwurfsvariablen mit mathematischen Algorithmen schwer zu lösen. Die Einführung von Elementdichten \tilde{x}_i für jedes

Finite Element i macht das Optimierungsproblem differenzierbar. Eine Elementdichte $\tilde{x}_i = 1$ bedeutet, dass an der Stelle i Material vorhanden ist, bei $\tilde{x}_i \approx 0$ befindet sich an dieser Stelle ein Loch. Die Restriktion für die Elementdichten im differenzierbaren Optimierungsproblem lautet damit

$$0 < \tilde{x}_i(\mathbf{x}) \leq 1. \quad (3-2)$$

Zwischendichten $0.1 \lesssim \tilde{x}_i \lesssim 0.9$ sind somit auch möglich. Im Sinne der Topologieoptimierung sollte jedoch eine Lösung mit großen Bereichen an Zwischendichten vermieden werden, da diese Bereiche nicht das ausgewählte, real existierende Material darstellen. Existieren viele Elemente mit Zwischendichten, erfordert dies auch eine gute manuelle Interpretation des Optimierungsergebnisses – verbunden mit einer möglicherweise aufwendigen Umsetzung in eine reale, suboptimale Konstruktion.

3.2 Optimierungsablauf

Der Optimierungsablauf mit der Dichtemethode ist in Abbildung 3-1 dargestellt. Dieser Ablauf und alle folgenden Erweiterungen wurden im C++-Programm FET (Finite Element based Topology optimization) umgesetzt. Alle Erweiterungen bezüglich tiefziehbarer Blechstrukturen sind im Modul FET/SheetMetal enthalten. In dieser Arbeit wurde die Einschränkung getroffen, dass der Designbereich ausschließlich aus Voxel-elementen mit gleichen Elementkantenlängen w besteht. Als FE-Solver kann ein interner FE-Solver benutzt werden, es wurden aber auch Schnittstellen zu kommerziellen Solvern integriert (OptiStruct[®] Analyse, Abaqus/Standard[®], LS-DYNA[®] implizit).

Im Anschluss an die Optimierung wird ein binäres FE-Modell (Black&White-Design) erstellt, um die Optimierungsergebnisse unabhängig von der Größe der Bereiche mit Zwischendichten vergleichbar zu machen. Dabei werden ausschließlich die Elemente mit den höchsten Elementdichten mitgerechnet, wobei die Masse im Vergleich zum Optimierungsergebnis mit Elementdichten beibehalten wird. Dazu werden

1. die Elemente absteigend nach der Elementdichte sortiert.
2. in der sortierten Reihenfolge so viele Elemente in das FE-Modell des Black&White-Designs übernommen, bis die Masse des Optimierungsergebnisses mit Elementdichten erreicht wird.

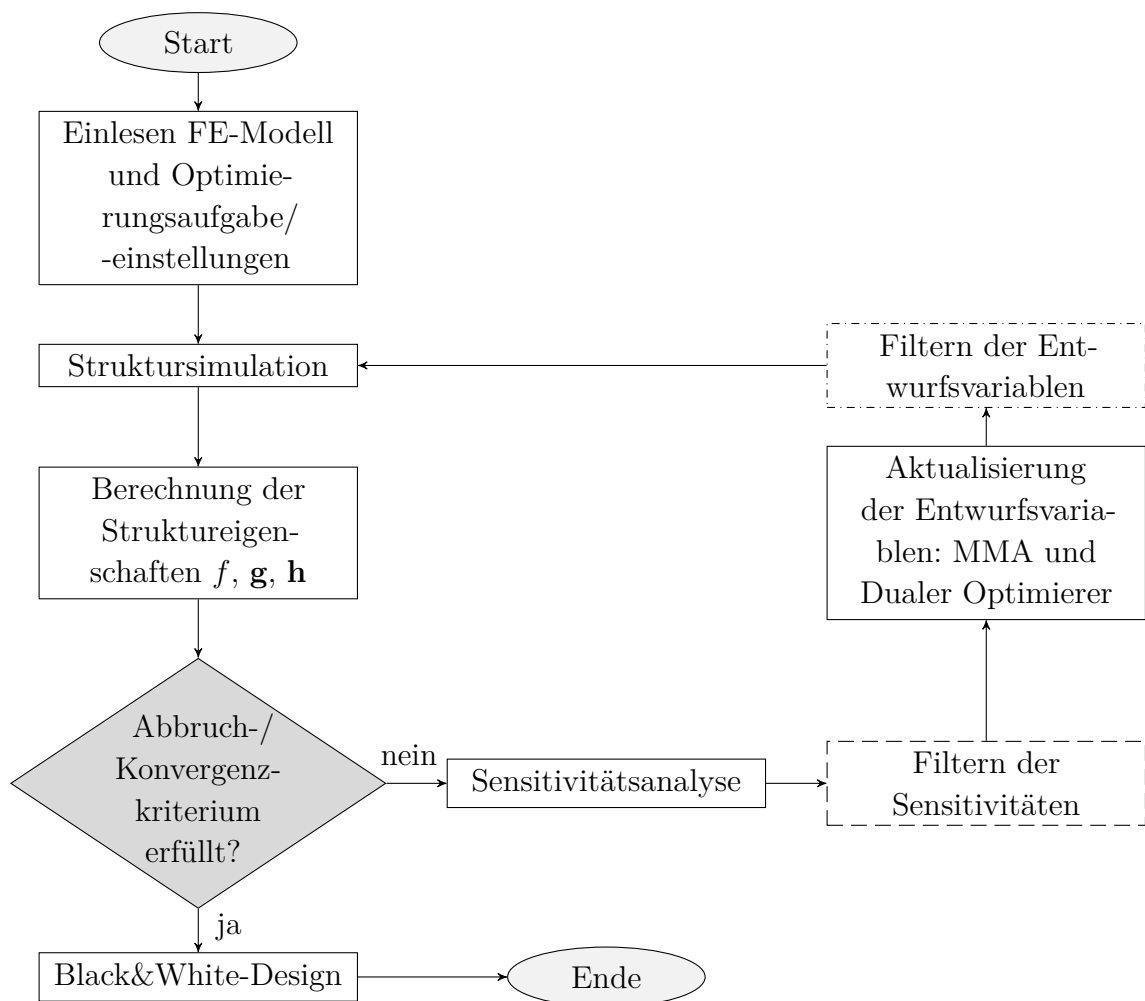


Abbildung 3–1: Optimierungsablauf
nur für Sensitivitätenfilter: --, nur für Dichtefilter: ----

Dieses Black&White-Design ist eine mögliche Interpretation des Optimierungsergebnisses, behält jedoch die Voxel-Diskretisierung bei, welche Kerben am Bauteilrand beinhaltet. Dies sorgt beispielsweise für nicht aussagekräftige Spannungen am Bauteilrand.

3.3 Materialinterpolationen

Materialinterpolationen sorgen für die Abbildung der Elementdichten auf die physikalischen Eigenschaften. Sie werden so gewählt, dass eine Struktur aus Elementdichten möglichst gleiche Struktureigenschaften aufweist wie die durch Elementdichten abgebildete binäre Struktur. So sollen kleine Elementdichten eine

möglichst geringen Einfluss auf das Strukturverhalten haben. Außerdem beeinflusst die Materialinterpolation das Optimierungsergebnis. Somit kann die Materialinterpolation dazu verwendet werden, eine Konvergenz zu $\tilde{x}_i \approx 0$ oder $\tilde{x}_i = 1$ zu begünstigen und so Zwischendichten im Optimierungsergebnis weitestgehend zu eliminieren.

3.3.1 SIMP

Die gängigste Materialinterpolation ist SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization of intermediate densities, Zhou und Rozvany 1991). Für den Elastizitätsmodul E_i in jedem Element i wird ein polynomialer Ansatz gewählt, das gefüllte Volumen v_i wird linear interpoliert:

$$\begin{aligned} E_i &= \tilde{x}_i^s E_{0i} \\ v_i &= \tilde{x}_i v_{0i} \end{aligned} \tag{3-3}$$

mit dem Elastizitätsmodul des Grundmaterials E_{0i} , dem Grundvolumen v_{0i} und der Elementdichte $0 < \tilde{x}_{min} \leq \tilde{x}_i \leq 1$. Die minimale Elementdichte \tilde{x}_{min} muss größer als 0 sein, um einen minimalen Elastizitätsmodul zu gewährleisten. Ein Elastizitätsmodul $E_i = 0$ würde zu einer singulären Steifigkeitsmatrix führen. In dieser Arbeit wird $\tilde{x}_{min} = 0.001$ verwendet.

s ist der Penaltyexponent und sorgt für die Namensgebung SIMP, denn ein Penaltyexponent $s > 1$ sorgt für eine Bestrafung der Zwischendichten. Wie in Abbildung 3-2 gezeigt wird, nimmt für Elementdichten $\tilde{x}_i < 1$ das Verhältnis von Steifigkeit zu Materialeinsatz $\frac{E_i}{v_i}$ ab, wenn s steigt. Je größer der Penaltyexponent s ist, desto weniger „lohnt“ sich die Verwendung von Zwischendichten.

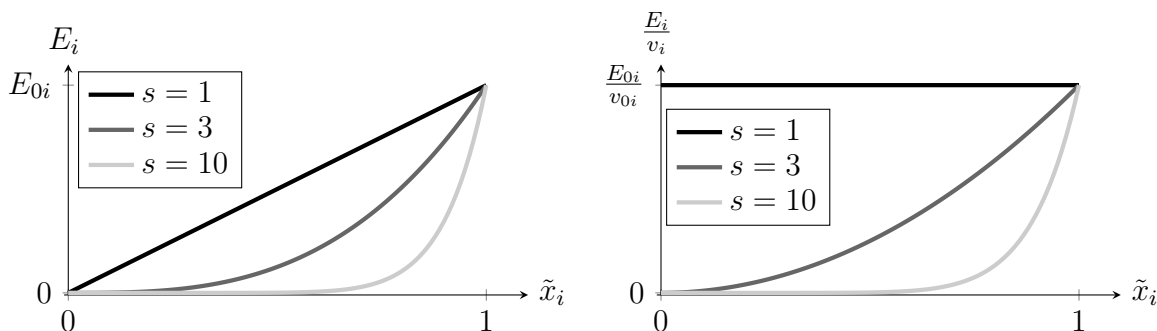


Abbildung 3-2: SIMP Materialinterpolation

Üblicherweise wird für die dreidimensionale Topologieoptimierung ein Penaltyexponent $s = 3$ gewählt, um eine ausreichende Vermeidung von Zwischendichten zu erreichen. Wählt man den Penaltyexponenten s deutlich größer, können vermehrt lokale Minima auftreten und das Optimierungsergebnis ist unter Umständen schlechter.

Die Wahl von $s = 1$ kann interpretiert werden als eine Dickenoptimierung von Scheiben in 2D (bei Verwendung eines Elements über die Scheibendicke) bzw. als Materialoptimierung in 3D, wobei für jedes Element der Elastizitätsmodul optimiert wird (unendlich viele fiktive Materialien).

3.3.2 RAMP

Eine erweiterte Interpolation ist RAMP (Rational Approximation of Material Properties, Stolpe und Svanberg 2001), wobei die Interpolation des Elastizitätsmoduls verändert wird:

$$E_i = \frac{\tilde{x}_i}{1 + s(1 - \tilde{x}_i)} E_{0i} \quad (3-4)$$

$$v_i = \tilde{x}_i v_{0i}.$$

Während bei SIMP die Ableitung des Elastizitätsmoduls für kleine Elemente und $s > 1$ gegen null geht $\lim_{\tilde{x}_i \rightarrow 0} \frac{\partial E_i}{\partial \tilde{x}_i} = 0$, ist dies bei RAMP mit $\lim_{\tilde{x}_i \rightarrow 0} \frac{\partial E_i}{\partial \tilde{x}_i} = (1 + s)^{-1} E_{0i}$ nicht der Fall (siehe Abbildung 3-3). Somit ist RAMP eine strikt konvexe Materialinterpolation, wobei SIMP nur eine konvexe Materialinterpolation ist. Außerdem sorgt der RAMP-Ansatz dafür, dass die Maximierung der Steifigkeit (Minimierung der Compliance, vgl. Abschnitt 3.7.4) bei einer Volumenrestriktion ein konvexes Optimierungsproblem für $s = 0$ ist und ein konkaves für $s > 0$. Dies verringert die Wahrscheinlichkeit von Zwischendichten im Optimierungsergebnis.

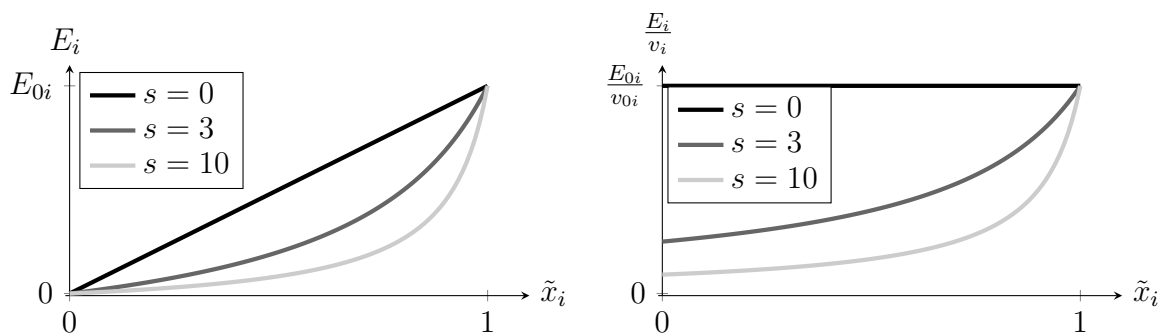


Abbildung 3-3: RAMP Materialinterpolation

3.4 Entwurfsvariablen und Filtertechniken

Eine wesentliche Komponente bei der Optimierung mit der Dichtemethode spielt das Filtern. Ohne Filter können während der Optimierung Schachbrettmuster (Checkerboards) entstehen, die meist auch schlechte lokale Minima darstellen. Checkerboarding tritt nur bei Elementen mit linearer Ansatzfunktion auf. Elemente mit höherer Ansatzfunktion sorgen aufgrund der größeren Anzahl an Freiheitsgraden aber für deutlich größere Rechenzeiten. Filter verhindern das Checkerboarding und sorgen für eine Regularisierung des Elementdichtefelds, wodurch schlechte lokale Minima vermieden werden können. Außerdem können Filter für ein netzunabhängiges Optimierungsergebnis sorgen und sie geben eine minimale Ausdehnung der optimierten Geometrie vor. Eine Übersicht über verschiedene Filterarten gibt Sigmund (2007).

3.4.1 Sensitivitätenfilter

Der Optimierungsansatz mit Sensitivitätenfilter wird auch Ein-Feld SIMP genannt (Sigmund und Maute 2013), da die Entwurfsvariablen x_i und die Elementdichten \tilde{x}_i identisch sind. Die Regularisierung wird durch eine Modifikation der Sensitivitäten $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ erreicht

$$\frac{\widetilde{\partial f}}{\partial x_i} = \frac{v_{0i} \sum_{j=1}^{N_D} t(i, j) x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}}{x_i \sum_{j=1}^{N_D} v_{0j} t(i, j)} \quad (3-5)$$

mit den Wichtungen

$$t(i, j) = \max(0, R - \text{dist}(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j)) \quad (3-6)$$

der Elemente j im Designbereich $j \in N_D$, die linear vom Abstand $\text{dist}(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j)$ zum betrachteten Element i und dem Filterradius R abhängen (Sigmund 2007). Dabei sind \mathbf{o}_i und \mathbf{o}_j die Positionen der Elementmittelpunkte. Abbildung 3-4 zeigt die Wichtungsfunktion $t(i, j)$. Dabei ist der Elementmittelpunkt \mathbf{o}_i des Elements i mit einem schwarzen Punkt markiert. Der Elementmittelpunkt \mathbf{o}_j bezieht sich auf ein beliebiges Element j im Designbereich. Außerhalb des grau markierten Filterbereichs vom Radius R ist die Wichtung $t(i, j) = 0$.

Hauptsächlich wird der Sensitivitätenfilter für die Compliance-Minimierung bei einer Volumenrestriktion genutzt. Nur die Sensitivitäten der Compliance werden gefiltert, die Sensitivitäten des Volumens werden nicht modifiziert.

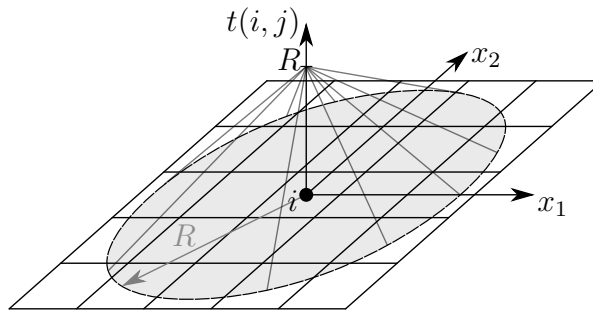


Abbildung 3–4: Lineare Wichtungsfunktion $t(i, j)$ auf einem 2D-FE-Netz

3.4.2 Dichtefilter

Der Optimierungsansatz mit Dichtefilter ist auch bekannt als Zwei-Feld SIMP (Sigmund und Maute 2013). Diese beiden Felder sind die Entwurfsvariablen \mathbf{x} und die Elementdichten $\tilde{\mathbf{x}}$, die über den Dichtefilter

$$\tilde{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^{N_D} t(i, j) x_j v_{0j}}{\sum_{j=1}^{N_D} t(i, j) v_{0j}} \quad (3-7)$$

miteinander gekoppelt sind (Bruns und Tortorelli 2001, Bourdin 2001). Als Wichtung wird $t(i, j)$ aus Gleichung 3–6 verwendet. Die Elementdichte \tilde{x}_i ist somit ein gewichtetes Mittel der Entwurfsvariablen x_j in der Nachbarschaft mit dem Radius R . Durch die lineare Abbildung $\tilde{x}_i(\mathbf{x})$ kann Gleichung 3–2 in eine explizite Restriktion umgewandelt werden

$$0 < x_{min} = \tilde{x}_{min} \leq x_i \leq 1. \quad (3-8)$$

Im Gegensatz zum Sensitivitätenfilter bleiben die Sensitivitäten bei Beachtung der Kettenregel für die Sensitivitäten der Zielfunktion

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{N_D} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_j} \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{N_D} \frac{t(i, j) v_{0j} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_j}}{\sum_{k=1}^{N_D} t(k, j) v_{0k}} \quad (3-9)$$

korrekt. Dies gilt analog für die Sensitivitäten der Restriktionen $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_i}$. Durch die Verwendung korrekter Sensitivitäten, kann der Dichtefilter für beliebige Optimierungsprobleme benutzt werden. Ein größerer Filterradius R bewirkt, dass der maximale Gradient der Elementdichten verringert wird. Damit können minimale Abmaße der optimierten Struktur gesteuert werden.

3.4.3 Projektionsfilter

Der Dichtefilter verschmiert die Entwurfsvariablen \mathbf{x} im Filterradius R . Bei großen Filterradien entstehen so große Bereiche von Zwischendichten, da der Filter am Übergang zwischen Vollmaterial $\tilde{x}_i = 1$ und Loch $\tilde{x}_i \approx 0$ Zwischendichten erzwingt. Um den Bereich der Zwischendichten zu verringern, können Projektionstechniken zum Einsatz kommen (Guest et al. 2004). Der Optimierungsansatz mit Projektionsfiltern wird auch Drei-Feld SIMP (Sigmund und Maute 2013) genannt.

Dabei sind die Entwurfsvariablen \mathbf{x} das originale Feld, die gefilterten Elementdichten $\bar{\mathbf{x}}$ mit

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^{N_D} t(i, j) x_j v_{0j}}{\sum_{j=1}^{N_D} t(i, j) v_{0j}} \quad (3-10)$$

das zweite Feld, welches auf das dritte Feld, die Elementdichten $\tilde{\mathbf{x}}$, projiziert wird:

$$\tilde{x}_i = 0.5 + \frac{\tanh(\chi [\bar{x}_i - 0.5])}{2 \tanh(0.5\chi)}. \quad (3-11)$$

Die Projektion in Gleichung 3-11 sorgt dabei für eine diskretere Darstellung des Bauteils, indem mit steigendem Projektionsfaktor χ weniger Zwischendichten verbleiben. Dies zeigt Abbildung 3-5. Bei $\chi = 1$ sind die Elementdichten \tilde{x}_i gleich den gefilterten Entwurfsvariablen \bar{x}_i , damit ist dies gleich dem Dichtefilter. Bei größerem χ ist der Übergang der Elementdichten \tilde{x}_i zwischen Vollmaterial und Loch bei gleichbleibenden gefilterten Elementdichten \bar{x}_i diskreter.

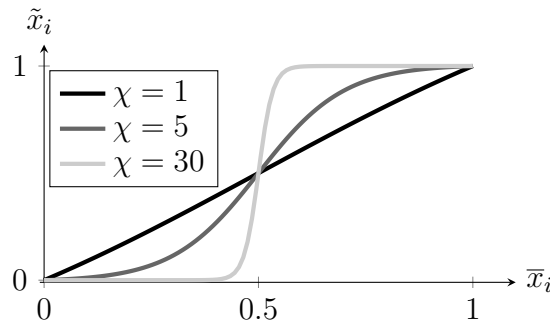


Abbildung 3-5: Projektionsfilter mit unterschiedlichen Projektionsfaktoren χ

Die Sensitivitäten der Entwurfsvariablen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sind damit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{N_D} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_j} \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i}. \quad (3-12)$$

3.5 Optimierungsalgorithmus

3.5.1 Method of Moving Asymptotes

Die Method of Moving Asymptotes (MMA, Svanberg 1987, Svanberg 2002) stellt eine konvexe separierbare Näherungsfunktion

$$\bar{f}^{(d)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_D} \left[\frac{p_{fi}^{(d)}}{u_{Ai}^{(d)} - x_i} + \frac{q_{fi}^{(d)}}{x_i - l_{Ai}^{(d)}} \right] + r_f^{(d)} \quad (3-13)$$

mit $r_f^{(d)} = f(\mathbf{x}^{(d)}) - \sum_{i=1}^{N_D} \left[\frac{p_{fi}^{(d)}}{u_{Ai}^{(d)} - x_i^{(d)}} + \frac{q_{fi}^{(d)}}{x_i^{(d)} - l_{Ai}^{(d)}} \right]$

für die Zielfunktion f zur Verfügung, die auf dem aktuellen Wert der Zielfunktion $f(\mathbf{x}^{(d)})$ und ihren Sensitivitäten $\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(d)}}$ basiert. Die Restriktionen \mathbf{g} werden analog approximiert. Dadurch besteht das Optimierungsproblem ausschließlich aus reziproken Funktionen, wie in Gleichung 3-13 und Abbildung 3-6 zu sehen, mit den unteren Asymptoten $l_{Ai}^{(d)} = x_i^{(d)} - \delta_i^{(d)}$ und den oberen Asymptoten $u_{Ai}^{(d)} = x_i^{(d)} + \delta_i^{(d)}$. Der Abstand der Asymptoten zum aktuellen Wert der Entwurfsvariablen $x_i^{(d)}$ wird als $\delta_i^{(d)}$ bezeichnet, d ist die aktuelle Iteration.

Der konstante Wert $r_f^{(d)}$ sorgt dafür, dass $\bar{f}(\mathbf{x}^{(d)}) = f(\mathbf{x}^{(d)})$. Die Werte $p_{fi}^{(d)}$ und $q_{fi}^{(d)}$ werden so gewählt, dass auch die erste Ableitung $\left. \frac{\partial \bar{f}^{(d)}}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(d)}} = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(d)}}$ übereinstimmt:

$$\begin{aligned} p_{fi}^{(d)} &= \delta_i^{(d)2} \max \left\{ 0, \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(d)}} \right\} + 0.001 \left| \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(d)}} \right| + 10^{-5} \\ q_{fi}^{(d)} &= \delta_i^{(d)2} \max \left\{ 0, - \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(d)}} \right\} + 0.001 \left| \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(d)}} \right| + 10^{-5}. \end{aligned} \quad (3-14)$$

Entsprechend der Notation von Svanberg (2002), wird der Abstand der Asymptoten $\delta_i^{(d)}$ für die ersten beiden Iterationen initialisiert:

$$\delta_i^{(d)} = \gamma_0 (x_{max,i} - x_{min,i}), \quad (3-15)$$

wobei Svanberg $\gamma_0 = 0.5$ vorschlägt. Während der folgenden Iterationen wird der Asymptotenabstand $\delta_i^{(d)}$ entsprechend der Monotonie der Änderung der Entwurfsvariablen angepasst:

$$\delta_i^{(d)} = \gamma_i^{(d)} \delta_i^{(d-1)} \quad (3-16)$$

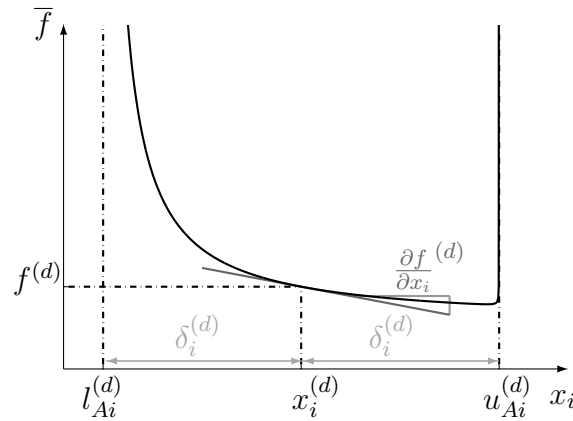


Abbildung 3–6: MMA Näherungsfunktion \bar{f} mit einer Entwurfsvariable x_i , untere Asymptote $l_{Ai}^{(d)}$ und obere Asymptote $u_{Ai}^{(d)}$

mit

$$\gamma_i^{(d)} = \begin{cases} \gamma_{inc}, & \text{wenn } \left(x_i^{(d)} - x_i^{(d-1)} \right) \cdot \left(x_i^{(d-1)} - x_i^{(d-2)} \right) > 0 & \text{Monotonie} \\ \gamma_{dec}, & \text{wenn } \left(x_i^{(d)} - x_i^{(d-1)} \right) \cdot \left(x_i^{(d-1)} - x_i^{(d-2)} \right) < 0 & \text{Oszillation} \\ 1, & \text{wenn } \left(x_i^{(d)} - x_i^{(d-1)} \right) \cdot \left(x_i^{(d-1)} - x_i^{(d-2)} \right) = 0, & \end{cases} \quad (3-17)$$

wobei Svanberg $\gamma_{inc} = 1.2$ und $\gamma_{dec} = 0.7$ vorschlägt. Dadurch kann die Änderung einer Entwurfsvariable größer sein, wenn sich diese Entwurfsvariable monoton ändert (die Optimierung wird globaler), und die Änderungen werden kleiner, wenn die Entwurfsvariable oszilliert (die Optimierung wird lokaler). Zusätzlich wurde eine maximale Schrittweite Δ_{max} implementiert, die die Veränderung der Entwurfsvariablen pro Iteration begrenzt:

$$\Delta_{max} \geq \left| x_i^{(d)} - x_i^{(d-1)} \right|. \quad (3-18)$$

3.5.2 Duale Optimierung

Die MMA-Näherungsfunktionen sind konvex und separierbar. Dadurch kann das Optimierungsproblem durch Einsetzen der Approximationen in die Lagrangefunktion \mathcal{L} (vgl. Gleichung 2–28) analytisch gelöst werden (Fleury 1989). Dafür wird das duale Problem

$$\max_{\lambda} \left\{ \min_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \bar{f}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{N_G} \lambda_j \left(\bar{g}_j(\mathbf{x}) + \mu_j^2 \right) \right\} \quad (3-19)$$

aufgestellt (Schumacher 2013). Aus den KKT-Bedingungen (vgl. Kapitel 2.3.1) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$ folgt unter Annahme einer aktiven Restriktion ($\mu_j = 0$)

$$x_i(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{p_{fi}l_{Ai} - q_{fi}u_{Ai} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{p}_{gi}l_{Ai} - \mathbf{q}_{gi}u_{Ai}) + \sqrt{(p_{fi} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{p}_{gi})(q_{fi} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{q}_{gi})(u_{Ai} - l_{Ai})}}{p_{fi} - q_{fi} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{p}_{gi} - \mathbf{q}_{gi})}. \quad (3-20)$$

Dadurch wird das hochdimensionale Optimierungsproblem reduziert zu einem konkaven N_G -dimensionalen nichtlinearen Maximierungsproblem in $\boldsymbol{\lambda}$

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L} = \bar{f}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})) + \boldsymbol{\lambda}^T \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda})), \quad (3-21)$$

das effizient gelöst werden kann durch nichtlineare Optimierungsmethoden wie das Newton-Verfahren, wenn nur wenige Restriktionen berücksichtigt werden müssen, wie in Dienemann und Schumacher (2016) gezeigt wird.

3.6 Konvergenzkriterien

Konvergenzkriterien dienen dazu, eine Optimierung an einer Stelle zu beenden, nach der keine weitere signifikante Verbesserung der Zielfunktion erwartet wird. Konvergenzkriterien in der Topologieoptimierung mit der Dichtemethode können sein

- die Veränderung der Entwurfsvariablen von der letzten Iteration ($d - 1$) zur aktuellen Iteration (d) ist kleiner als ein vorgegebener Wert ϵ

$$\max_i \left| x_i^{(d)} - x_i^{(d-1)} \right| < \epsilon, \quad (3-22)$$

- die Veränderung der Zielfunktion ist kleiner als ein vorgegebener Wert ϵ (bei erfüllten Restriktionen)

$$\left| \frac{f^{(d)} - f^{(d-1)}}{f^{(d)}} \right| < \epsilon \quad (3-23)$$

und/oder

- die euklidische Vektornorm aus den KKT-Bedingungen ist kleiner als ein vorgegebener Wert ϵ

$$\left\| \left[\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^{(d)}} \quad \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right|_{\mathbf{x}^{(d)}} \quad \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right|_{\mathbf{x}^{(d)}} \right] \right\| < \epsilon. \quad (3-24)$$

Zusätzlich können Abbruchkriterien berücksichtigt werden. So kann die Optimierung nach einer maximal zugelassenen Anzahl an Iterationen beendet werden.

3.7 Grundlegende Struktureigenschaften und Sensitivitäten

Im Folgenden werden Struktureigenschaften angegeben, deren Sensitivitäten analytisch berechnet werden können. Dies ist die Voraussetzung für eine Umsetzung der Dichtemethode, da eine numerische Bestimmung der Sensitivitäten für eine große Anzahl an Entwurfsvariablen aufgrund des enormen Rechenaufwands nicht möglich wäre. Die angegebenen Sensitivitäten beziehen sich auf den SIMP-Ansatz.

3.7.1 Volumen

Wie in Kapitel 2.1.1 beschrieben, ist die Masse das bestimmende Kriterium im Leichtbau. Bei Verwendung eines einzigen Materials ist die Minimierung der Masse äquivalent der Minimierung des Volumens. Das gefüllte Volumen des Designbereichs wird berechnet nach

$$v = \sum_{i=1}^{N_D} v_i = \sum_{i=1}^{N_D} \tilde{x}_i v_{0i} \quad (3-25)$$

mit der Anzahl der Elemente im Designbereich N_D und den Sensitivitäten

$$\frac{\partial v}{\partial \tilde{x}_i} = v_{0i}. \quad (3-26)$$

3.7.2 Volumenfüllung

Die Volumenfüllung gibt an, welcher Anteil des Designbereichs gefüllt ist. Allgemein ist die Volumenfüllung der Quotient aus gefülltem Volumen und Grundvolumen des Designbereichs

$$v_f = \frac{\sum_{i=1}^{N_D} v_i}{\sum_{i=1}^{N_D} v_{0i}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_D} \tilde{x}_i v_{0i}}{\sum_{i=1}^{N_D} v_{0i}} \quad (3-27)$$

mit den Sensitivitäten

$$\frac{\partial v_f}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{v_{0i}}{\sum_{j=1}^{N_D} v_{j0}}. \quad (3-28)$$

Für Voxel gleicher Größe kann dies vereinfacht werden zu $v_f = \frac{\sum_{i=1}^{N_D} \tilde{x}_i}{N_D}$ mit den Sensitivitäten $\frac{\partial v_f}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{1}{N_D}$.

3.7.3 Masse

Die Masse des Designbereichs kann berechnet werden zu

$$m = \sum_{i=1}^{N_D} m_i = \sum_{i=1}^{N_D} \rho_i v_{0i} \quad (3-29)$$

mit der Masse m_i jedes Elements i und den Sensitivitäten

$$\frac{\partial m}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{\partial \rho_i}{\partial \tilde{x}_i} v_{0i}. \quad (3-30)$$

Die physikalische Dichte kann linear interpoliert werden $\rho_i = \tilde{x}_i \rho_{0i}$, sodass $m = \sum_{i=1}^{N_D} \tilde{x}_i \rho_{0i} v_{0i}$ und $\frac{\partial m}{\partial \tilde{x}_i} = \rho_{0i} v_{0i}$. Für Eigenfrequenzprobleme oder linear statische Lastfälle unter Schwerkraft sorgt diese Interpolation jedoch für Probleme, da die Steifigkeit für Elemente geringer Dichte stärker abnimmt als die physikalische Dichte $\lim_{\tilde{x}_i \rightarrow 0} \frac{E_i}{\rho_i} = 0$. Daher kommt es in Bereichen geringer Elementdichte durch die Gravitation zu starken Deformationen, bei Eigenfrequenzproblemen zu künstlichen Moden. Da in diesen Fällen die Struktur aus Elementdichten nicht die gleichen Struktureigenschaften aufweist wie die durch Elementdichten abgebildete binäre Struktur, kommen andere Interpolationen für die physikalische Dichte ρ_i zum Einsatz, wie bei der Berücksichtigung von Eigenfrequenzen in Kapitel 4.2 beschrieben.

3.7.4 Compliance

Die Compliance (deutsch: Nachgiebigkeit)

$$c = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{u} \quad (3-31)$$

ist in der linearen Statik äquivalent zur Dehnungsenergie und eine sinnvolle Optimierungsgröße für Steifigkeitslastfälle. Der Systemverschiebungsvektor wird mit \mathbf{u} bezeichnet, \mathbf{K} ist die Systemsteifigkeitsmatrix und \mathbf{p} der Systemlastvektor. Unter der Annahme konstanter Last (z.B. keine Volumenlasten) können die Sensitivitäten der Compliance berechnet werden als

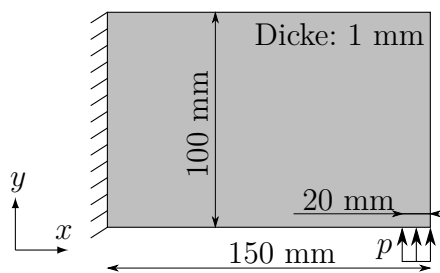
$$\frac{\partial c}{\partial \tilde{x}_i} = -\frac{1}{2} s \tilde{x}_i^{s-1} \mathbf{u}_{Ei}^T \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{u}_{Ei} \quad (3-32)$$

mit dem Penaltyexponenten s , dem Elementverschiebungsvektor \mathbf{u}_{Ei} und der Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{Ei} . Eine Herleitung wird in Anhang A.1 gegeben.

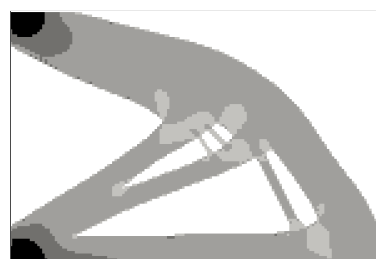
Um die Auswirkungen einiger ausgewählter Optimierungsparameter zu zeigen, wird am Beispiel einer Kragsscheibe die Compliance bei einer gegebenen maximalen Volumenfüllung v_f minimiert (Abbildung 3–7). Der Bauraum wurde mit $150 \times 100 \times 1$ Voxeln der Kantenlänge $w = 1$ mm diskretisiert. Als FE-Solver wurde der interne Solver von FET verwendet. Die als Standard gewählten Optimierungseinstellungen werden in Tabelle 3–1 aufgelistet. Soweit nicht anders angegeben, werden für alle Optimierungen in dieser Arbeit diese Parameter verwendet.

Tabelle 3–1: Optimierungseinstellungen, SW – Schrittweite

Parameter	Wert	MMA-Parameter	Wert
Minstdichte	$\tilde{x}_{min} = 0.001$	initiale SW	$\gamma_0 = 0.2$
Materialinterpolation	SIMP mit $s = 3$	Vergrößerung SW	$\gamma_{inc} = 1.2$
Filter	Dichtefilter, $R = 1.4w$	Verkleinerung SW	$\gamma_{dec} = 0.7$
Konvergenz-/ Abbruchkriterien	$\max_i x_i^{(d)} - x_i^{(d-1)} < 0.01$	maximale SW	$\Delta_{max} = 0.2$
	max. 100 Iterationen		



(a) Bauraum und Lastfall
 $p = 333$ N/mm, Material:
 Stahl ($E = 210$ GPa, $\nu = 0.3$)



(b) Black&White-Design für $v_f \leq 0.5$
 (vgl. Abbildung 2–18), $c = 2933$ Nmm

Abbildung 3–7: Kragsscheibe – Bauraum, Lastfall und Optimierungsergebnis

Bei allen Optimierungsergebnissen in den Abbildungen 3–7 bis 3–11 ist die Volumenrestriktion aktiv. Dies ist zu erwarten, da die Sensitivitäten der Compliance $\frac{\partial c}{\partial \tilde{x}_i} \leq 0$ negativ und die Sensitivitäten der Volumenfüllung $\frac{\partial v_f}{\partial \tilde{x}_i} > 0$ positiv sind. Vergleicht man das Optimierungsergebnis der Bubble-Methode (vgl. Kapitel 2.3.4) mit Abbildung 3–7b, so führt die Dichtemethode aufgrund der großen möglichen

Zahl an Entwurfsvariablen zu einem besseren Ergebnis. Es wurde die Volumenrestriktion $v_f \leq 0.5$ aus dem Beispiel der Bubble-Methode übernommen. In Abbildung 3–8 wird eine beispielhafte Optimierungshistorie für $v_f \leq 0.3$ gezeigt. Als Startdesign wird die uniforme Elementdichteverteilung $\tilde{x}_i = 0.3$ gewählt, um mit einer aktiven Restriktion zu starten. Da die Volumenrestriktion geringer gewählt ist als in Abbildung 3–7b, ist die Compliance der optimierten Struktur größer.

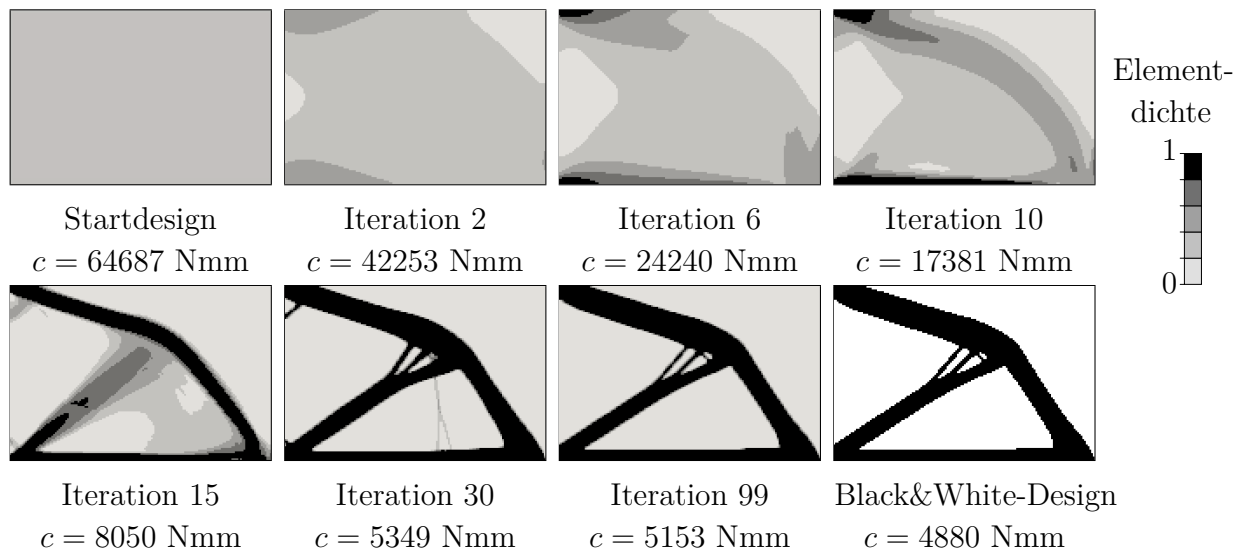


Abbildung 3–8: Optimierungshistorie für $v_f \leq 0.3$

Bei der Umwandlung in das Black&White-Design sinkt die Compliance um 5 %. Dies liegt hauptsächlich daran, dass der Filter zwangsläufig für Elemente mit Zwischendichten sorgt. Bei der Erstellung des Black&White-Designs verschwinden viele Elemente mit Zwischendichten, bei einigen wird die Elementdichte aber auf $\tilde{x}_i = 1$ erhöht. Die Erhöhung einiger Elementdichten sorgt für eine erhebliche Vergrößerung der Steifigkeit. Die Verringerung der Steifigkeit durch die Vernachlässigung vieler Elemente mit Zwischendichten hat aufgrund des Penaltyexponenten $s > 1$ einen geringeren Effekt.

Außerdem nehmen die Elemente mit Mindestdichte $\tilde{x}_i = \tilde{x}_{min}$ etwas Volumen ein ohne nennenswerte Steifigkeit zu besitzen. Dieses Volumen kann im Black&White-Design für steife Elemente mit voller Elementdichte genutzt werden.

In Abbildung 3–9 werden Optimierungsergebnisse mit unterschiedlichen Filterradien gezeigt. Es ist zu erkennen, dass ohne Filter ($R = 0$) an einigen Stellen Schachbrettmuster (Checkerboarding) entstehen. Diese stellen keine reale Bauteilgeometrie dar. Die fehlende Filter-Regularisierung der Elementdichten sorgt in diesem Fall auch für das Entstehen eines schlechten lokalen Minimums. Bei

aktivem Filter ($R > w$) steigt mit dem Filterradius R auch die Compliance des Optimierungsergebnisses mit Zwischendichten, da der Filter am Übergang zwischen Vollmaterial $\tilde{x}_i = 1$ und Loch $\tilde{x}_i \approx 0$ Zwischendichten erzwingt, welche eine geringe Steifigkeit aufweisen. Im Black&White-Design sind diese Effekte durch Zwischendichten nicht mehr existent, daher steigt die Compliance des Black&White-Designs nicht zwangsläufig mit dem Filterradius an. Prinzipiell sorgt ein größerer Filterradius für größere minimale Abmaße der optimierten Struktur.

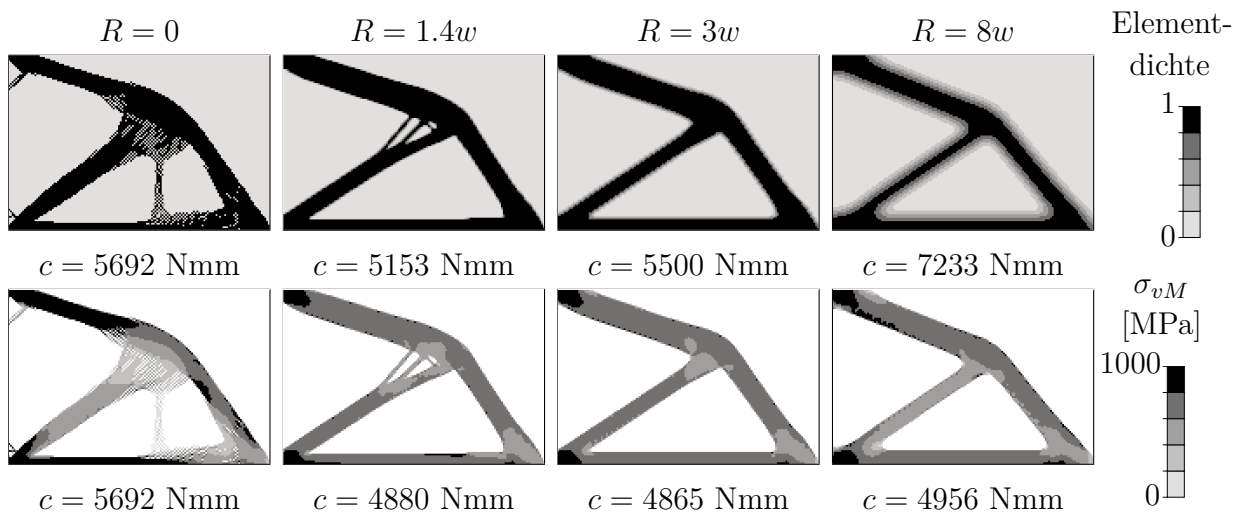


Abbildung 3-9: Optimierungsergebnisse mit verschiedenen Filterradien für $v_f \leq 0.3$, oben: optimierte Elementdichteverteilung, unten: Black&White-Design

Um große Bereiche an Zwischendichten bei einem großen Filterradius R zu vermeiden, kann ein Projektionsfilter (vgl. Kapitel 3.4.3) zum Einsatz kommen. Für das Ergebnis in Abbildung 3-10 wurde der Projektionsfaktor χ während der 100 Iterationen exponentiell von $\chi = 1$ auf $\chi = 64$ gesteigert. Durch die verringerte Anzahl an Elementen mit Zwischendichten erreicht das Ergebnis mit optimierten Elementdichten eine ähnliche Compliance wie das interpretierte Bauteil im Black&White-Design. Dies ist besonders sinnvoll, wenn die Compliance als Restriktion gewählt wird. Angenommen das Optimierungsergebnis in Abbildung 3-9 mit $R = 8w$ wäre das Ergebnis einer Volumenminimierung mit der Restriktion $c \leq 7233$ Nmm, so ist das interpretierte Bauteil mit $c = 4956$ Nmm stark überdimensioniert. Diese falsche Dimensionierung bei großen Filterradien kann durch Anwendung des Projektionsfilters vermieden werden.

Abbildung 3-11 zeigt, dass durch die Verwendung eines anderen Filters oder einer anderen Materialinterpolation andere lokale Minima entstehen. In Abbildung 3-11c ist das Ergebnis für die SIMP-Interpolation mit dem Penaltyexponenten $s = 1$ angegeben, die einer Dickenoptimierung der Scheibe entspricht (vgl.

Kapitel 3.3.1). Da die Zwischendichten nicht bestraft werden, entsteht ein Optimierungsergebnis mit einer besseren Compliance, das aber nicht mehr als klare Topologie im Sinne von „Element vorhanden oder nicht vorhanden“ interpretiert werden kann. Daher ist in diesem Fall die Bildung eines Black&White-Designs nicht sinnvoll.

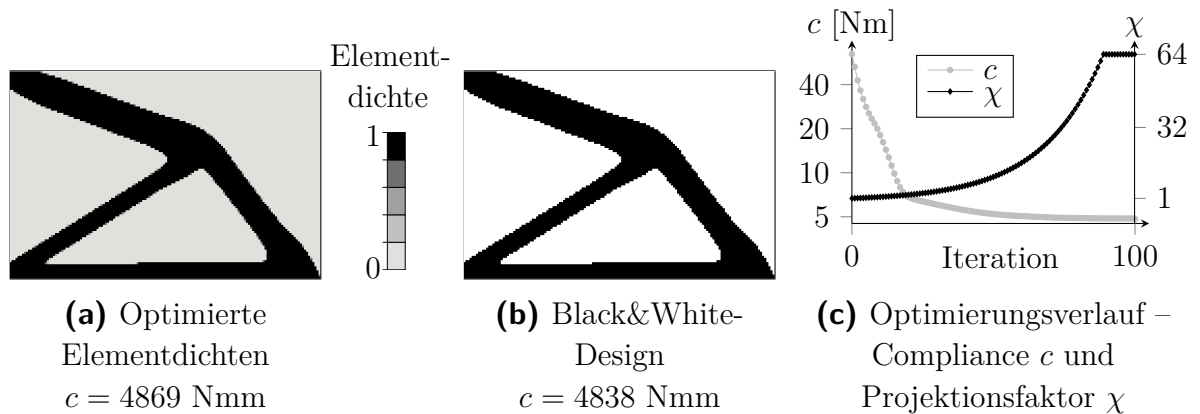


Abbildung 3–10: Optimierung der Compliance mit $R = 8w$ und Projektionsfilter

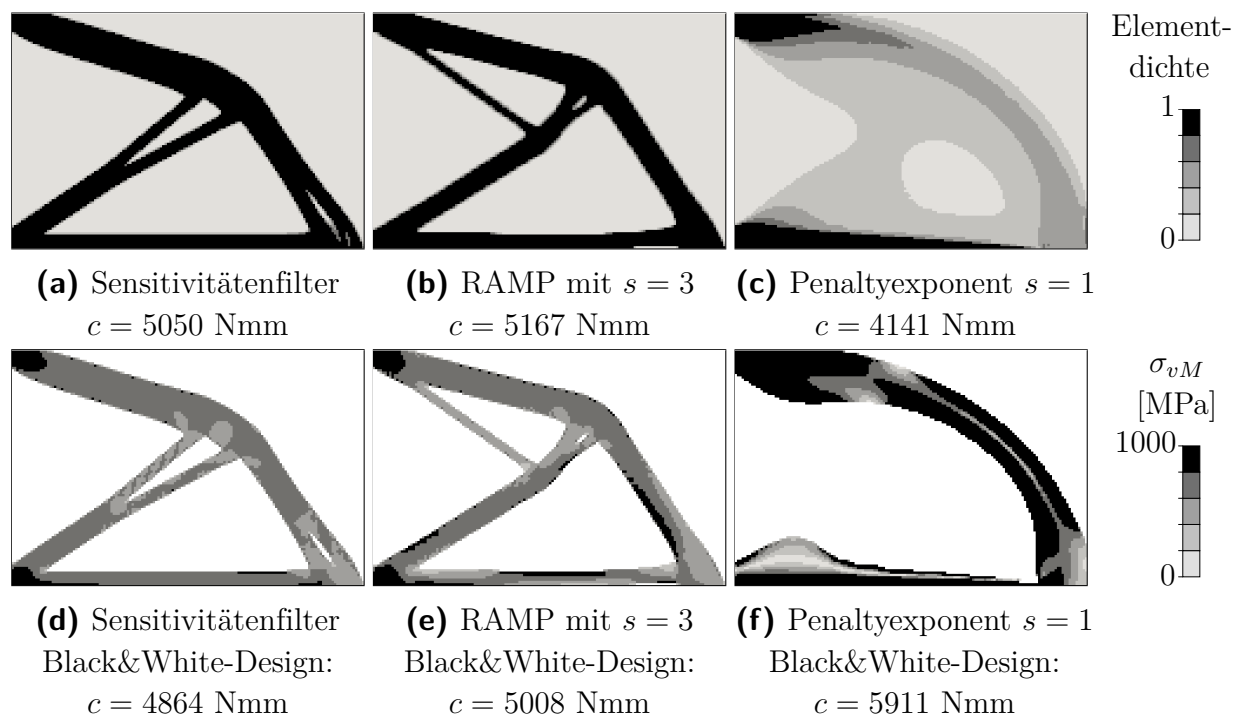


Abbildung 3–11: Optimierung der Compliance mit veränderten Optimierungseinstellungen

3.7.5 Knotenverschiebung

Auch für die Knotenverschiebungen

$$u_j = \mathbf{e}_j^T \mathbf{u} \quad (3-33)$$

können Sensitivitäten analytisch berechnet werden und ergeben sich unter der Annahme konstanter Lasten zu (vgl. Anhang A.2)

$$\frac{\partial u_j}{\partial \tilde{x}_i} = -s \tilde{x}_i^{s-1} (\mathbf{A}_{Ei} \boldsymbol{\kappa})^T \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{u}_{Ei} \quad (3-34)$$

mit $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{e}_j$.

Der Einheitsvektor \mathbf{e}_j hat den einzigen Eintrag am betrachteten Freiheitsgrad j . u_j ist also die j -te Komponente des Systemverschiebungsvektors \mathbf{u} .

Ein Beispiel für den Einsatz von Knotenverschiebungen sind Mechanismen wie der Force Inverter (Bendsøe und Sigmund 2004) in Abbildung 3–12. Hierbei soll die Verschiebung u_1 in x -Richtung am Angriffspunkt der rechten Feder minimiert werden, das Volumen wurde dabei auf $v_f \leq 0.3$ restringiert. Als Material wurde Stahl ($E = 210$ GPa, $\nu = 0.3$) verwendet. OptiStruct[®] Analyse dient als FE-Solver. Es bildet sich ein Mechanismus aus, der eine negative Verschiebung u_1 erreicht. Somit verschiebt sich dieser Punkt entgegen der Krafteinleitungsrichtung.

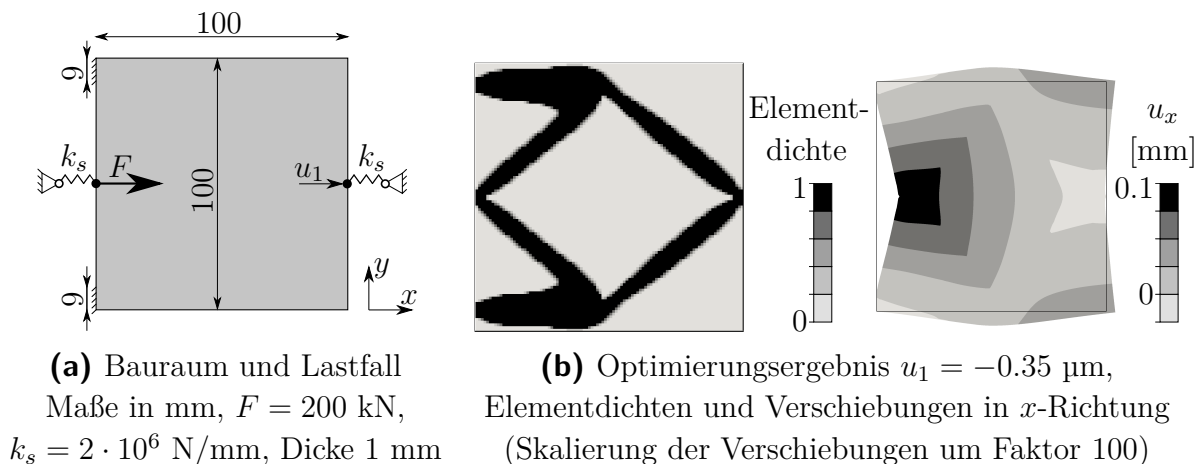


Abbildung 3–12: Force Inverter – Bauraum, Lastfall und Optimierungsergebnis nach 100 Iterationen

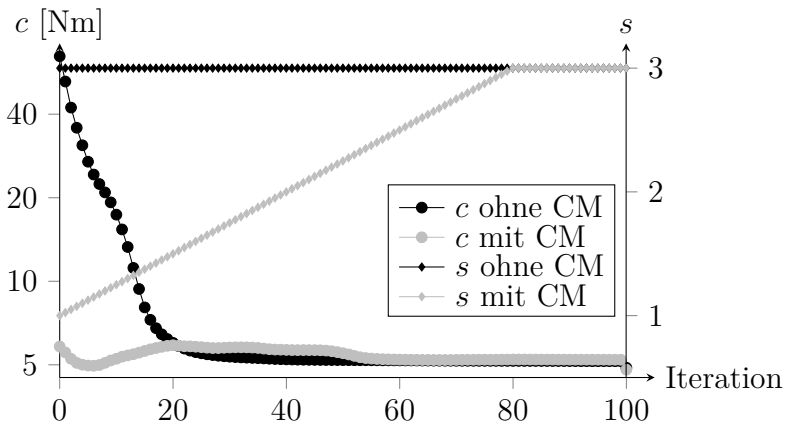
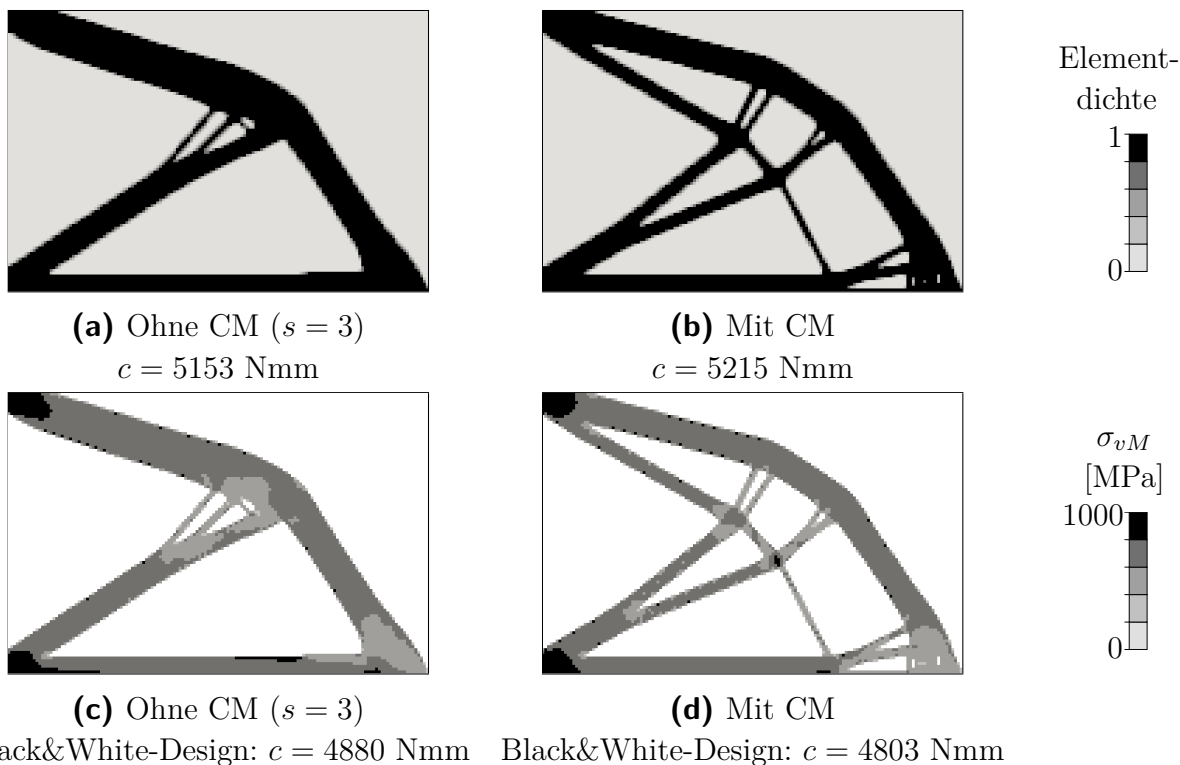
3.8 Continuation Method

Eine Methode, um gute lokale Minima zu finden, ist die Continuation Method. Dabei wird ausgenutzt, dass das Optimierungsproblem (zumindest bei Compliance-Volumen-Problemen) konvex ist, wenn eine lineare Materialinterpolation gewählt wird, d.h. für SIMP beim Penaltyexponenten $s = 1$. Durch die Konvexität gibt es nur ein Minimum, das globale Minimum, welches von einer beliebigen initialen Elementdichteverteilung gefunden wird. Wie beispielsweise in Abbildung 3–11c enthält jedoch das Optimum bei $s = 1$ viele Elemente mit Zwischendichten, sodass i.d.R. eine Interpretation des Ergebnisses in ein reales Bauteil schwerfällt. Oft wird deshalb der Penaltyexponent, beginnend bei $s = 1$, schrittweise erhöht, wenn ein Konvergenzkriterium erfüllt wurde. Dieses schrittweise Erhöhen des Penaltyexponenten wird Continuation Method genannt. Bendsøe und Sigmund (2004) empfehlen die Verwendung der Continuation Method. Genauere Untersuchungen zum Nutzen der Continuation Method im Verhältnis zur gesteigerten Rechenzeit werden in Rojas-Labanda und Stolpe (2015) erläutert. Außerdem wird gezeigt, dass die Continuation Method insbesondere bei einem schlechten Startdesign zu schnellerer Konvergenz und zu einem besseren Ergebnis führt.

In Abbildung 3–13 wird das Optimierungsergebnis der Kragsscheibe mit konstantem Penaltyexponenten mit dem Optimierungsergebnis der Continuation Method verglichen. Bei der Continuation Method wurde der Penaltyexponent während der ersten 80 Iterationen linear von $s = 1$ auf $s = 3$ erhöht. Für beide Optimierungen wurden 100 Iterationen durchgeführt.

Vor der Erstellung des Black&White-Designs tritt die geringste Compliance in der sechsten Iteration der Continuation Method mit $c = 4960$ Nmm auf. Diese Struktur weist hauptsächlich Zwischendichten auf und ist nur aufgrund des geringen Penaltyexponenten steif.

Am Ende der Optimierung werden unterschiedliche lokale Minima gefunden. Die Elementdichteverteilung in Abbildung 3–13a ist besser, denn sie führt zu einer geringeren Compliance. Da das Black&White-Design in Abbildung 3–13b eine geringere Compliance aufweist, ist die Struktur nach Anwendung der Continuation Method die bessere.



(e) Optimierungsverlauf (Compliance c und Penaltyexponent s)

Abbildung 3–13: Kragsscheibe unter Verwendung der Continuation Method (CM)

4 Erweiterungen der Dichtemethode um zusätzliche Struktureigenschaften

Die in Kapitel 3 beschriebenen Methoden sind bereits in frei verfügbarem Quelltext umgesetzt (Sigmund 2001, Bendsøe und Sigmund 2004). Die folgenden Erweiterungen sind hingegen an aktuelle Forschungsergebnisse angelehnt oder vollständig im Rahmen der vorliegenden Dissertation entstanden.

4.1 Vergleichsspannung

Für die Optimierung von Festigkeitsproblemen wird eine Norm für die von-Mises-Spannungen

$$\sigma_k = \left[\sum_{i=1}^{N_D} \sigma_{vM_i}^{rel\ k} \right]^{1/k} \quad (4-1)$$

definiert (Dems 1991, Le et al. 2010), mit der von-Mises-Spannung

$$\begin{aligned} \sigma_{vM_i} &= \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\sigma_{zz} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)} \\ &= \tilde{x}_i^s \sqrt{\mathbf{u}_{Ei}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_{Ei}} \end{aligned} \quad (4-2)$$

und der relaxierten Spannung $\sigma_{vM_i}^{rel} = \tilde{x}_i^{-q} \sigma_{vM_i}$. Eine Erhöhung des Spannungsexponenten k bewirkt, dass die höchsten relaxierten Spannungen stärker in der Spannungsnorm σ_k gewichtet werden. In dieser Arbeit bezieht sich die Spannungsnorm ausschließlich auf den Designbereich $i \in \{1, \dots, N_D\}$. Die Spannungen werden im Elementmittelpunkt ausgewertet und es wird als Spannungsrelaxationsexponent $q = s - 0.5$ gewählt. Dies bewirkt, dass bei einem konstanten Dehnungszustand die relaxierte Spannung

$$\sigma_{vM_i}^{rel} = \tilde{x}_i^{s-q} \sqrt{\mathbf{u}_{Ei}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_{Ei}} = \sqrt{\tilde{x}_i \mathbf{u}_{Ei}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_{Ei}} \quad (4-3)$$

von Elementen geringer Elementdichte verschwindet (vgl. Abbildung 4-1).

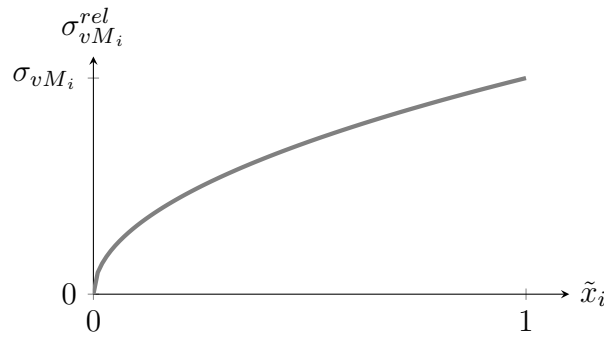


Abbildung 4–1: Materialinterpolation für Spannungen bei konstantem Dehnungszustand

Im Gegensatz zu Le et al. (2010) wird in dieser Dissertation nur eine globale Spannungsnorm pro Lastfall genutzt und keine geclusterten oder regionalen Spannungsnormen. Die Sensitivitäten für die Spannungsnorm können folgendermaßen berechnet werden (unter der Annahme konstanter Lasten)

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial \tilde{x}_i} = \sigma_k^{1-k} \left((s - q) \frac{\sigma_{vM_i}^{rel \ k}}{\tilde{x}_i} - \tilde{x}_i^{s-1} (\mathbf{A}_{Ei} \boldsymbol{\kappa})^T \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{u}_{Ei} \right) \quad (4-4)$$

$$\text{mit } \boldsymbol{\kappa} = s \mathbf{K}^{-1} \sum_{j=1}^{N_D} \left[\tilde{x}_j^{2(s-q)} \sigma_{vM_j}^{rel \ k-2} \mathbf{A}_{Ej}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_{Ej} \right].$$

Eine Herleitung der Sensitivitäten wird im Anhang A.3 gegeben. Anstelle der Spannungsnorm in Gleichung 4–1 wird in der Literatur alternativ die Kreisselmeier-Steinhauser-Funktion (Kreisselmeier und Steinhauser 1979)

$$\sigma_k = \frac{1}{k} \ln \sum_{i=1}^{N_D} e^{k \sigma_{vM_i}^{rel}} \quad (4-5)$$

verwendet, wobei hier analog zu Gleichung 4–1 eine Erhöhung des Parameters k bewirkt, dass die höchsten Spannungen stärker gewichtet werden.

Das Beispiel der Kragsscheibe (siehe Abbildung 4–7a) wird auch hier genutzt. Die Spannungsnorm σ_k wird bei der restringierten Volumenfüllung $v_F \leq 0.3$ minimiert. Als Spannungsexponent wird $k = 10$ gewählt. Da ein hoher Spannungsexponent wie $k = 10$ lokale Effekte stark berücksichtigt, kann es zu Sprüngen der Stelle höchster Spannung und Diskontinuitäten im Optimierungsprozess kommen, wenn die Schrittweite im Optimierungsprozess zu groß gewählt wird. Daher werden aus Tabelle 3–1 auf Seite 54 die Werte $\gamma_0 = 0.05$, $\gamma_{inc} = 1.05$ und $\Delta_{max} = 0.05$ aufgrund von Erfahrungswerten angepasst. Aufgrund der geringeren Schrittweite werden mehr Iterationen (bis zu 500) zugelassen.

Die Auswertung des Black&White-Designs ist bei Spannungskriterien nicht zielführend, da die diskontinuierliche Abbildung des Randes mit Kerben durch die Voxeldiskretisierung zu lokal erhöhten Spannungen führt. Diese Kerben werden durch die Elementdichten nicht abgebildet, daher werden die letzten Iterationen der Optimierungen ausgewertet. Der Vergleich mit dem Ergebnis der Minimierung der Compliance (vgl. Abbildung 3–8) in Abbildung 4–2 zeigt, dass das Spannungskriterium um 28% und dadurch auch die Maximalspannung um 44% reduziert werden konnte.

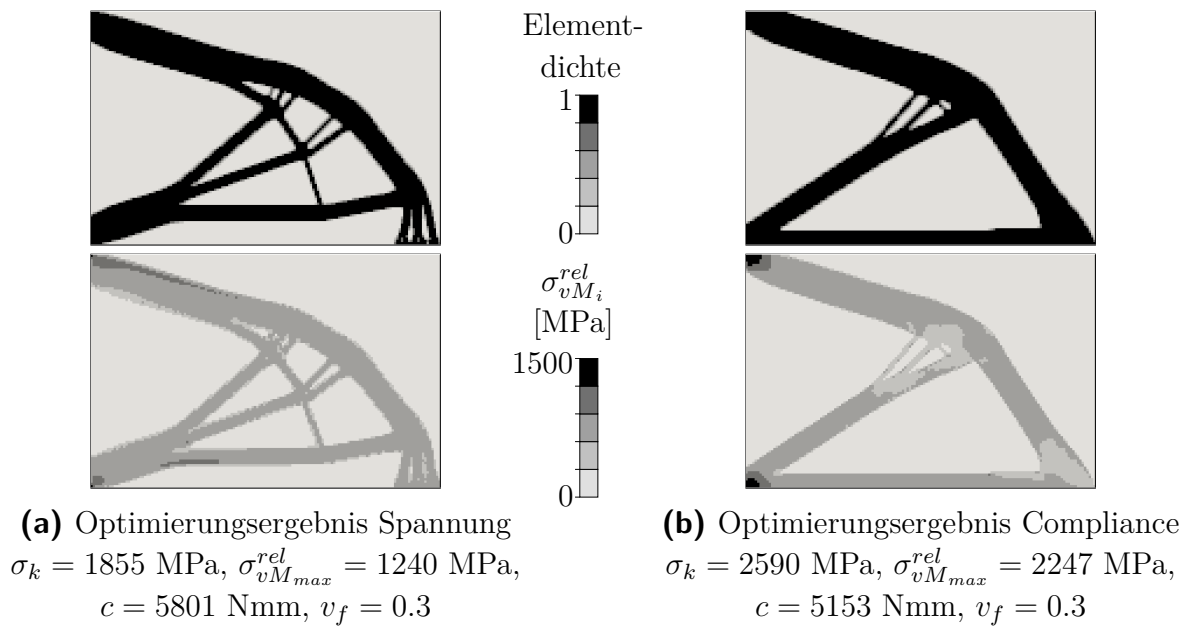


Abbildung 4–2: Kragsscheibe – links: Spannungskriterium σ_k minimiert, rechts: Compliance c minimiert, jeweils mit Volumenrestriktion $v_f \leq 0.3$

Wird die Spannung in einem Bauteil als Restriktion genutzt, so betrifft die Restriktion in der Regel nicht das Spannungskriterium σ_k , sondern die maximale von-Mises-Spannung $\sigma_{vM_{max}}^{rel}$. Um diese Restriktion einzuhalten, wird wie in Le et al. (2010) der Faktor c_s

$$c_s^{(d)} = \alpha_s^{(d)} \frac{\sigma_{vM_{max}}^{rel (d-1)}}{\sigma_k^{(d-1)}} + (1 - \alpha_s^{(d)}) c_s^{(d-1)} \quad (4-6)$$

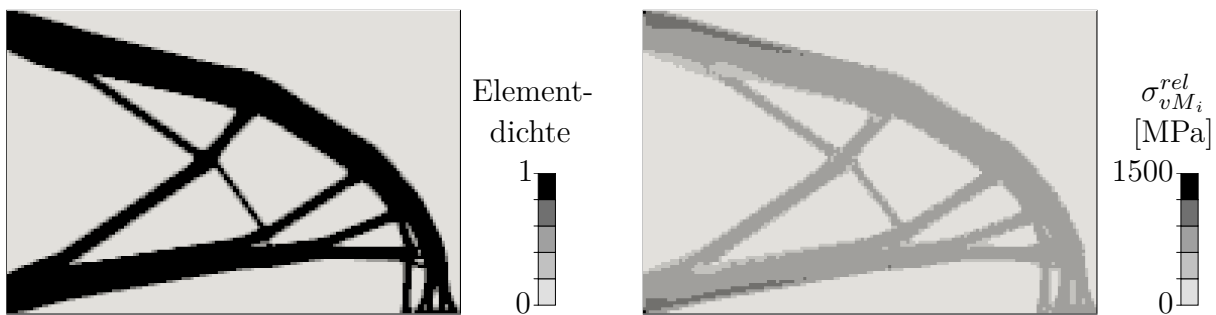
eingeführt, sodass die Restriktion der maximalen von-Mises-Spannung mit dem Wert $\bar{\sigma}$ als

$$\sigma_{vM_{max}}^{rel} \approx c_s^{(d)} \sigma_k \leq \bar{\sigma} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma_{vM_{max}}^{rel}}{\partial \tilde{x}_i} \approx c_s^{(d)} \frac{\partial \sigma_k}{\partial \tilde{x}_i} \quad (4-7)$$

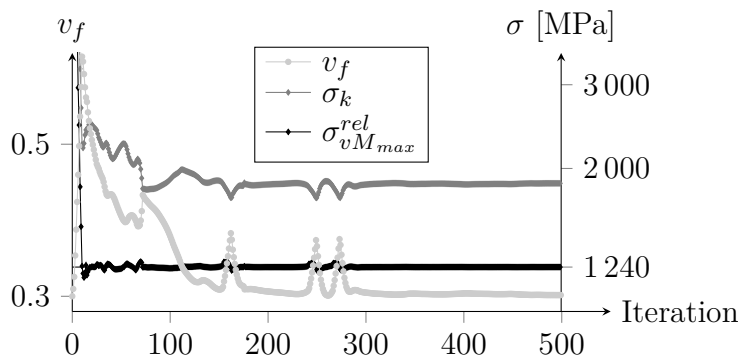
beschrieben werden kann. Die aktuelle Iteration wird mit d bezeichnet. Ist $\alpha_s^{(d)} = 1$, so ist $c_s^{(d)}$ das Verhältnis aus der maximalen von-Mises-Spannung zur Spannungsnorm aus der letzten Iteration. Um Oszillationen im Konvergenzprozess zu vermeiden, wird $\alpha_s^{(d)}$ gewählt als

$$\alpha_s^{(d)} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (c_s^{(d-1)} - c_s^{(d-2)}) \cdot (c_s^{(d-2)} - c_s^{(d-3)}) \geq 0 \quad \text{Monotonie} \\ 0.7, & \text{wenn } (c_s^{(d-1)} - c_s^{(d-2)}) \cdot (c_s^{(d-2)} - c_s^{(d-3)}) < 0 \quad \text{Oszillation.} \end{cases} \quad (4-8)$$

Abbildung 4-3 zeigt die Minimierung des Volumens der Kragsscheibe mit der Spannungsrestriktion $\sigma_{vM_{max}}^{rel} \leq 1240$. Im Vergleich zu Abbildung 4-2 entsteht hier ein anderes lokales Minimum. Das Volumen ist nahezu dasselbe wie bei der Spannungsminimierung in Abbildung 4-2. Es kommt zu Diskontinuitäten im Optimierungsprozess (Erhöhung von v_f während einiger Iterationen), wenn sich $\sigma_{vM_{max}}^{rel}$ und σ_k antiproportional verhalten.



(a) Optimierungsergebnis Spannungsrestriktion $\sigma_k = 1861$ MPa, $\sigma_{vM_{max}}^{rel} = 1240$ MPa, $c = 5750$ Nmm, $v_f = 0.302$



(b) Optimierungshistorie

Abbildung 4-3: Kragsscheibe – Optimierung mit Spannungsrestriktion

4.2 Eigenfrequenz

Eine wichtige Rolle bei der Auslegung dynamisch angeregter Bauteile ist die Eigenfrequenz, die sich aus der Modalanalyse

$$(\mathbf{K} - \psi_j \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi}_j = \mathbf{0} \quad (4-9)$$

ergibt. Dabei sind die Eigenfrequenzen f_j in den Eigenwerten $\psi_j = (2\pi f_j)^2$ enthalten, \mathbf{M} ist die globale Massenmatrix und $\boldsymbol{\varphi}_j$ sind die Eigenformen. Um lokale Moden in Regionen geringer Elementdichte zu vermeiden, wird die physikalische Dichte folgendermaßen C^1 -stetig interpoliert (Du und Olhoff 2007)

$$\rho_i = \begin{cases} \tilde{x}_i \rho_{0i}, & \text{wenn } \tilde{x}_i > 0.1 \\ (6 \cdot 10^5 \tilde{x}_i^6 - 5 \cdot 10^6 \tilde{x}_i^7) \rho_{0i}, & \text{wenn } \tilde{x}_i \leq 0.1 \end{cases} \quad (4-10)$$

mit den Sensitivitäten (Herleitung im Anhang A.4)

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial \tilde{x}_i} = \begin{cases} \frac{\boldsymbol{\varphi}_{Ei,j}^T [s \tilde{x}_i^{s-1} \mathbf{K}_{Ei} - \psi_j \mathbf{M}_{Ei}] \boldsymbol{\varphi}_{Ei,j}}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j}, & \text{wenn } \tilde{x}_i > 0.1 \\ \frac{\boldsymbol{\varphi}_{Ei,j}^T [s \tilde{x}_i^{s-1} \mathbf{K}_{Ei} - \psi_j (36 \cdot 10^5 \tilde{x}_i^5 - 35 \cdot 10^6 \tilde{x}_i^6) \mathbf{M}_{Ei}] \boldsymbol{\varphi}_{Ei,j}}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j}, & \text{wenn } \tilde{x}_i \leq 0.1. \end{cases} \quad (4-11)$$

Diese Materialinterpolation sorgt dafür, dass der lokale Rayleigh-Koeffizient $\frac{E_i}{\rho_i}$ für geringe Elementdichten \tilde{x}_i nicht gegen null geht (vgl. Abbildung 4-4). Damit treten keine Eigenformen in Bereichen der Minimaldichte auf. Diese Bereiche besitzen eine extrem geringe Dichte und schwingen dank dieser Materialinterpolation mit, ohne die Eigenform und Eigenfrequenz merklich zu beeinflussen.

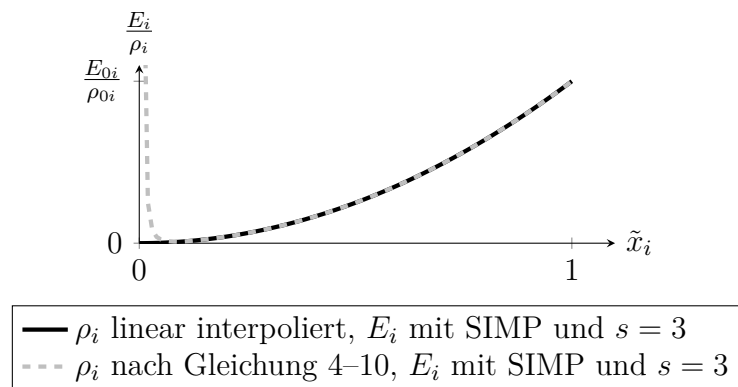


Abbildung 4-4: Materialinterpolation für Eigenfrequenzprobleme

Wird die Eigenfrequenz als Zielfunktion gewählt, können die einzelnen Eigenmoden folgendermaßen berücksichtigt werden:

- a) Es wird nur die kritische Eigenfrequenz (in der Regel die geringste) berücksichtigt und nur deren Sensitivität für die Aktualisierung der Entwurfsvariablen verwendet. Ein mögliches Problem sind Eigenformen, deren Eigenfrequenz abwechselnd die kritische ist. Wechselt die kritische Eigenform jede Iteration, so kann das Niveau der kritischen Eigenfrequenzen nicht mehr gezielt verändert werden.
- b) Es wird eine Norm aus allen berechneten Eigenfrequenzen gebildet. Ist die geringste Eigenfrequenz die kritische, so ist die Norm

$$\psi_k = \left[\sum_j \psi_j^{-k} \right]^{-1/k} \quad (4-12)$$

sinnvoll. Je größer k gewählt wird, desto stärker gehen die niedrigen Eigenwerte in die Norm ein. Diese Variante wird in dieser Arbeit verwendet. Alternativ kann auch die Kreisselmeier-Steinhauser-Funktion aus Gleichung 4–5 verwendet werden.

Wird die Eigenfrequenz als Restriktion gewählt, können die einzelnen Eigenmoden folgendermaßen berücksichtigt werden:

- a) Es werden alle Eigenmoden als einzelne Restriktionen gehandhabt.
- b) Es wird eine Norm wie in Gleichung 4–12 gebildet. Die Diskrepanz zwischen dem Wert der Norm und der kritischen Eigenfrequenz wird behandelt wie bei der Restriktion des Spannungskriteriums in den Gleichungen 4–6 bis 4–8. Diese Variante wird in dieser Arbeit verwendet.

Als Beispiel wird auch hier die Kragsscheibe verwendet. Anstelle der Linienlast befindet sich eine verteilte Masse an einer Kante der Kragsscheibe. Dies zeigt Abbildung 4–5a. Knotenverschiebungen in z -Richtung werden im Quasi-2D-Beispiel aus Voxeln nicht zugelassen, das heißt es liegt ein ebener Verzerrungszustand vor. Die Norm ψ_k mit $k = 8$ wird maximiert, die Volumenfüllung $v_f \leq 0.3$ wird restringiert. Es werden die niedrigsten 10 Eigenfrequenzen berechnet. Als FE-Solver wird OptiStruct[®] Analyse verwendet, maximal 500 Iterationen werden gerechnet. Alle weiteren Einstellungen entsprechen Tabelle 3–1 auf Seite 54.

Abbildung 4–5 kann entnommen werden, dass mit geringerer Masse die maximierte Eigenfrequenz steigt. Die Masse der optimierten Struktur verschiebt sich mit geringerem Gewicht der Punktmasse zur Einspannung hin, da das Gewicht der Kragsscheibe mit $m = 0.035$ kg im Vergleich zur verteilten Masse relevant wird und Masse, die weit von der Einspannung entfernt ist, die Eigenfrequenz verringert. Die Eigenform bleibt in allen Fällen die erste Biegeeigenform.

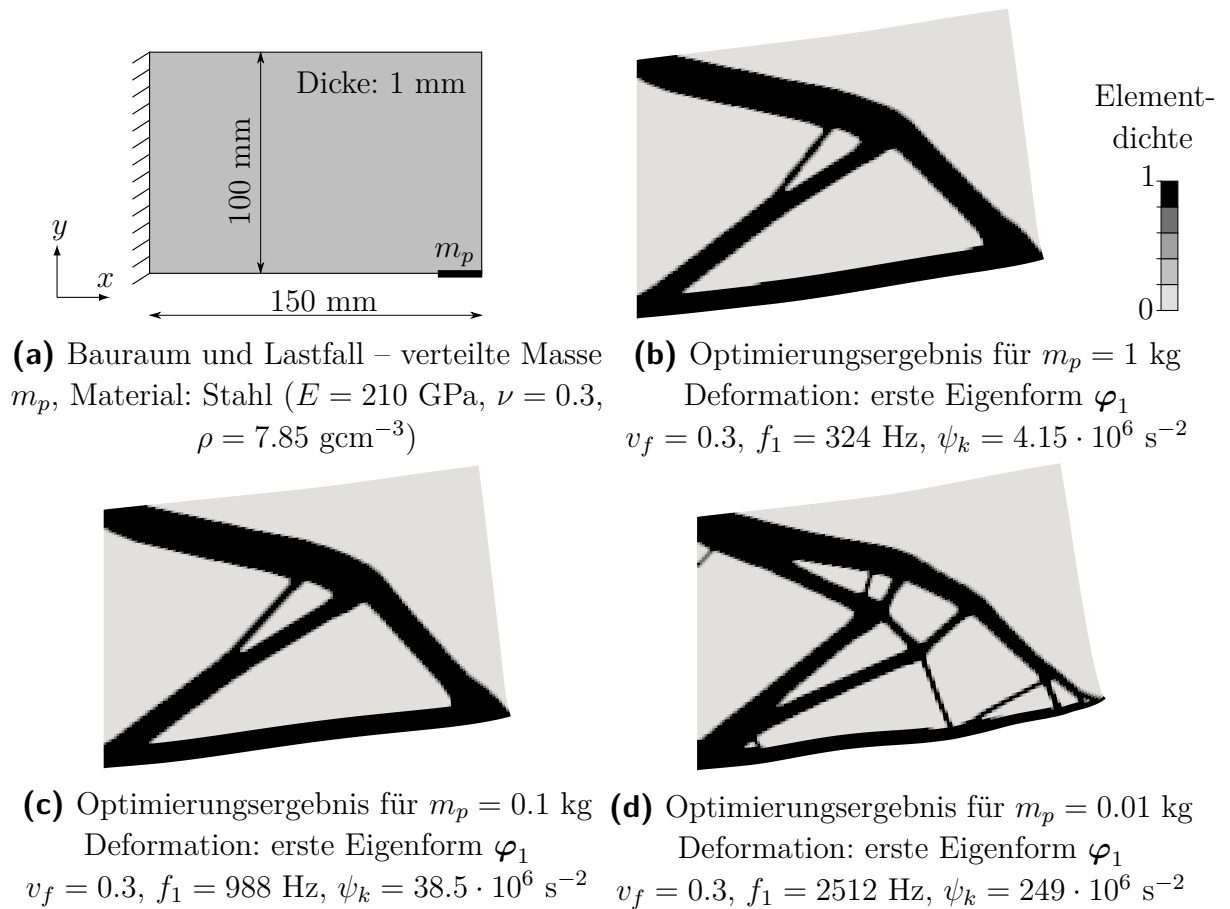


Abbildung 4–5: Kragsscheibe – Optimierung mit Eigenfrequenzen

4.3 Beulen

Ein ähnliches Eigenwertproblem ist das lineare Beulen

$$(\mathbf{G} + \psi_j \mathbf{K}) \varphi_j = \mathbf{0} \quad (4-13)$$

mit der Beulsicherheit $T_j = \frac{1}{\psi_j}$ und den Beulformen φ_j . Dabei wird die geometrische Nichtlinearität berücksichtigt, um die Stabilität (Knicken, Beulen, Kippen, siehe Petersen 2013) bei weiterhin linearem Materialverhalten zu überprüfen. Die geometrische Steifigkeitsmatrix \mathbf{G} ist abhängig von den Verschiebungen in einem linear elastischen Referenzlastfall $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{p}$ und beschreibt, wie sich die Steifigkeitsmatrix durch eine Vervielfachung der Verschiebungen im Referenzlastfall verändert (Browne 2013).

Um lokale Moden in Regionen geringer Elementdichte zu vermeiden, wird der Elastizitätsmodul E_{Gi} für die geometrische Steifigkeitsmatrix \mathbf{G}_{Ei} und der Elastizitätsmodul E_{Ki} für die lineare Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{Ei} unterschiedlich interpoliert:

$$\begin{aligned}
E_{Gi} &= \tilde{x}_i^s E_{0i} \\
E_{Ki} &= [x_B + (1 - x_B) \tilde{x}_i^s] E_{0i}.
\end{aligned} \tag{4-14}$$

Die Materialinterpolation in Gleichung 4-14 sorgt dafür, dass Bereiche geringer Dichte weniger stark in die geometrische Steifigkeitsmatrix eingehen (vgl. Abbildung 4-6) und so in diesen Bereichen keine Beulformen entstehen. x_B quantifiziert den Bereich der geringen Elementdichten, in dem die geometrische Steifigkeitsmatrix geringer skaliert wird als die lineare Steifigkeitsmatrix. Je kleiner x_B gewählt wird, desto unetwiger wird die Optimierung, da $\frac{E_{Gi}}{E_{Ki}}$ sich der Einheitssprungfunktion annähert. Ein größeres x_B sorgt für eine größere lineare Steifigkeit von Elementen mit Mindestdichte, sodass das mechanische Verhalten der Struktur mit Zwischendichten nicht mehr dem Verhalten der interpretierten Struktur entspricht. Im Folgenden wird immer $x_B = 0.001$ gewählt.

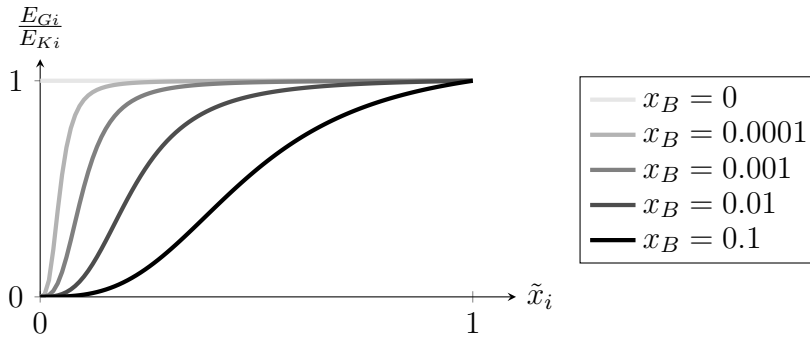


Abbildung 4-6: Materialinterpolation für Beulprobleme (Penaltyexponent $s = 3$)

Bendsøe und Sigmund (2004) zeigen einen ähnlichen Ansatz für die Topologieoptimierung unter Berücksichtigung linearen Beulens für zweidimensionale Strukturen mit bis zu 3600 Elementen. Neves et al. (1995) sowie Rahmatalla und Swan (2003) nutzen diese kontinuierliche Materialinterpolation nicht, sondern setzen die geometrische Steifigkeitsmatrix von Elementen geringer Dichte auf einen vernachlässigbar kleinen Wert oder berücksichtigen diese Elemente nicht in der FE-Berechnung.

Die Sensitivitäten können als

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_j}{\partial \tilde{x}_i} &= \frac{T_j^2/E_{0i}}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j} \left[\boldsymbol{\varphi}_{j,Ei}^T \left(\frac{\partial E_{Gi}}{\partial \tilde{x}_i} \mathbf{G}_{Ei} + \frac{1}{T_j} \frac{\partial E_{Ki}}{\partial \tilde{x}_i} \mathbf{K}_{Ei} \right) \boldsymbol{\varphi}_{j,Ei} - (\mathbf{A}_{Ei} \boldsymbol{\kappa}_j)^T \frac{\partial E_{Ki}}{\partial \tilde{x}_i} \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{u}_{Ei} \right] \\
\text{mit } \boldsymbol{\kappa}_j &= \mathbf{K}^{-1} \left(\boldsymbol{\varphi}_j^T \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\varphi}_j \right)
\end{aligned} \tag{4-15}$$

berechnet werden (Herleitung in Anhang A.5).

Beispielhaft wird die Beulsicherheit der Kragplatte mit den unterschiedlichen Lastrichtungen aus Abbildung 4–7 maximiert. Um Beulmoden in z -Richtung im Quasi-2D-Beispiel aus Voxeln zu verhindern, werden zusätzlich alle Knotenverschiebungen in z -Richtung verhindert. Die Norm der Beulsicherheiten

$$T_k = \left[\sum_{j=1}^{20} T_j^{-k} \right]^{-1/k} \quad (4-16)$$

mit $k = 12$ wird maximiert, die Volumenrestriktion beträgt $v_f \leq 0.3$. In jeder Iteration werden die 20 kleinsten positiven Beulsicherheiten berechnet. Als FE-Solver wird OptiStruct[®] Analyse verwendet, die initiale Schrittweite für MMA wird auf $\gamma_0 = 0.05$ reduziert und maximal 500 Iterationen werden gerechnet. Alle weiteren Einstellungen entsprechen Tabelle 3–1 auf Seite 54.

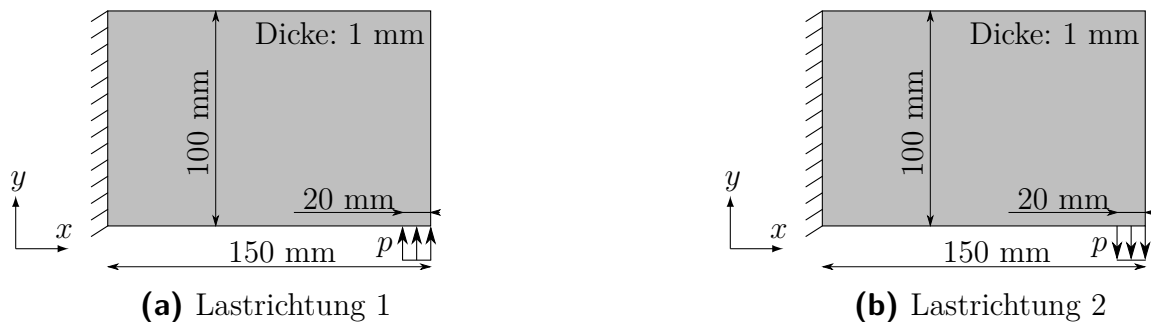


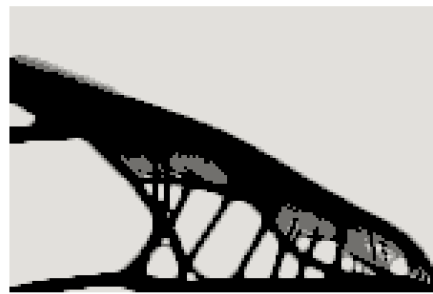
Abbildung 4–7: Bauraum und Lastfälle: $p = 333 \text{ N/mm}$,
Material: Stahl ($E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$), $u_z = 0$

Lastrichtung 1

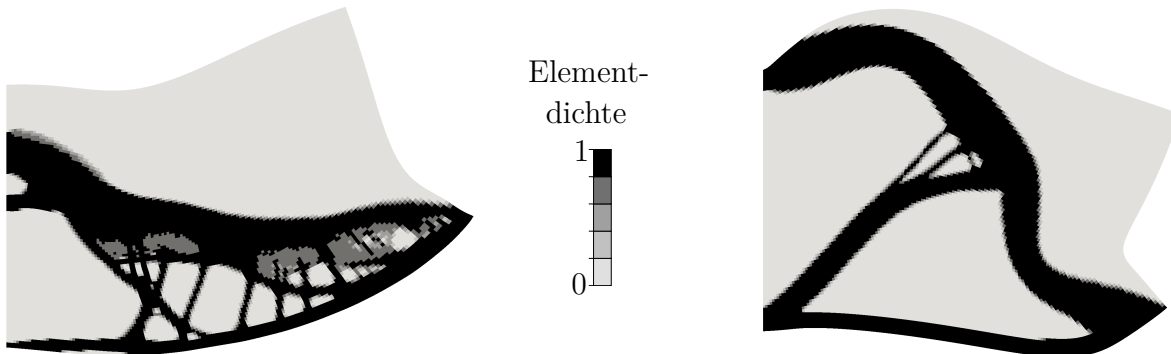
Abbildung 4–8 zeigt, dass die Maximierung der Beulsicherheit eine grundlegend andere Topologie erzeugt als die Minimierung der Compliance. Die auf Beulen optimierte Struktur (Abbildungen 4–8a und 4–8b) hat eine fast 4-fach höhere erste Beulsicherheit T_1 , dafür ist die Compliance mehr als doppelt so groß. Eine Umwandlung in ein Black&White-Design ist für Beulanalysen nicht sinnvoll, da häufig künstliche Beulformen an Voxelkerben auftreten.

Lastrichtung 2

Im Gegensatz zu allen anderen bisher gezeigten Struktureigenschaften ist beim Beulen die Lastrichtung entscheidend. Dies liegt daran, dass für das Beulen Druckspannungen ausschlaggebend sind und so im Gegensatz zu Compliance und Vergleichsspannung Zug- und Druckbereiche unterschiedliche Sensitivitäten aufweisen. Wirkt die Linienlast wie in Abbildung 4–7b statt in y -Richtung entgegen der y -Richtung, entsteht eine elementar andere Struktur. Diese wird in Abbildung 4–9 gezeigt. Zusätzlich wurde für diese Optimierung die Restriktion $c \leq 20 \text{ Nm}$



(a) Optimierungsergebnis Beulsicherheit, nicht deformiert

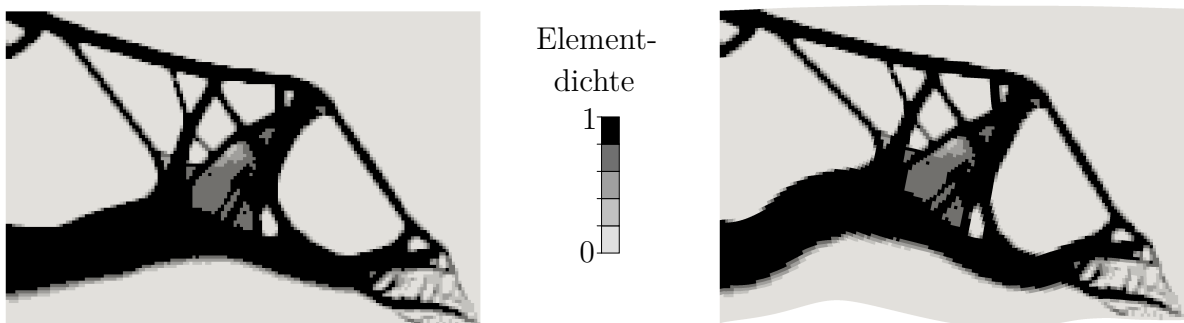


(b) Optimierungsergebnis Beulsicherheit
 Deformation: Beulform φ_1
 $T_1 = 48.08$, $T_k = 45.15$,
 $c = 12.09$ Nm, $\nu_f = 0.3$

(c) Optimierungsergebnis Compliance
 (Abb. 3–8), Deformation: Beulform φ_1
 $T_1 = 12.92$, $T_k = 12.88$,
 $c = 5.15$ Nm, $\nu_f = 0.3$

Abbildung 4–8: Optimierungen der Kragscheibe –
 Vergleich Beulsicherheit und Compliance

verwendet. Diese ist verantwortlich für die Ausbildung der Struktur im Bereich der Last. Ohne die Berücksichtigung der Compliance würde sich in diesem Bereich keine Struktur ausbilden, da dieser ausschließlich auf Zug belastet ist.



(a) Nicht deformiert

(b) Deformation: Beulform φ_1

Abbildung 4–9: Optimierung der Kragscheibe auf Beulsicherheit mit umgekehrter
 Lastrichtung und $c \leq 20$ Nm, $T_1 = 57.56$, $T_k = 51.89$, $\nu_f = 0.3$

5 Dichtemethode für Schalenstrukturen ohne Hinterschnitte

Durch die Optimierung mit den in den Kapiteln 3 und 4 beschriebenen Algorithmen entstehen in der Regel Strukturen, die mit Verfahren für die Großserienfertigung nicht herstellbar sind. Im folgenden Kapitel werden die Grundlagen für die Fertigungsrestriktion für einstufiges Tiefziehen erläutert. Dabei werden geometrische Kriterien für eine einstufige Tiefziehbarkeit berücksichtigt. Diese Methoden und Erkenntnisse entstanden durch die Forschung im Rahmen der vorliegenden Dissertation (siehe auch Dienemann et al. 2015, Dienemann et al. 2017).

5.1 Fertigungsrestriktion für Schalenstrukturen ohne Hinterschnitte

5.1.1 Ziele der Fertigungsrestriktion

Durch einstufiges Tiefziehen (vgl. Kapitel 2.2.3) lassen sich Bauteile herstellen, die folgende geometrischen Kriterien für das umgeformte Blech aufweisen:

- konstante Wandstärke,
- keine Hinterschnitte in Stempelrichtung und
- keine Rippen.

Bei der konstanten Wandstärke wird die Wanddickenänderung durch den Fertigungsprozess vernachlässigt. Rippen können bei Vermeidung von Hinterschnitten nur in Stempelrichtung auftreten. Im Folgenden wird die Ausdehnung in Stempelrichtung beschränkt, sodass Rippen implizit verhindert werden.

Prinzipielles Vorgehen

Aus der Verteilung der Elementdichten wird in jeder Iteration eine Mittelfläche abgeleitet, die keine Hinterschnitte haben kann. Liegen Elemente weit entfernt von der aktuellen Mittelfläche, wird die Sensitivität der Zielfunktion für diese Elemente durch die Multiplikation mit einem Bestrafungsfaktor P_i verschlechtert. Dieser Bestrafungsfaktor P_i ist abhängig von der Zielwandstärke und dem kürzesten Abstand d_i des Elements i zur Mittelfläche. Dadurch entstehen signifikante Elementdichten nur in der Nähe der aktuellen Mittelfläche. Die Elementdichten in Mittelflächennähe können sich verändern, wodurch die Mittelfläche sich verlagert.

5.1.2 Berechnung der Mittelfläche

Zur Umsetzung der Fertigungsrestriktion muss die Mittelfläche aus der Lage der Elemente und deren Elementdichte berechnet werden. Dazu wird der Bauraum in Säulen mit Breite und Tiefe w aufgeteilt, welche in Stempelrichtung orientiert sind (vgl. Abbildung 5–1). Dabei bezeichnet w die Elementkantenlänge der Voxel. Ein Element wird einer Säule zugerechnet, wenn der Elementmittelpunkt innerhalb der Säule liegt. Innerhalb jeder Säule wird der Schalenmittelpunkt aus dem gewichteten Mittel der Positionen der Elementmittelpunkte ξ_i und der Elementdichte \tilde{x}_i gebildet.

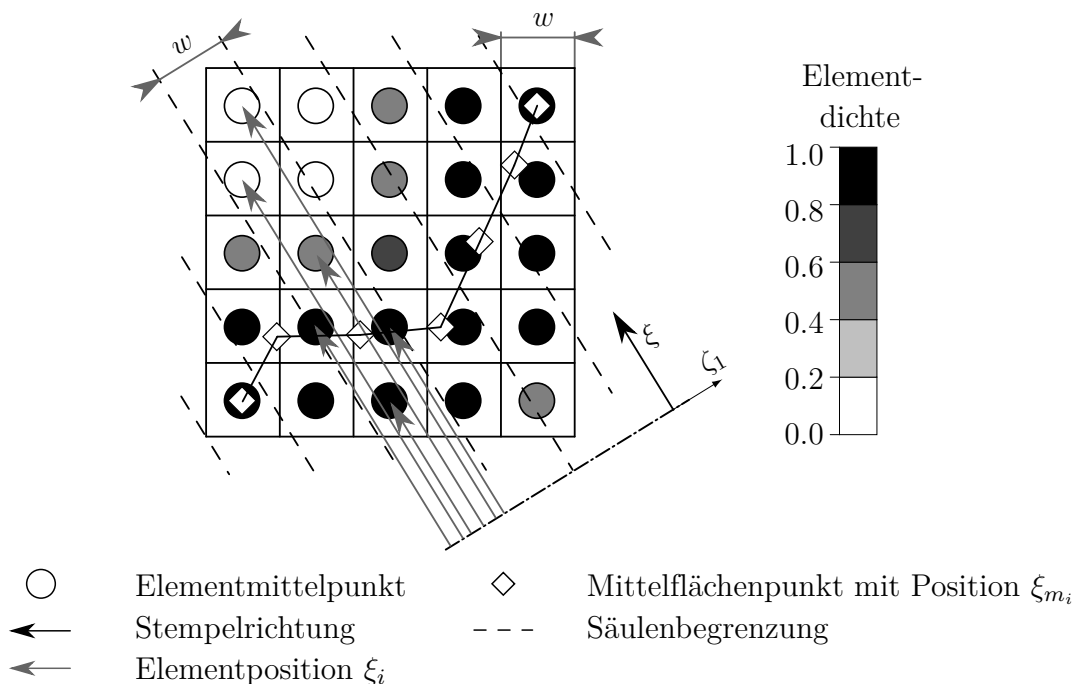


Abbildung 5–1: Berechnung der Mittelfläche anhand eines exemplarischen Querschnitts

Die Positionen der Elementmittelpunkte sind in Abbildung 5–1 exemplarisch für eine Säule mit grauen Pfeilen dargestellt. Da Elemente mit Mindestdichte keinen Einfluss auf die Mittelflächenposition haben sollen, wird von der Elementdichte \tilde{x}_i die Mindestdichte \tilde{x}_{min} subtrahiert:

$$\xi_{m_j} = \frac{\sum \xi_i (\tilde{x}_i - \tilde{x}_{min})}{\sum (\tilde{x}_i - \tilde{x}_{min})}. \quad (5-1)$$

Dies geschieht für jede Säule j . Zwischen den Spaltenmittelpunkten wird die Mittelfläche linear interpoliert. Durch diese Mittelwertbildung je Spalte kann die Mittelfläche keine Hinterschnitte aufweisen.

5.1.3 Bestrafung der Sensitivitäten der Zielfunktion weit entfernt von der Mittelfläche

Die Bestrafung der Sensitivitäten der Zielfunktion soll mithilfe des Faktors P_i erfolgen. Dieser Bestrafungsfaktor hängt vom kürzesten Abstand d_i zwischen dem Mittelpunkt des betreffenden Voxels i und der Mittelfläche $[\zeta_{m_1}, \zeta_{m_2}, \xi_m]^T$ (unter Berücksichtigung der linearen Interpolation zwischen den Mittelflächenpunkten) ab:

$$d_i = \min_j \left(\text{dist}(\mathbf{o}_i, [\zeta_{m_{1j}} \quad \zeta_{m_{2j}} \quad \xi_{m_j}]) \right) = \min_j \left(\left| \mathbf{o}_i - [\zeta_{m_{1j}} \quad \zeta_{m_{2j}} \quad \xi_{m_j}]^T \right| \right). \quad (5-2)$$

Die Ober- bzw. Unterseite der Blechstruktur liegt bei $d_i = \frac{b_c}{2}$ mit der Zielwandstärke b_c . Liegen die Elemente innerhalb des Bleches ($d_i/b_c < 0.5$), so sollen die Sensitivitäten der Zielfunktion unverändert bleiben ($P_i \approx 1$). Liegen die Elemente außerhalb der Schalenstruktur ($d_i/b_c > 0.5$), sollen die Sensitivitäten der Zielfunktion verschlechtert werden. Für negative Sensitivitäten (z.B. Compliance) bedeutet eine Verschlechterung die Multiplikation mit einem kleinen positiven Wert ($\lim_{d_i/b_c \rightarrow \infty} P_i = 0$). Dazwischen soll die Bestrafungsfunktion stetig differenzierbar verlaufen. Diese Anforderungen erfüllt die Bestrafungsfunktion

$$P_i(d_i) = \frac{1 - \tanh(a [2 d_i/b_c - 1])}{1 + \tanh(a)}, \quad (5-3)$$

die in Abbildung 5–2 dargestellt wird. Der Parameter a beschreibt die Diskretheit der Funktion. Eine geringe Diskretheit a sorgt für eine unzureichende Bestrafung und damit zu einer unklaren Abgrenzung zwischen innerhalb und außerhalb des Bleches. Somit kann die durch Voxel abgebildete Schalenstruktur lokal deutlich dicker als b_c werden. Im Gegensatz dazu sorgt eine große Diskretheit a für

Diskontinuitäten im Optimierungsprozess, schlechte lokale Minima und eine langsame Umlagerung der Schalenmittelfläche. In allen folgenden Beispielen wird als Kompromiss $a = 4$ verwendet.

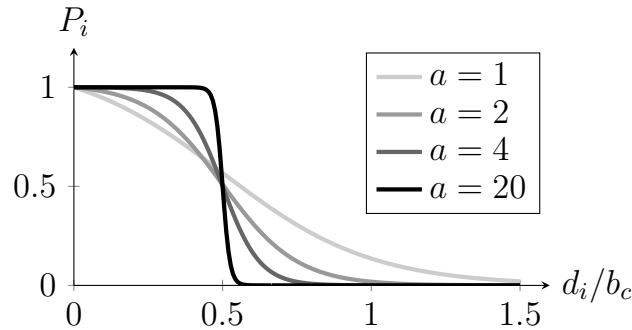


Abbildung 5–2: Bestrafungsfaktor P_i in Abhängigkeit vom Abstand des betrachteten Elements d_i zur Mittelfläche

Sind die Sensitivitäten der Zielfunktion negativ, so wird die Sensitivität durch eine Multiplikation mit P_i verschlechtert. Sind sie positiv, wird die Sensitivität durch eine Division durch P_i verschlechtert. Im Folgenden wird die Zielfunktion auf die Compliance c und das Volumen v bzw. die Volumenfüllung v_f oder die Masse m eingeschränkt:

$$\frac{\partial f'}{\partial x_i} = \begin{cases} P_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, & \text{wenn } f = c \\ \frac{1}{P_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}, & \text{wenn } f = v, f = v_f \text{ oder } f = m \end{cases} \quad (5-4)$$

Beim Sensitivitätenfilter wird anstelle von $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ die gefilterte Sensitivität $\widetilde{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$ in Gleichung 5–4 verwendet. Die bestrafte Sensitivitäten der Zielfunktion $\frac{\partial f'}{\partial x_i}$ werden für die Aktualisierung der Entwurfsvariablen genutzt.

Trotz der Einschränkung der Zielfunktionen können praktische Probleme (übliche Zielfunktion: Minimiere Masse) und akademische Probleme (übliche Zielfunktion: Minimiere Compliance) bearbeitet werden. Als Restriktionen können weiterhin beliebige Struktureigenschaften verwendet werden.

Die Bestrafung der Sensitivitäten der Zielfunktion ist nicht differenzierbar, da die Abstandsfunktion in Gleichung 5–2 nicht differenzierbar ist. Bei der Suche nach dem geringsten Abstand des aktuellen Elements i zu den Mittelflächenpunkten j kann sich der korrespondierende Mittelflächenpunkt j diskontinuierlich von einer Iteration zur nächsten verändern. Somit ist diese Fertigungsrestriktion eine Heuristik, die die Mittelfläche entsprechend der Sensitivitäten in Richtung der Schalenober- oder -unterseite verlagert.

Die Bestrafung der Sensitivitäten der Zielfunktion erlaubt damit keine Hinterschnitte und sorgt für eine maximale Schalendicke. Für eine minimale Schalendicke sorgt der Filterradius, der als $R \approx 0.6b_c$ gewählt werden sollte.

5.1.4 Maßnahmen zur verbesserten Konvergenz

Die Fertigungsrestriktion für Schalenstrukturen ohne Hinterschnitte sorgt für Konvergenzprobleme, die im Folgenden aufgeführt werden. So werden ohne zusätzliche Maßnahmen viele Iterationen benötigt (10 - 100 mal so viele Iterationen wie ohne Fertigungsrestriktion) und es können schlechte lokale Minima auftreten.

Die Gründe für mögliche Konvergenzprobleme sind

- **Schlechtes initiales Design**

Durch die Berechnung der Mittelfläche und die Bestrafung der Sensitivitäten weit entfernt von dieser Mittelfläche entsteht bei uniformer Elementdichteverteilung die initiale Mittelfläche mittig im Bauraum. Dieses Startdesign weist üblicherweise schlechte mechanische Eigenschaften auf. Die Verbesserung dieses schlechten initialen Designs benötigt bei einer Bestrafung der Zwischendichten (Penaltyexponent $s > 1$) viele Iterationen.

- **Verlagerung der Mittelfläche nicht möglich**

Die Verlagerung der Mittelfläche wird verlangsamt, wenn bei konstanter Zielwandstärke b_c

- die Sensitivitäten auf Schalenunter- und -oberseite nahezu gleich sind. Dies tritt beispielsweise bei hauptsächlich auf Biegung belasteten Strukturen hinsichtlich der Compliance oder von-Mises-Spannung auf.
- alle Entwurfsvariablen in einem Querschnitt in Stempelrichtung innerhalb der Schalendicke $d_i/b_c \lesssim 0.5$ an der oberen Grenze $x_i \approx x_{max} = 1$ sind. Dann ist eine kontinuierliche Umverteilung der Elementdichten innerhalb der Wandstärke nicht möglich und die Mittelfläche kann sich nicht zu einer verbesserten Form verändern.

Dies lässt sich durch mehrere Maßnahmen beheben:

- **Verwendung der Continuation Method für Compliance-Volumen-Problemen**

Um schnell zu einem verbesserten Design zu gelangen, wird die Continuation Method genutzt. Damit startet die Optimierung mit einem Penaltyexponenten $s = 1$ und wird später erhöht.

- **Alternieren der Zielwandstärke b_c**

Die Konvergenzprobleme können ebenso durch eine initial höhere Zielwandstärke b_c behoben werden, sodass über einen Querschnitt nie alle Entwurfsvariablen innerhalb der Schalendicke den Maximalwert $x_i \approx 1$ annehmen. Nach Absenken der Zielwandstärke auf die finale Zielwandstärke b_f , wird die Zielwandstärke alterniert. Tritt dabei die Situation auf, dass alle Entwurfsvariablen in einem Querschnitt innerhalb der Schalendicke den Maximalwert $x_i \approx 1$ annehmen, wird die Zielwandstärke um eine Elementkantenlänge erhöht. Damit kann sich die Elementdichte entsprechend der Sensitivitäten entweder an der Schalenober- oder -unterseite erhöhen und die Mittelfläche wandert zu einer verbesserten Position. Nach einigen Iterationen wird die Zielwandstärke wieder auf b_f verringert. Dieses Alternieren der Zielwandstärke wird so lange durchgeführt, bis dies nicht mehr zu einer ausreichenden Verbesserung der Struktur führt.

5.1.5 Optimierungsablauf mit Fertigungsrestriktion für Schalenstrukturen ohne Hinterschnitte

Der Optimierungsablauf unter Berücksichtigung der Fertigungsrestriktion wird in Abbildung 5–3 gezeigt. Im Gegensatz zum Optimierungsablauf ohne Fertigungsrestriktion in Abbildung 3–1 werden vor der Aktualisierung der Entwurfsvariablen die Sensitivitäten der Zielfunktion weit entfernt von der Mittelfläche bestraft. Auch der Start mit dem Penaltyexponent $s = 1$ und die spätere Erhöhung auf $s = 3$ sowie das Alternieren der aktuellen Zielwandstärke b_c ist für eine erfolgreiche Anwendung der Fertigungsrestriktion für tiefziehbare Schalenstrukturen erforderlich.

Für eine beispielhafte Optimierung wird der Kragbalken aus Abbildung 5–4a verwendet. Die Compliance wird minimiert, wobei eine Volumenrestriktion von $v_f \leq 6.25\%$ vorgegeben wird. Die Elementkantenlänge beträgt $w = 2.5$ mm, drei Elementreihen über der Linienlast werden als Non-Design-Bereich definiert. Es wird der Dichtefilter mit dem Filterradius $R = 1.8w$ und OptiStruct[®] als Solver verwendet. Das Material ist Stahl mit $E = 210$ GPa und $\nu = 0.3$.

Ohne Fertigungsrestriktion werden die Einstellungen aus Tabelle 3–1 verwendet. Aufgrund der großen Anzahl an Entwurfsvariablen (460560) werden bis zu 200 Iterationen zugelassen und zur Vermeidung von Unstetigkeiten im Optimierungsablauf wird die initiale Schrittweite auf $\gamma_0 = 0.03125$ verringert. Das Ergebnis ohne Fertigungsrestriktion ist in Abbildung 5–4b gezeigt.

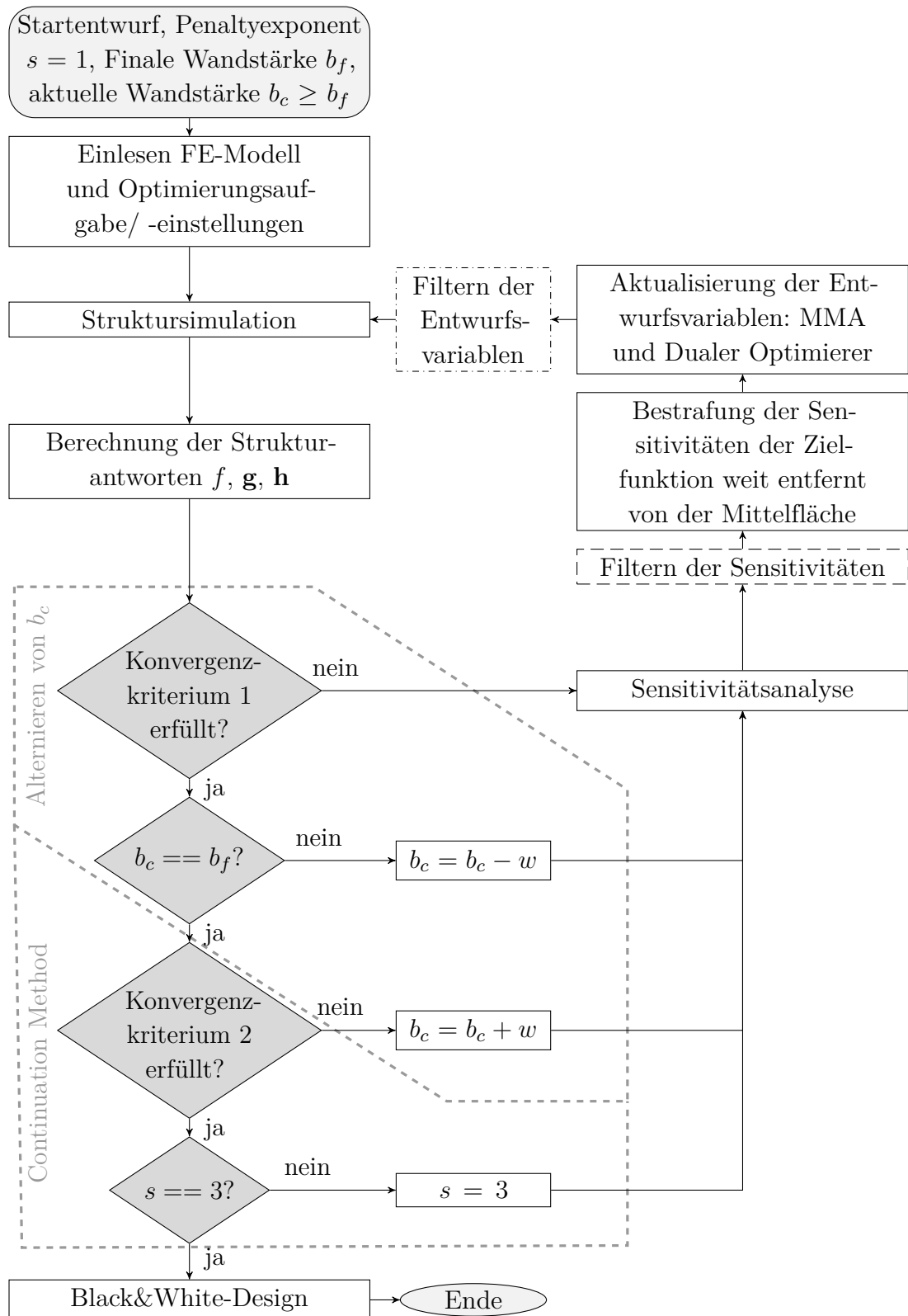


Abbildung 5–3: Optimierungsablauf mit Fertigungsrestriktion für Schalen ohne Hinterschnitte, nur für Sensitivitätenfilter: - - -, nur für Dichtefilter: - · - · -

Für die Fertigungsrestriktion wird die Zielwandstärke $b_f = 3w$ gewählt. Die Stempelrichtung ist z . Maximal 1 000 Iterationen werden durchlaufen.

Als Konvergenzkriterium 1 dient die

- Änderung der Zielfunktion $\left| \frac{f^{(d)} - f^{(d-1)}}{f^{(d)}} \right| < 0.1 \%$
- bei einer gleichzeitigen
 - maximalen Veränderung der Entwurfsvariablen $\max_i \left| x_i^{(d)} - x_i^{(d-1)} \right| < 0.19$
(dann wird die maximale Schrittweite $\Delta_{max} = 0.2$ unterschritten) oder
 - Verschlechterung der Zielfunktion.

Konvergenzkriterium 2 bezieht sich nur auf die Änderung der Zielfunktion durch das Alternieren der Zielwandstärke $\frac{f^{(d_{n-1})} - f^{(d_n)}}{f^{(d_n)}} < 0.1 \%$, wobei d_n die Iteration ist, bei der Konvergenzkriterium 1 bei $b_c == b_f$ erfüllt wurde.

In Abbildung 5–4c ist das Optimierungsergebnis mit Fertigungsrestriktion ohne Alternieren der Zielwandstärke und mit dem Penaltyexponent $s = 3$ während der gesamten Optimierung gezeigt. Dieses Design ist auch nach 1000 Iterationen noch nicht konvergiert. Die Schale wurde noch nicht bis zur oberen bzw. unteren Kante der gelagerten Stirnseite verschoben, die Compliance und die Spannungen sind sehr hoch. Dies zeigt, dass das optimierte Schalendesign ohne Maßnahmen zur verbesserten Konvergenz suboptimal ist.

Das Ergebnis in Abbildung 5–4d zeigt, dass die Anwendung der Maßnahmen zur verbesserten Konvergenz in Abschnitt 5.1.4 zu einem besseren Ergebnis führt. Im Vergleich zum Design ohne Fertigungsrestriktion weist die Struktur eine um 18 % größere Compliance auf und die Anzahl der benötigten Iteration hat sich fast verdreifacht, dafür gibt es in Stempelrichtung keine Hinterschnitte und eine konstante Wandstärke.

Die Abbildungen 5–5 und 5–6 zeigen die Optimierungshistorie zu Abbildung 5–4d. Initial steigt die Compliance an bis die Fertigungsrestriktion eingehalten wird. Danach sinkt die Compliance kontinuierlich bis in Iteration 299 das Konvergenzkriterium 1 erfüllt wird. Anschließend wird die Zielwandstärke alterniert. Der Ausschnitt in Abbildung 5–5b zeigt, dass diese Maßnahme zu einer Verbesserung der Zielfunktion führt. In Iteration 448 erfüllt die Verbesserung der Zielfunktion durch das Alternieren der Zielwandstärke das Konvergenzkriterium 2, somit wird der Penaltyexponent auf $s = 3$ erhöht. Nachdem in Iteration 499 Konvergenzkriterium 1 erreicht wurde, wird wiederum die Zielwandstärke alterniert. In Iteration 586 sorgt dies für keine ausreichende Verbesserung mehr, daher wird das Black&White-Design gebildet.

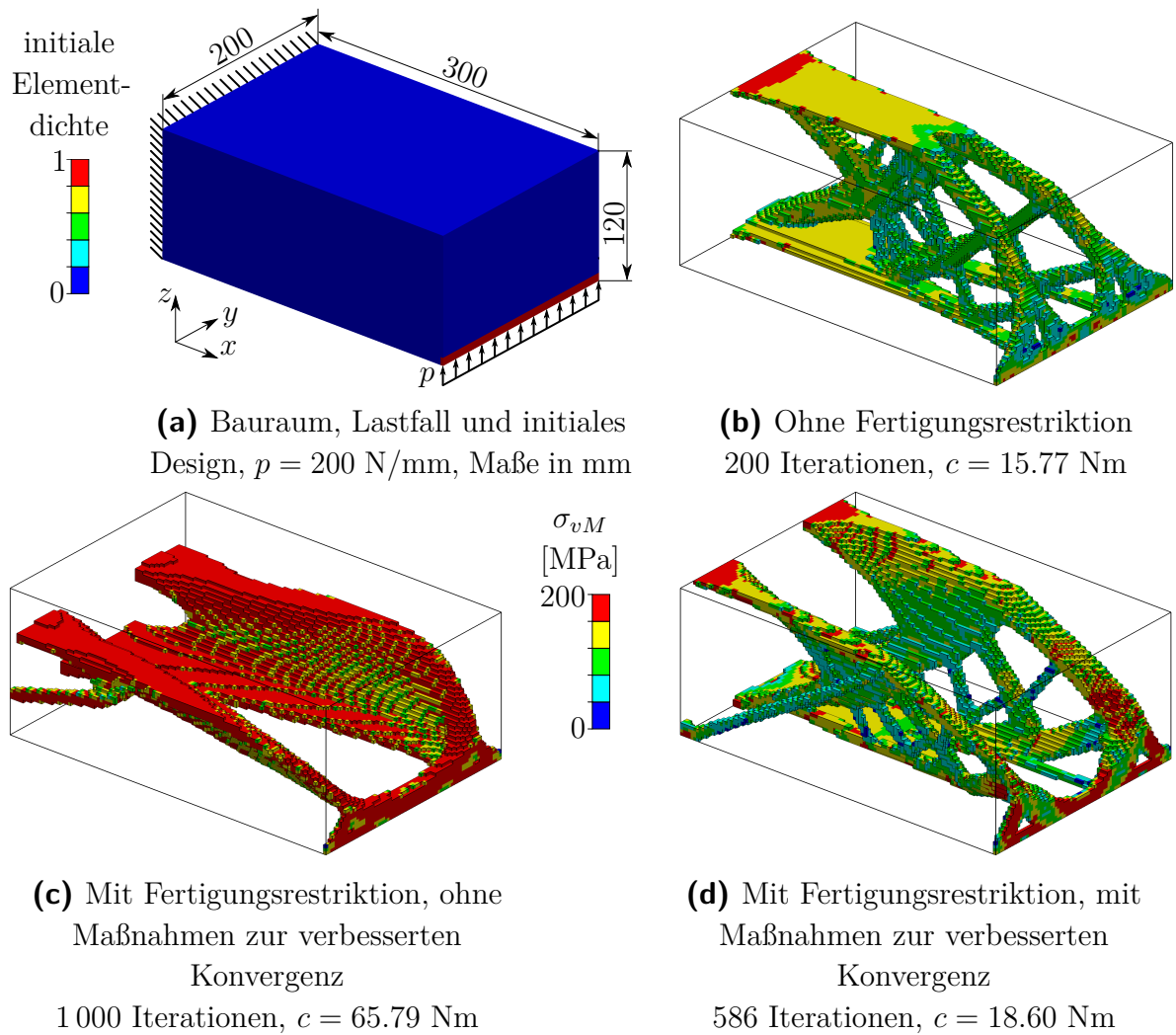


Abbildung 5–4: Kragbalken – initiales Design (a) und Optimierungsergebnisse (Black&White-Design) (b)-(d)

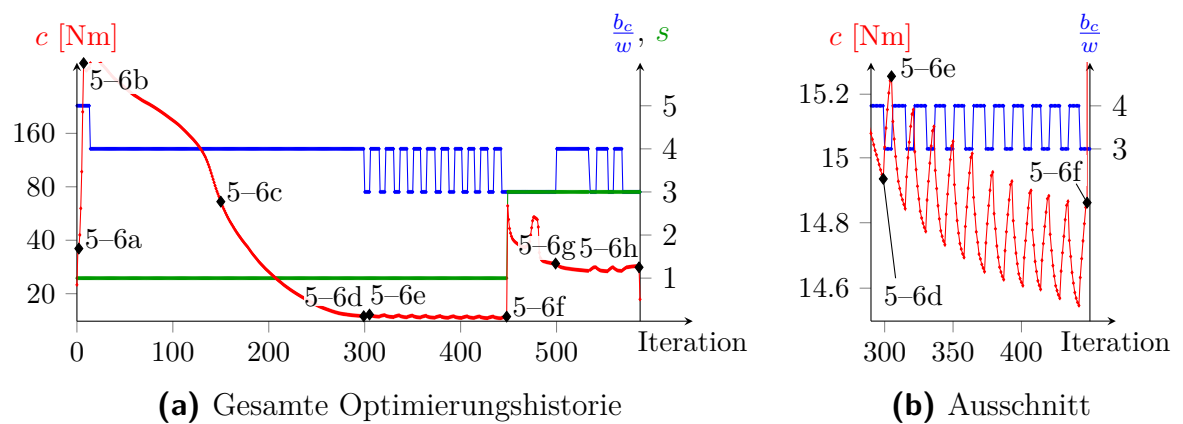


Abbildung 5–5: Optimierungshistorie des Kragbalkens mit Fertigungsrestriktion
Referenzen zu Abbildung 5–6

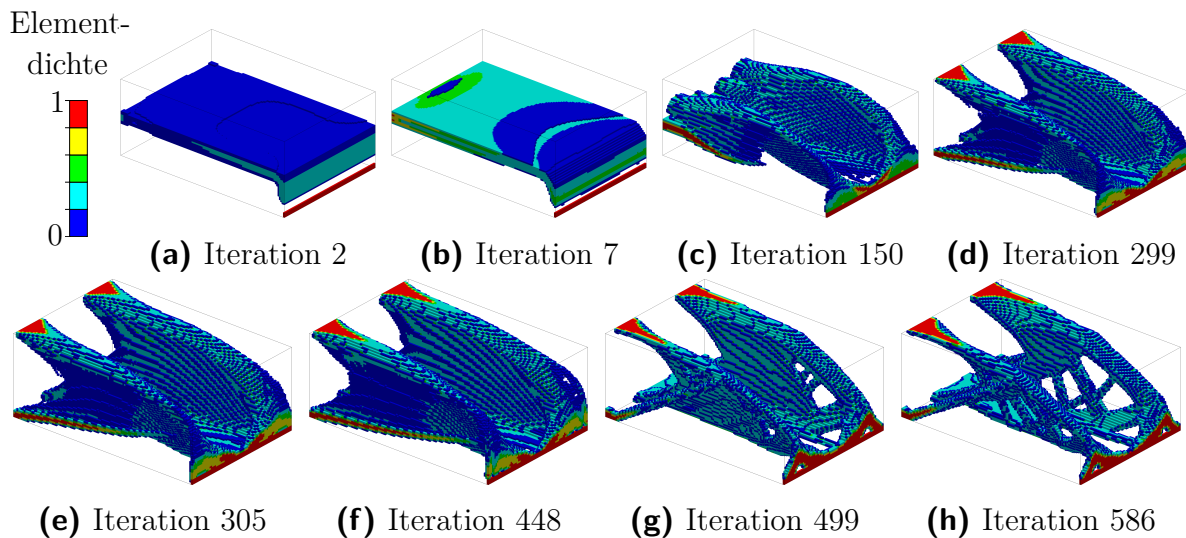


Abbildung 5–6: Entwicklung der Elementdichten, nur Elemente mit $\tilde{x}_i \geq 0.1$ dargestellt

Die beste Compliance bei $b_c == b_f$ wird in Iteration 448 erreicht. Da der Penaltyexponent noch $s = 1$ ist, besteht diese Schalenstruktur hauptsächlich aus Elementen mit Zwischendichten. Die Struktur kann somit als Schale mit variabler Wandstärke interpretiert werden. Das spätere Erhöhen des Penaltyexponenten auf $s = 3$ sorgt für die Konvergenz der Elementdichten zu $\tilde{x}_i \approx 0$ oder $\tilde{x}_i \approx 1$ und somit zu einer Schalenstruktur konstanter Dicke.

5.2 Zweischalige Strukturen

Für die Konstruktion von Leichtbaustrukturen sind zweischalige Strukturen besonders geeignet, da zwei voneinander entfernte dünnwandige Schalen eine größere Biegesteifigkeit aufweisen als eine dickwandige Schale. Der besseren mechanischen Leistungsfähigkeit zweischaliger Strukturen steht ein erhöhter Fertigungsaufwand entgegen, da die Bauteile gefügt werden müssen. Blechbauteile werden üblicherweise verschweißt, wobei für fertigungsgerechte Schweißkonstruktionen zusätzliche Flansche erforderlich werden können.

Für die Optimierung zweischaliger Strukturen wird in diesem Kapitel zunächst ein Ansatz für die Optimierung mit mehreren Materialien eingeführt. Durch die Anwendung der Fertigungsrestriktionen auf diesen Ansatz wird schließlich die Optimierung zweischaliger Strukturen ermöglicht.

5.2.1 Multimaterial-Ansatz

Optimierungsergebnisse, die nur aus einem Material bestehen dürfen, können Multimaterial-Optimierungsergebnissen unterlegen sein. Durch die Verwendung mehrerer diskreter Materialien kann an jeder Stelle das Material verwendet werden, das am besten zum lokalen Belastungszustand passt. Einen Ansatz zur Optimierung mit diskreten Materialien, dem RAMP-Ansatz (vgl. Kapitel 3.3) und einem linearen Optimierungsalgorithmus beschreibt Kennedy (2015).

Im Gegensatz dazu wird in der vorliegenden Arbeit MMA und der SIMP-Ansatz genutzt, bei dem bisher eine Entwurfsvariable x_i und eine Elementdichte \tilde{x}_i pro Element verwendet wurden. Für den Multimaterial-Ansatz wird pro vorgegebenem Material j und Element i eine Entwurfsvariable $x_{Mj,i}$ und eine Elementdichte $\tilde{x}_{Mj,i}$ definiert. Es kann eine beliebige Anzahl N_M an Materialien berücksichtigt werden. Dabei wird keine Verbindungstechnik zwischen den Materialien berücksichtigt. Da die Voxel am Materialübergang aneinander anschließen, spiegelt dies eine ideale Verbindung wider.

Die physikalischen Eigenschaften werden wie folgt interpoliert:

$$\begin{aligned} E_i &= \sum_{j=1}^{N_M} \tilde{x}_{Mj,i}^s E_{Mj,0i} \\ v_i &= v_{0i} \sum_{j=1}^{N_M} \tilde{x}_{Mj,i} \\ m_i &= v_{0i} \sum_{j=1}^{N_M} \rho_{Mj,i} \quad \text{mit} \quad \rho_{Mj,i} = \tilde{x}_{Mj,i} \rho_{Mj,0i} \end{aligned} \tag{5-5}$$

oder analog zu Gleichung 4–10 bei

Eigenfrequenzproblemen oder Volumenlasten.

Um sinnvolle Grenzen für die Entwurfsvariablen definieren zu können, werden die Entwurfsvariablen $x_{Mj,i}$ durch die Elementfüllung x_{Fi} und die Materialanteile $x_{Aj,i}$ substituiert. Für $N_M = 2$ Materialien gilt

$$\begin{aligned} x_{Fi} &= \sum_{j=1}^{N_M} x_{Mj,i} = x_{M1,i} + x_{M2,i} \\ x_{A1,i} &= \frac{x_{M1,i}}{x_{Fi}}. \end{aligned} \tag{5-6}$$

Im Gegensatz zu den Entwurfsvariablen $x_{Mj,i}$ können für die substituierten Entwurfsvariablen $x_{A1,i}$ und x_{Fi} sinnvolle Grenzen vorgegeben werden:

$$\begin{aligned} 0 < x_{min,i} &\leq x_{Fi} \leq 1 \\ 0 &\leq x_{A1,i} \leq 1. \end{aligned} \tag{5-7}$$

Die Ableitungen nach den Entwurfsvariablen $\frac{\partial}{\partial x_{Mj,i}}$ werden berechnet wie in den Kapiteln 3.7 und 3.4 erläutert. Aus der Substitution

$$\begin{aligned} x_{M1,i} &= x_{Fi} x_{A1,i}, \\ x_{M2,i} &= (1 - x_{A1,i}) x_{Fi} \end{aligned} \quad (5-8)$$

können die Sensitivitäten nach der Elementfüllung x_{Fi} und dem Materialanteil $x_{A1,i}$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_{Fi}} &= \frac{\partial x_{M1,i}}{\partial x_{Fi}} \frac{\partial}{\partial x_{M1,i}} + \frac{\partial x_{M2,i}}{\partial x_{Fi}} \frac{\partial}{\partial x_{M2,i}} = x_{A1,i} \frac{\partial}{\partial x_{M1,i}} + (1 - x_{A1,i}) \frac{\partial}{\partial x_{M2,i}}, \\ \frac{\partial}{\partial x_{A1,i}} &= \frac{\partial x_{M1,i}}{\partial x_{A1,i}} \frac{\partial}{\partial x_{M1,i}} + \frac{\partial x_{M2,i}}{\partial x_{A1,i}} \frac{\partial}{\partial x_{M2,i}} = x_{Fi} \frac{\partial}{\partial x_{M1,i}} - x_{Fi} \frac{\partial}{\partial x_{M2,i}}. \end{aligned} \quad (5-9)$$

5.2.2 Anwendung des Multimaterial-Ansatzes auf zweischalige Strukturen

Der Multimaterial-Ansatz kann genutzt werden, um mehrschalige Blechstrukturen zu optimieren, indem die Fertigungsrestriktion auf die Elementdichtefelder jedes Materials separat angewendet wird. Dabei wird aus den Elementdichten $\tilde{x}_{M1,i}$ für Material 1 die Mittelfläche der ersten Schale berechnet und die Sensitivitäten der Zielfunktion $\frac{\partial f}{\partial x_{M1,i}}$ werden bestraft. Analog geschieht dies auch für Material 2 für die zweite Schale.

Der Kragbalken aus Abbildung 5-4 wird als zweischaliges Bauteil aus Stahl und Aluminium optimiert. Anstelle der Volumenrestriktion wird eine Massenrestriktion von $m \leq 5$ kg definiert. Die Zielwandstärke des Stahls ($E = 210$ GPa, $\nu = 0.3$, $\rho = 7.85$ gcm⁻³) bleibt bei $b_f = 3w$, für das Aluminiumblech ($E = 70$ GPa, $\nu = 0.3$, $\rho = 2.7$ gcm⁻³) wird ebenfalls $b_f = 3w$ vorgegeben. Die Stempelrichtung für beide Bauteile ist z.

Aus den Optimierungsergebnissen in Abbildung 5-7 kann entnommen werden, dass bei einer Massensteigerung von 42 % die Compliance um 38 % verringert werden konnte. Das Stahl- und das Aluminiumblech sind entgegengesetzt gekrümmt. Dadurch wird die untere und obere Kante an der Einspannung vollständig angebunden – so wird eine große Steifigkeit erreicht. Da die Schalen sich durchdringen, ist eine konventionelle Herstellung nicht möglich.

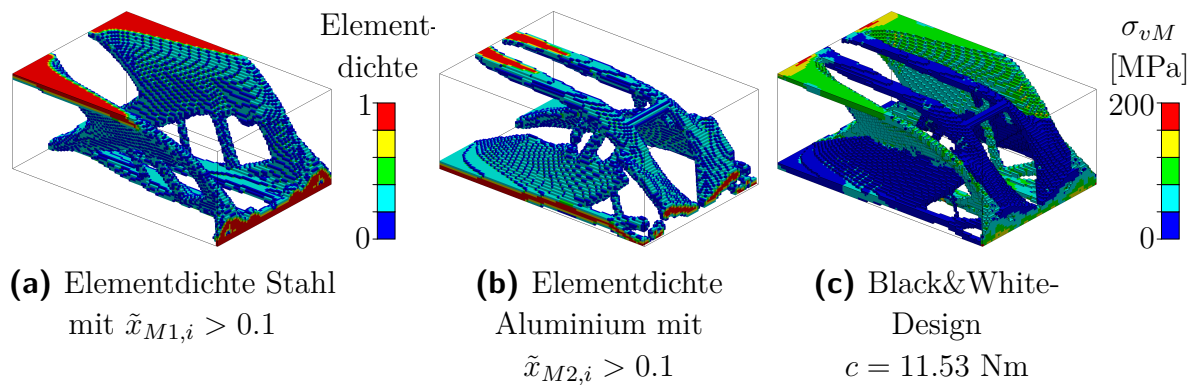


Abbildung 5–7: Optimierungsergebnis Kragbalken – Kombination aus Stahl- und Aluminiumblech

Wird die Fertigungsrestriktion auf zwei Materialien mit gleichen Eigenschaften angewendet, ermöglicht der Multimaterial-Ansatz auch die Optimierung mehrschaliger Bauteile aus demselben Material. Abbildung 5–8 zeigt das Optimierungsergebnis für den Kragbalken aus zwei Stahlblechen mit jeweils einer Wandstärke $b_f = 3w$ und der Massenrestriktion $m \leq 10 \text{ kg}$. Bei der Optimierung mit zwei gleichen Materialien muss ein Startdesign vorgegeben werden. Bei uniformer Elementdichteverteilung haben beide Materialien die gleichen Sensitivitäten $\frac{\partial f}{\partial x_{M1,i}} = \frac{\partial f}{\partial x_{M2,i}}$. Damit bleiben die Elementdichten beider Schalen identisch.

Als Startdesign für den Kragbalken aus zwei Stahlblechen wurde das Ergebnis aus der vorhergehenden Optimierung (Stahl/Aluminium) verwendet. Die Compliance sinkt auf $c = 5.61 \text{ Nm}$, also um 51 % bei einer verdoppelten Masse.

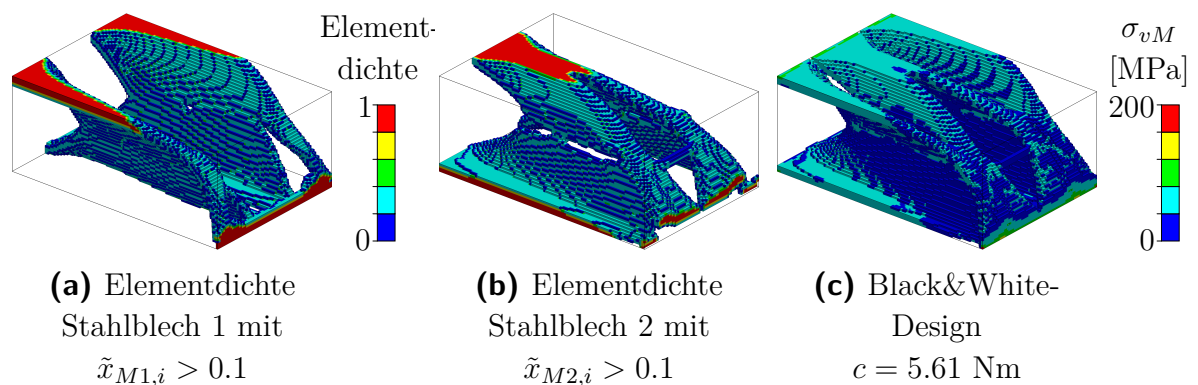


Abbildung 5–8: Optimierungsergebnis Kragbalken – Kombination aus zwei Stahlblechen

Die Fertigungsrestriktion kann auch nur auf ein Material angewendet werden. So können beispielsweise Hybridbauteile optimiert werden, die aus einem Stahlblech mit umspritztem Kunststoff bestehen. Der Kragbalken aus Abbildung 5–4 wird als

Stahlblech ($E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 7.85 \text{ gcm}^{-3}$) mit angespritztem kurzfaserverstärktem Polyamid ($E = 22.4 \text{ GPa}$, $\nu = 0.39$, $\rho = 1.74 \text{ gcm}^{-3}$) optimiert. Die Compliance wird minimiert bei einer Massenrestriktion von $m \leq 3530.7 \text{ g}$, sodass die Masse dem Optimierungsergebnis aus Abbildung 5–4 entspricht. Initialisiert wird das Design uniform mit $\tilde{x}_{M1,i} = \tilde{x}_{M2,i} = 0.05116$, sodass die Massenrestriktion aktiv ist.

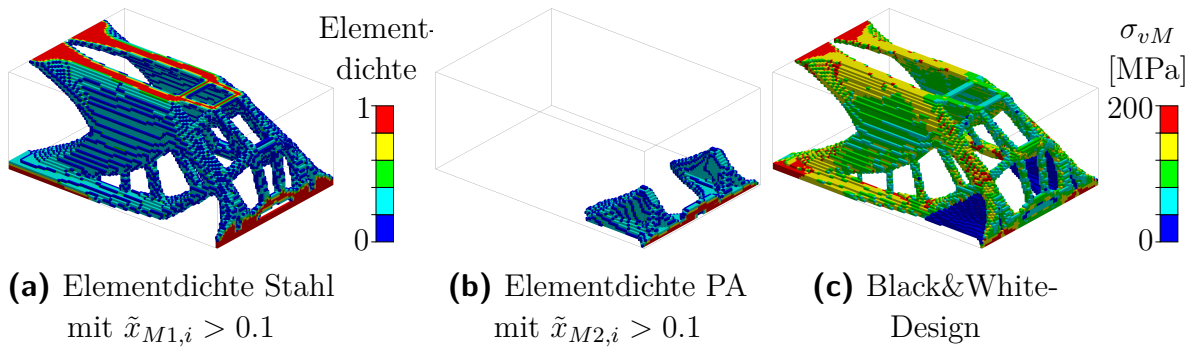


Abbildung 5–9: Optimierungsergebnis Kragbalken – Stahlblech mit angespritztem Polyamid (PA)

Die Krümmung des optimierten Stahlblechs in Abbildung 5–9 ist entgegengesetzt zum Optimierungsergebnis ohne Kunststoff in Abbildung 5–4d. Der Kunststoff kommt aufgrund der geringeren spezifischen Steifigkeit $\frac{E}{\rho}$ nur an der gering belasteten Stelle nahe des Lastangriffs zur Anwendung. Die Compliance des Black&White-Designs ist mit $c = 17.56 \text{ Nm}$ um 5.6 % besser als das Ergebnis in Abbildung 5–4d bei konstanter Masse.

6 Berücksichtigung der Tiefziehbarkeit während der Optimierung

Im vorangegangenen Kapitel wurde die Grundlage gelegt, um mit der Dichtemethode auf einem Volumennetz optimierte Schalenstrukturen zu erhalten. Die bisher vorgestellte Fertigungsrestriktion stellt die Tiefziehbarkeit eines Bleches jedoch nicht sicher. Während des Tiefziehens kann es zu Reißen oder Faltenbildung kommen. In diesem Kapitel wird zunächst eine Fertigungsrestriktion für minimale Umformradien eingeführt. Damit werden Reißen unwahrscheinlicher, da diese häufig an Stellen starker Krümmung auftreten.

Um Probleme beim Tiefziehprozess identifizieren zu können, wird im letzten Teil dieses Kapitels eine automatisierte Tiefziehsimulation in den Optimierungsprozess integriert. Eine Heuristik wird erläutert, die die Struktur an Stellen hoher Neigung zu Reißen glättet. Somit entstehen optimierte Strukturen, die für das Tiefziehen geeignet sind.

6.1 Reihenfolge der Fertigungsschritte

Um die Fertigungsrestriktionen anwenden zu können, muss der Fertigungsablauf spezifiziert werden. Möglich ist, zunächst die Aussparungen in die Platine einzubringen und anschließend die Umformung durchzuführen. Aussparungen in der Platine können jedoch Ausgangspunkte für Reißen während des Tiefziehens sein. Um Aussparungen im Tiefziehprozess zu ermöglichen, muss das Bauteil angepasst werden und so entsteht eine starke Einschränkung möglicher Optimierungsergebnisse. Daher soll der folgende Fertigungsablauf für die Anwendungen in dieser Arbeit angenommen werden:

- Schritt 1: Einstufige Kaltumformung (Tiefziehen, Streckziehen oder Prägen)
- Schritt 2: Aussparungen einbringen (Stanzen mit Keilschieber oder Lasern)

Für die Betrachtung des Tiefziehens wird demzufolge das Schalenbauteil ohne Aussparungen betrachtet. Dazu wird, wie in Kapitel 5.1.2 beschrieben, die Mittelfläche berechnet. Durch die Verbindung der Mittelflächenpunkte mit den Koordinaten $\zeta_{m_{1j}}$, $\zeta_{m_{2j}}$, ξ_{m_j} entsteht eine Mittelfläche aus viereckigen Schalenelementen (Quads), die in der ζ_1 - ζ_2 -Ebene ein geordnetes Pixel-Netz ergeben. An Aussparungen existiert keine Mittelflächenkoordinate ξ_{m_j} . Zur Anwendung der folgenden Fertigungsrestriktionen werden daher Aussparungen aufgefüllt, indem zwischen den nächstgelegenen Rändern in ζ_1 - und ζ_2 -Richtung linear interpoliert wird. Dies ist beispielhaft am S-Rail, das in Kapitel 2.2.3 gezeigt wird, in Abbildung 6–1 dargestellt. Durch das Interpolieren von Aussparungen entsteht ein geschlossenes Schalennetz mit rechteckiger Projektion in der ζ_1 - ζ_2 -Ebene, das die maximale Ausdehnung des Bauteils in ζ_1 - und ζ_2 -Richtung aufweist.

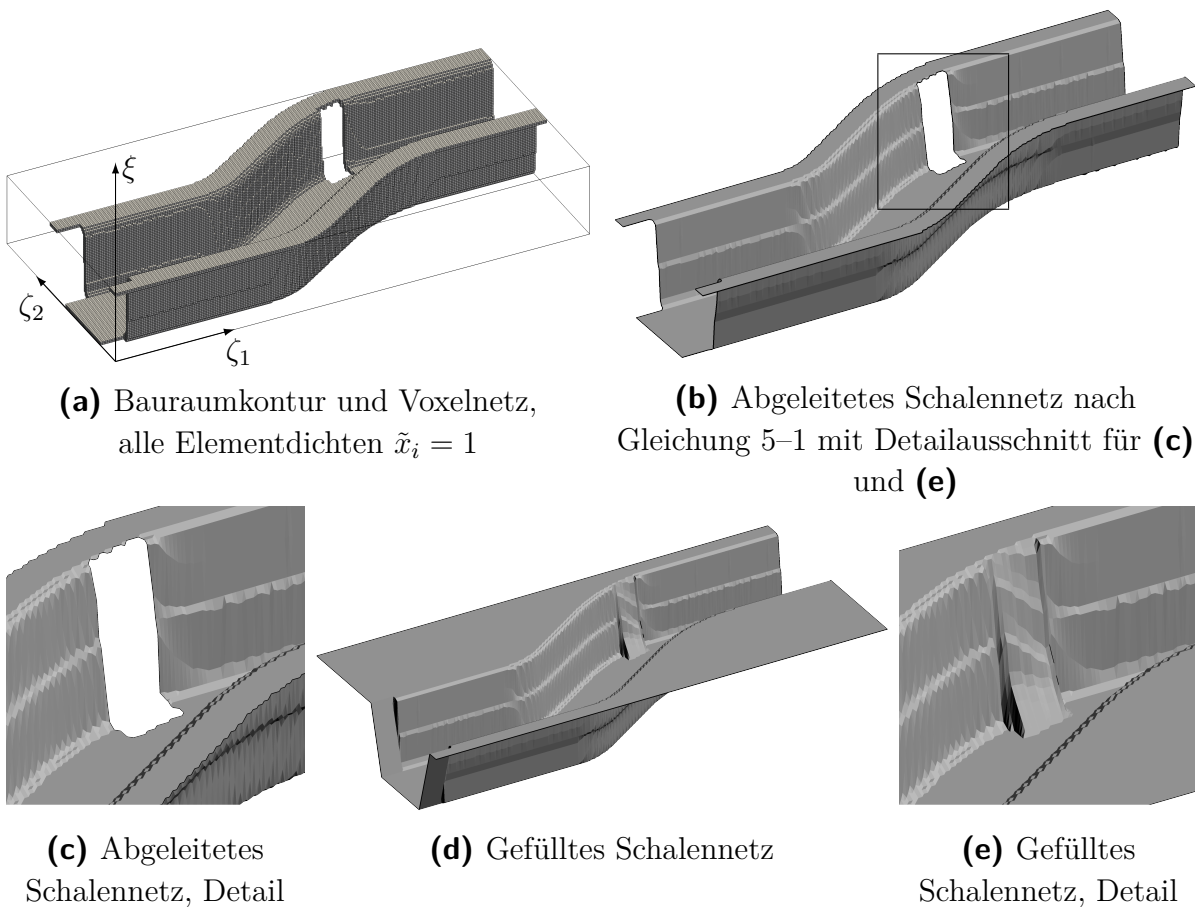


Abbildung 6–1: Beispiel S-Rail – Interpolation von Aussparungen

6.2 Berücksichtigung minimaler Umformradien

Kleine Umformradien können beim Tiefziehen problematisch werden, da starke Krümmungen zu Reißern führen können. Einfach gekrümmte Strukturen können durch Rundbiegen oder Abkanten hergestellt werden. Der Umformradius kann dabei klein gewählt werden, ohne ein Versagen des Bauteils bei der Fertigung hervorzurufen. Besonders kritisch sind Stellen, die in zwei Richtungen gekrümmt sind (vgl. Abbildung 2–11 auf Seite 22). Diese Regionen unterliegen während der Umformung starken Deformationen. Doppelkrümmungen treten bei tiefgezogenen Blechen häufig auf. Im Folgenden wird nicht zwischen Einfachkrümmung und Doppelkrümmung unterschieden, die Fertigungsrestriktion sollte somit auf den kritischen Fall der Doppelkrümmung bezogen sein.

Für alle Umformradien r_{ci} wird die Fertigungsrestriktion eingeführt, dass diese größer als der vorgegebene Wert $r_{c,min}$ sein müssen (Dienemann et al. 2016):

$$r_{ci} \geq r_{c,min}. \quad (6-1)$$

Diese Restriktion für den minimalen Umformradius $r_{c,min}$ wird in eine maximale Winkeldifferenz zwischen den Normalen zweier benachbarter Elemente α_{max} umgewandelt. Abbildung 6–2a zeigt als exemplarische Mittelfläche entsprechend Abbildung 5–1 einen Halbkreis vom Radius $r_{c,min}$. Die geringste Winkeldifferenz tritt zwischen den eingezeichneten Elementnormalen auf. Mit der Elementkantenlänge der Voxel w , die gleich dem Abstand zweier benachbarter Mittelflächenknoten in ζ -Richtung ist, beträgt diese Winkeldifferenz entsprechend Abbildung 6–2b

$$\alpha_{max} = \arcsin\left(\frac{w}{r_{c,min}}\right). \quad (6-2)$$

Sind alle Winkel $\alpha_i \leq \alpha_{max}$, so ist die Restriktion aus Gleichung 6–1 erfüllt.

Ist eine Winkeldifferenz größer als α_{max} , so soll diese Stelle geglättet werden. Dies geschieht, indem ein lokaler Filterradius r_{si} an jedem Mittelflächenpunkt i eingeführt wird, der zu einer Glättung führt, wenn $r_{si} > w$ und damit $\alpha_i > \alpha_{max}$ ist:

$$r_{si} = \begin{cases} w, & \text{wenn } \alpha_i \leq \alpha_{max}, \\ \min\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_{max}}w + r_b, r_r + w\right), & \text{wenn } \alpha_i > \alpha_{max}. \end{cases} \quad (6-3)$$

Der Basisfilterradius $r_b > 0$ sorgt dafür, dass der lokale Filterradius bei Verletzung der Fertigungsrestriktion einen Mindestwert $r_{si} > w + r_b$ aufweist, da bei $r_{si} \approx w$

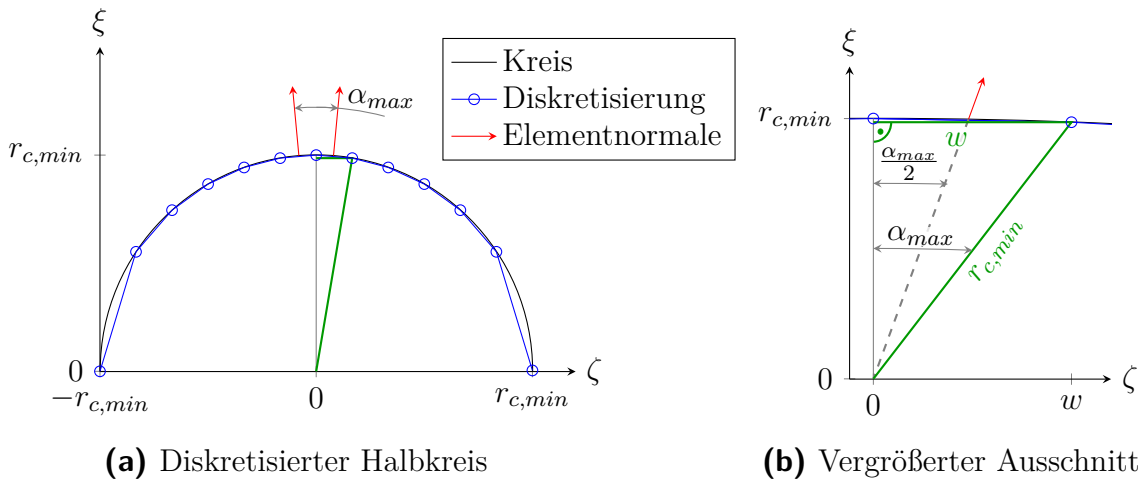


Abbildung 6-2: Grenzwinkel für vorgegebenen minimalen Umformradius

keine nennenswerte Glättung erreicht wird. Um keine Sprünge in der geglätteten Mittelfläche aufgrund lokal stark unterschiedlicher Filterradien zu erhalten, werden die Filterradien r_{si} in Gleichung 6-3 auf $(r_r + w)$ beschränkt und in der Nachbarschaft r_r geglättet:

$$\tilde{r}_{si} = \frac{\sum_j t(i, j) r_{sj}}{\sum_j t(i, j)} \quad (6-4)$$

mit $t(i, j) = \max(0, r_r - \text{dist}(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j))$.

Als \mathbf{o}_i und \mathbf{o}_j werden nun die Elementmittelpunkte des Mittelflächennetzes bezeichnet. Mit diesen geglätteten Filterradien \tilde{r}_{si} können die Koordinaten der Mittelfläche ξ_{mj} durch Filtern geglättet werden:

$$\tilde{\xi}_{m_i} = \frac{\sum_j t(i, j) \xi_{mj}}{\sum_j t(i, j)} \quad (6-5)$$

mit $t(i, j) = \max(0, \tilde{r}_{si} - \text{dist}(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j))$.

Diese Glättungsmethode wird in Abbildung 6-3 beispielhaft anhand der Kosinusfunktion $\xi = \cos(\zeta)$ gezeigt, die mit 20 Knoten diskretisiert wurde. Für die Glättung werden die Grenzwinkel $\alpha_{max} = 8^\circ$ bzw. $\alpha_{max} = 4^\circ$ gewählt und als Glättungsparameter $r_r = 2w$.

Abbildung 6-3a zeigt die Glättung mit einem global konstanten Filterradius \tilde{r}_s , es wird also nur Gleichung 6-5 berücksichtigt. Es werden Stellen geglättet, die bereits die Fertigungsrestriktion in Gleichung 6-1 erfüllen, damit wird das Optimierungsergebnis verschlechtert. Außerdem ist zu sehen, dass bei einer diskreten Änderung

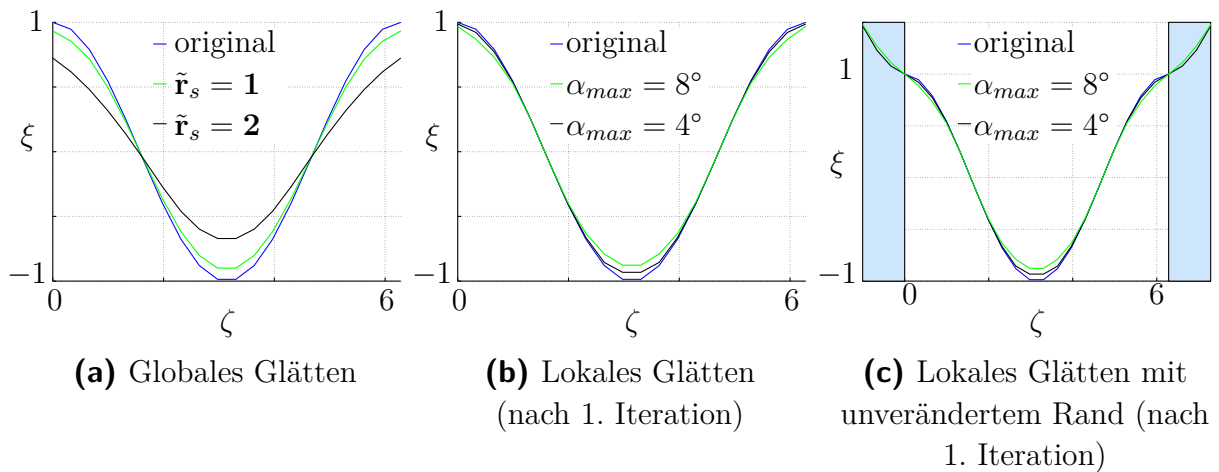


Abbildung 6-3: Glättung für minimalen Umformradius

des Filterradius von $\tilde{r}_{si} = 1$ auf $\tilde{r}_{s(i+1)} = 2$ Unstetigkeiten in der geglätteten Funktion $\tilde{\xi}(\zeta)$ auftreten können. Durch das lokale Filtern in Abbildung 6-3b werden nur noch Bereiche verändert, die die Fertigungsrestriktion in Gleichung 6-1 verletzen. Durch die Verwendung der gefilterten Filterradien \tilde{r}_{si} entsprechend Gleichung 6-4, kann es nicht zu Unstetigkeiten in der geglätteten Funktion $\tilde{\xi}(\zeta)$ kommen.

Die Abbildungen 6-3a und 6-3b zeigen, dass das Filtern durch das Mitteln der Nachbarkoordinaten am Rand des Bauraums kritisch sein kann. Üblicherweise sind die Nachbarknoten entweder alle über oder unter der ξ -Koordinate des Randknotens. Dadurch werden die Randbereiche in Richtung der Nachbarknoten verschoben. In diesem Beispiel erreicht die geglättete Kosinuskurve nie $\xi = 1$. Weil die Position der Randknoten auch ein Ergebnis der Optimierung ist, sorgt diese Glättung für eine suboptimale Verschiebung und Verzerrung der Bereiche am Bauraumrand. Um dieses Problem zu lösen, werden zusätzliche Mittelflächenpunkte außerhalb des Bauraums erzeugt (hellblauer Bereich in Abbildung 6-3c), die punktsymmetrisch zum Randknoten sind. Dadurch verbleibt der Randknoten durch die Glättung an einer unveränderten Position.

Nach einer Iteration der Glättung kann die Fertigungsrestriktion in Gleichung 6-1 immer noch verletzt sein. Deshalb wird das Glätten iterativ durchgeführt, bis $\alpha_i \leq \alpha_{max}$ für die ganze Mittelfläche erfüllt ist. Der Ablauf des Glättens wird in Abbildung 6-4 dargestellt. Dabei wird die Glättung durch sukzessive Erhöhung von r_r und r_b immer globaler. Die Vergrößerung der Filterradien wird nach jeweils 100 Iterationen durchgeführt, da dies ein guter Kompromiss aus Rechenzeit und Genauigkeit der Glättung ist.

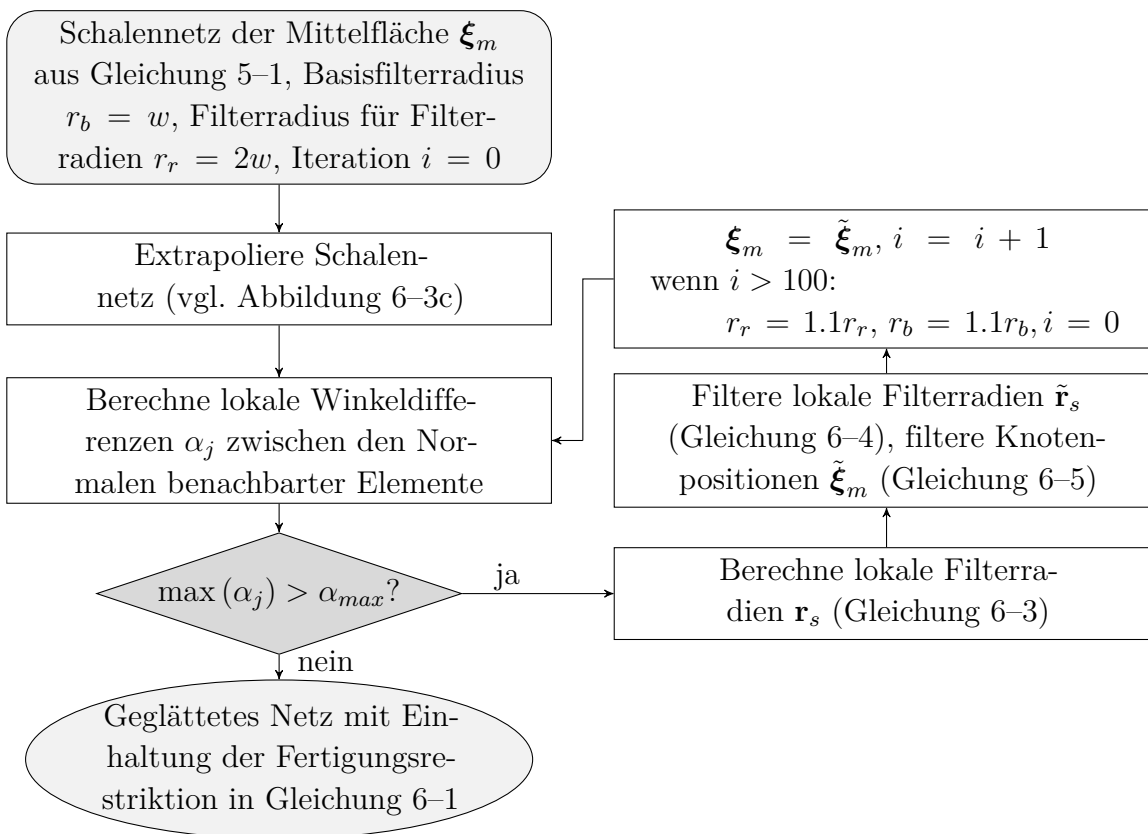


Abbildung 6-4: Algorithmus zur Schalenglättung mit minimalem Umformradius $r_{c,min}$

Zur Bestrafung der Sensitivitäten der Zielfunktion (siehe Kapitel 5.1.3) wird anstelle der initialen Mittelfläche ξ_m die geglättete Mittelfläche $\tilde{\xi}_m$ verwendet. Dadurch nimmt auch die Struktur aus den Elementdichten der Voxel die geglättete Form an.

Abbildung 6-5 zeigt die Glättung einer Mittelfläche anhand einer zweidimensionalen Voxelstruktur. Abbildung 6-6 stellt die Glättung anhand eines Ausschnitts des initialen Designs des Kragbalkens aus Abbildung 5-4a dar. Die Mittelfläche besteht aus 2160 Mittelflächenpunkten. Zur Erfüllung des minimalen Umformradius $r_{c,min} = 6w$ werden 11 Iterationen benötigt, für $r_{c,min} = 16w$ sind es 47 Iterationen.

Abbildung 6-7 zeigt die Glättung der Mittelfläche anhand des S-Rails aus Abbildung 6-1. Das initiale Netz vor der Glättung ist in Abbildung 6-1d dargestellt. Dieses Beispiel besteht aus 34 000 Mittelflächenpunkten, sodass die Glättung mit zunehmendem minimalen Umformradius $r_{c,min}$ eine wahrnehmbare Rechenzeit beansprucht.

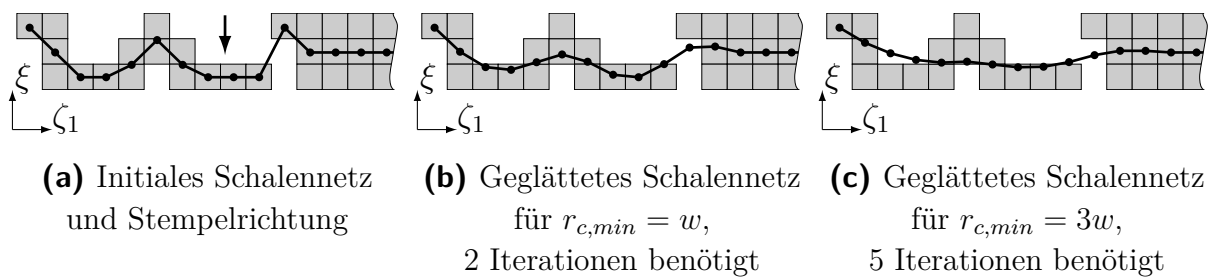


Abbildung 6–5: 2D-Beispiel zur Schalenglättung für minimalen Umformradius $r_{c,min}$, Voxel mit uniformer Elementdichteverteilung

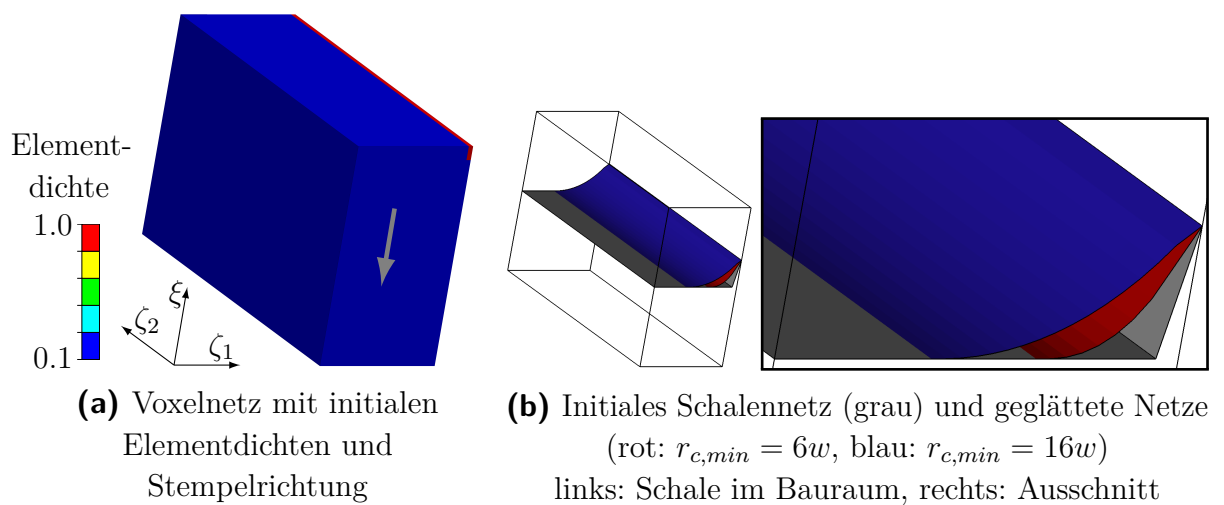


Abbildung 6–6: Beispiel Kragbalken – Glättung für minimalen Umformradius $r_{c,min}$

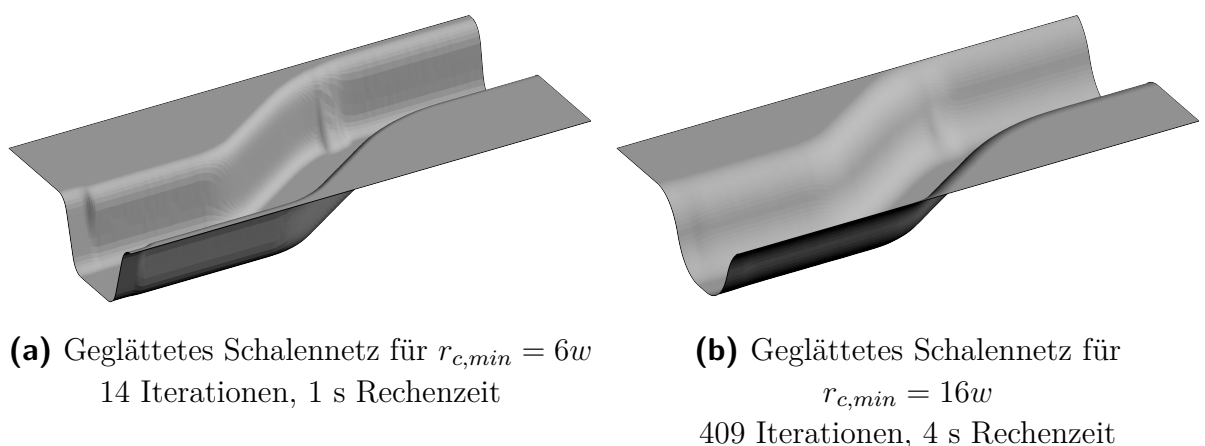


Abbildung 6–7: Beispiel S-Rail – Glättung für minimalen Umformradius $r_{c,min}$, Rechenzeit auf einem Kern einer Intel i7-4770 CPU mit 3.40 GHz

In Abbildung 6–8 ist der optimierte Kragbalken aus Abbildung 5–4 dargestellt. Hier wird neben der Schalenrestriktion auch der Umformradius $r_{ci} \geq 6w$ berücksichtigt. Im Vergleich zum Optimierungsergebnis ohne Berücksichtigung des minimalen Umformradius in Abbildung 5–4d ist die optimierte Schale deutlich glatter. Durch die zusätzliche Restriktion ist die Compliance allerdings auch um 9 % schlechter. Das maximale Risskriterium (siehe Gleichung 2–1) $\max_i(\tilde{c}_{ti}) = 2.0$ in Abbildung 6–8c zeigt, dass Reißen trotz der Reduktion des Umformradius nicht verhindert werden.

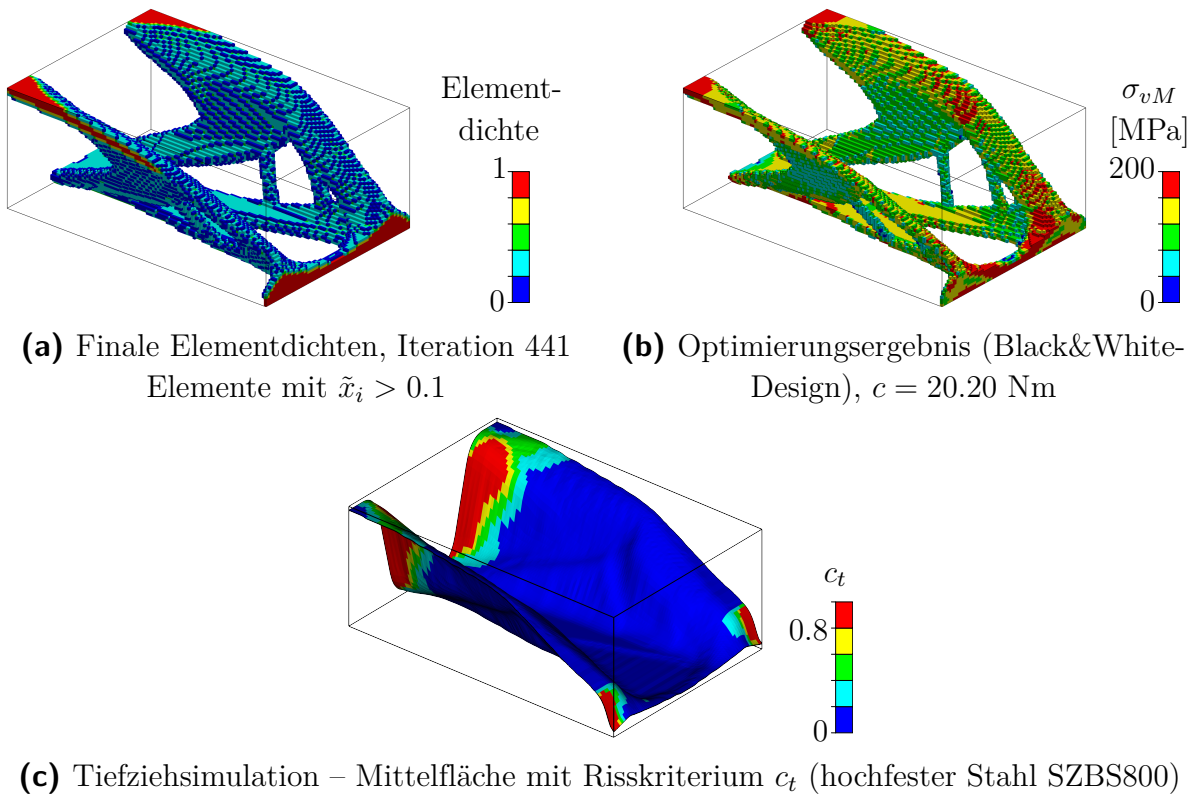


Abbildung 6–8: Optimierungsergebnis Kragbalken mit minimalem Umformradius

6.3 Berücksichtigung von Herstellungsfehlern mittels Umformsimulationen

Analog zur Glättung der Struktur an Stellen starker Krümmung, soll die Struktur an Stellen starker Rissneigung geglättet werden. Damit soll sichergestellt werden, dass während der Umformung keine Reiße auftreten. Die Fertigungsrestriktion wird formuliert als

$$c_{ti} \leq c_{t,max}, \quad (6-6)$$

wobei das Risskriterium c_{ti} (vgl. Gleichung 2-1) an jeder Stelle i des Blechbauteils kleiner als ein vorgegebener Wert $c_{t,max}$ sein soll.

6.3.1 Automatisierung der Umformsimulation

Für die Umformsimulation wird der inverse Ansatz (vgl. Kapitel 2.2.3) angewendet. Als Solver wird AutoForm-OneStep[®] genutzt. Dazu wird das entsprechend Kapitel 6.2 geglättete Mittelflächennetz als Eingabe genutzt. Am Rand der Platine wird eine konstante Rückhaltung definiert. Diese Rückhaltung quantifiziert vereinfacht die Reibung infolge der Niederhalterkraft und Ziehsicken und kann benutzerdefiniert zwischen 0 und 1 gewählt werden. 0 bedeutet keine Rückhaltung, also sogenanntes Crashforming. Eine Rückhaltung von 1 steht für eine Fixierung. Dabei wird der Rand der Platine während der Umformung an der gleichen Stelle gehalten. Eine stärkere Rückhaltung sorgt für eine größere Neigung zu Reißen, eine geringere Rückhaltung begünstigt Faltenbildung.

AutoForm[®] sorgt für eine adaptive Neuvernetzung der Schale mit dreieckigen Schalenelementen (Trias). Dabei wird die Schalenunterseite simuliert, indem das Mittelflächennetz ein Offset der halben Schalendicke in Normalenrichtung zur Matrize erhält.

6.3.2 Mapping von Ergebnissen der Umformsimulation

Um die Glättung der Mittelfläche analog zu Kapitel 6.2 zu ermöglichen, müssen die Ergebnisse der Umformsimulation vom unregelmäßigen Tria-Netz der Unterseite auf das regelmäßige Quad-Netz der Mittelfläche gemappt werden. Zunächst wird das Tria-Netz in Normalenrichtung zum Stempel verschoben. Dieses Netz beinhaltet als Ergebnis der Umformsimulation das Risskriterium c_{tj} für jedes Element j .

Abhängig vom Abstand zwischen den Elementmittelpunkten \mathbf{o}_i des verschobenen Tria-Netzes zu denen des Quad-Mittelflächennetzes \mathbf{o}_j werden die FE-Ergebnisse für das Mapping gewichtet. Als Ergebnis des Mappings erhält man die Risskriterien auf dem Quad-Netz der Mittelfläche

$$\tilde{c}_{ti} = \left(\frac{\sum_j t(i, j)^{10} c_{tj}^{10}}{\sum_j t(i, j)^{10}} \right)^{0.1} \quad (6-7)$$

mit der Wichtung

$$t(i, j) = \max(0, R - \text{dist}(\mathbf{o}_i, \mathbf{o}_j)). \quad (6-8)$$

Das Risskriterium c_{ti} wurde in Kapitel 2.2.3 eingeführt und beschreibt die Rissneigung. Analog zum Risskriterium können alle Ergebnisgrößen aus der Tiefziehsimulation gemappt werden.

Der Mappingradius $R = \frac{w_{max}}{\sqrt{3}}$ wird abhängig von der größten Elementkante des Tria-Netzes w_{max} gewählt. Damit ist sichergestellt, dass alle Mittelflächelemente einen Ergebniswert erhalten. Nahe Elemente und hohe Risskriterien werden durch den Exponenten 10 deutlich stärker gewichtet als weiter entfernte Elemente und geringe Risskriterien, um die Ergebnisse an den kritischen Stellen nicht zu stark zu verschmieren.

Als Beispiel dient das geglättete S-Rail aus Abbildung 6–7a. Die Ergebnisse aus der Tiefziehsimulation in Abbildung 6–9a und 6–9c liegen auf einem groben Tria-Netz vor. Das Mapping auf das feine Mittelflächennetz aus Quads in Abbildung 6–9b bzw. 6–9d sorgt nur für kleine Abweichungen. So sinkt der Maximalwert des Risskriteriums von $\max_i(\tilde{c}_{ti}) = 1.93$ auf $\max_i(\tilde{c}_{ti}) = 1.92$. Diese Abweichung durch das Mapping ist vernachlässigbar, da eine Änderung der Diskretisierung zu größeren Abweichungen führt.

6.3.3 Heuristik für die Sicherstellung der Herstellbarkeit

Zur Senkung des Risskriteriums glättet die Heuristik die Stellen mit verletzter Fertigungsrestriktion $\tilde{c}_{ti} > c_{t,max}$. Der Ablauf ist analog zu Kapitel 6.2. Der einzige Unterschied liegt in der Verwendung des Risskriteriums \tilde{c}_{ti} anstelle der Winkeldifferenz α_i , sodass Gleichung 6–3 modifiziert wird zu

$$r_{si} = \begin{cases} w, & \text{wenn } \tilde{c}_{ti} \leq c_{t,max} \\ \min\left(\frac{\tilde{c}_{ti}}{c_{t,max}}w + r_b, r_r + w\right), & \text{wenn } \tilde{c}_{ti} > c_{t,max}. \end{cases} \quad (6-9)$$

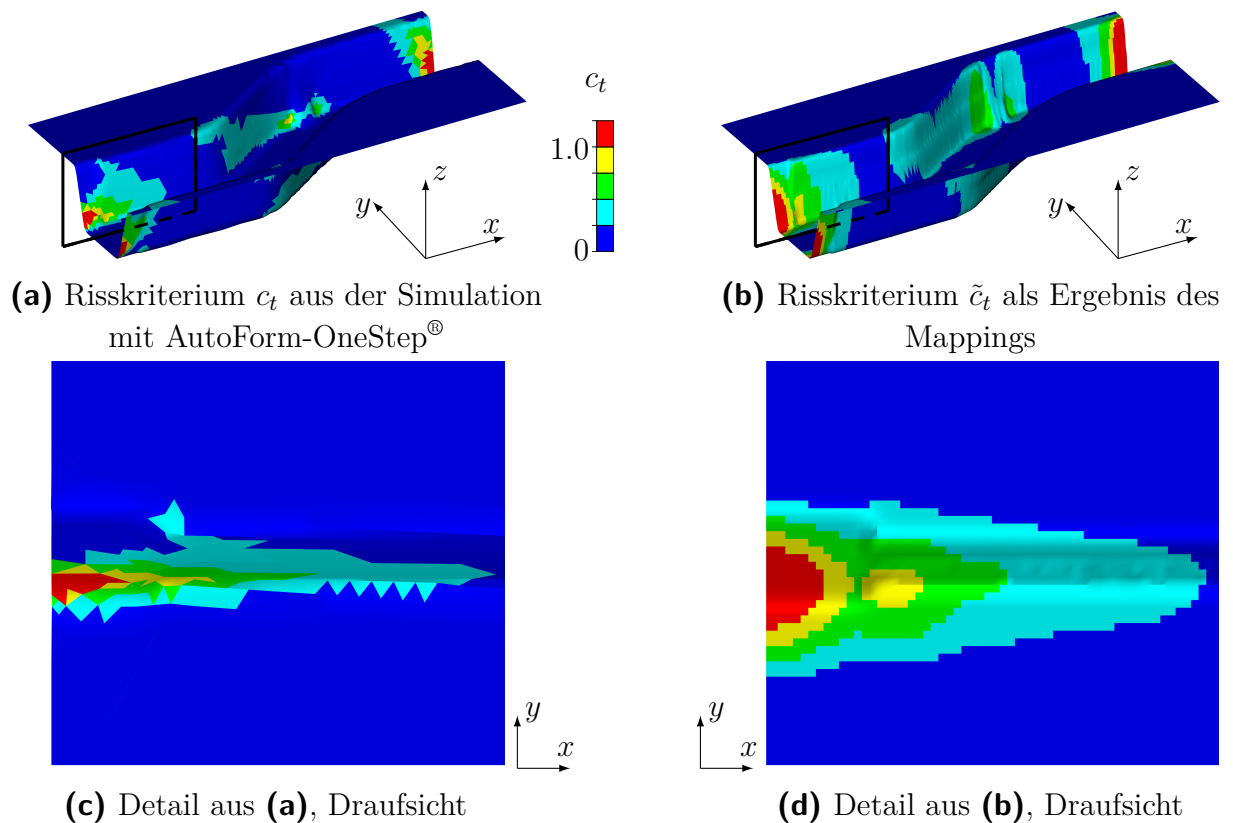


Abbildung 6–9: Mapping von Ergebnissen der Umformsimulation am S-Rail

Die Glättung anhand minimaler Umformradien kann mehrere hundert Iterationen benötigen. Da die Tiefziehsimulation einige Sekunden benötigt und dies bei vielen Iterationen zu signifikanter Rechenzeit führt, soll die Glättung anhand des Risskriteriums weniger Iterationen benötigen. Daher werden die Filterradien r_r und r_b entsprechend Abbildung 6–4 anstatt bei jeder 100. Iteration schon bei jeder 10. Iteration vergrößert.

Beispielhaft wird die Glättung entsprechend des Risskriteriums am S-Rail aus Abbildung 6–9 gezeigt. Als Fertigungsrestriktion wird $\tilde{c}_{ti} \leq 0.8$ definiert. Nach 65 Iterationen zur Glättung ist die Fertigungsrestriktion mit $\max_i(\tilde{c}_{ti}) = 0.7999$ erfüllt. Dies beansprucht auf einem Kern einer Intel Xeon E5-2650 CPU 4 Minuten. Die Glättungshistorie in Abbildung 6–10b zeigt, dass die Glättung geeignet ist, um das maximale Risskriterium zu verringern. Kleine Sprünge in der Glättungshistorie entstehen, wenn die Diskretisierung an der kritischen Stelle geändert wird. Die globale Form der Mittelfläche bleibt erhalten, die zuvor kritischen Stellen am Bauteilrand werden geglättet.

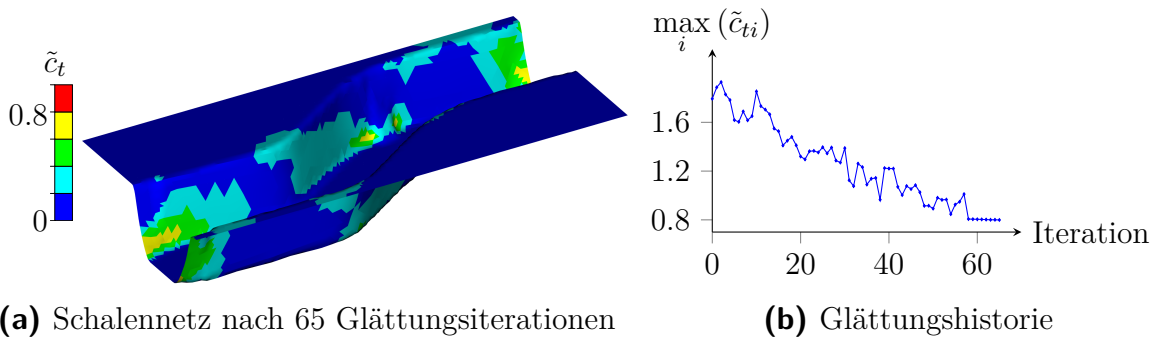


Abbildung 6–10: Glättung des S-Rails anhand des Risskriteriums

Die vorgestellte Glättung wird in jeder Iteration der Topologieoptimierung durchgeführt. Dabei wird zur Bestrafung der Zielfunktion weit entfernt von der Mittelfläche die geglättete Mittelfläche verwendet. Da in jeder Iteration so lange geglättet wird, bis die Fertigungsrestriktionen erfüllt sind, ist die Blechstruktur in jeder Iteration herstellbar. Die Rechenzeit zur Berücksichtigung der Fertigungsrestriktion $\tilde{c}_{ti} \leq c_{t,max}$ ist eingebettet in eine Optimierung erfahrungsgemäß geringer als bei isolierten Beispiel des S-Rails, da durch die Berücksichtigung der Fertigungsrestriktion in den letzten Iterationen die initiale Restriktionsverletzung in der aktuellen Iteration nur gering ist.

Kragbalken ohne Startdesign

Wie zuvor wird der Kragbalken als Beispiel gezeigt. Die Compliance wird minimiert bei der Volumenrestriktion $v_f \leq 6.25\%$, nun zusätzlich zur Restriktion des Umformradius $r_{ci} \geq 6w$ auch mit der Fertigungsrestriktion $\tilde{c}_{ti} \leq c_{t,max} = 0.8$.

Es wird eine konstante Rückhaltung von 0.25 am gesamten Bauteilrand vorgegeben. Der Reibungskoeffizient beträgt $\mu_0 = 0.15$. Als Material wird der hochfeste Stahl SZBS800 verwendet. Das Spannungs-Dehnungs-Diagramm und die Grenzformänderungskurve sind in Abbildung 6–11 angegeben. Der Stempel bewegt sich entgegen der z -Richtung.

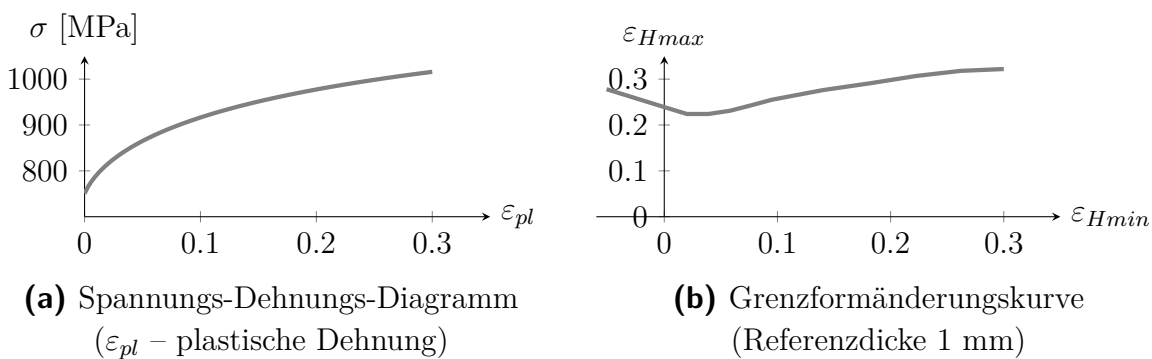


Abbildung 6–11: Materialdaten des hochfesten Stahls SZBS800

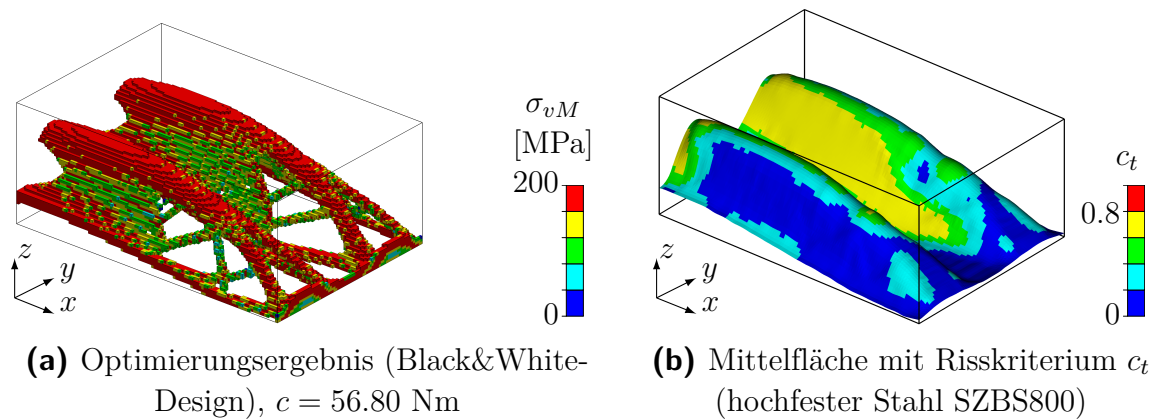


Abbildung 6–12: Optimierungsergebnis Kragbalken mit Risskriterium

Das Optimierungsergebnis in Abbildung 6–12 weist einen M-förmigen Querschnitt auf. Dieses lokale Minimum liegt darin begründet, dass eine Verbesserung der Compliance nur durch die Verschiebung der Schalenränder zur oberen und unteren Grenze der Einspannung gelingen kann. Dies würde jedoch für eine größere Ziehtiefe sorgen und somit die Fertigungsrestriktion $\tilde{c}_{ti} \leq 0.8$ verletzen.

Kragbalken mit Startdesign

Um das Auftreten eines schlechten lokalen Minimums zu vermeiden, wird das Ergebnis der Optimierung mit Fertigungsrestriktion aus Abbildung 5–4d als Startdesign verwendet. Alle anderen Optimierungsparameter bleiben gleich.

Abbildung 6–13 zeigt, dass entsprechend des Startdesigns als Optimierungsergebnis wieder eine Schale mit U-förmigem Querschnitt entsteht. Im Vergleich zum optimierten Design ohne Beachtung des Risskriteriums ist der untere Rand der Schale an der Einspannung nach oben verschoben. Dadurch wird die Ziehtiefe verringert und die Restriktion des Risskriteriums kann eingehalten werden.

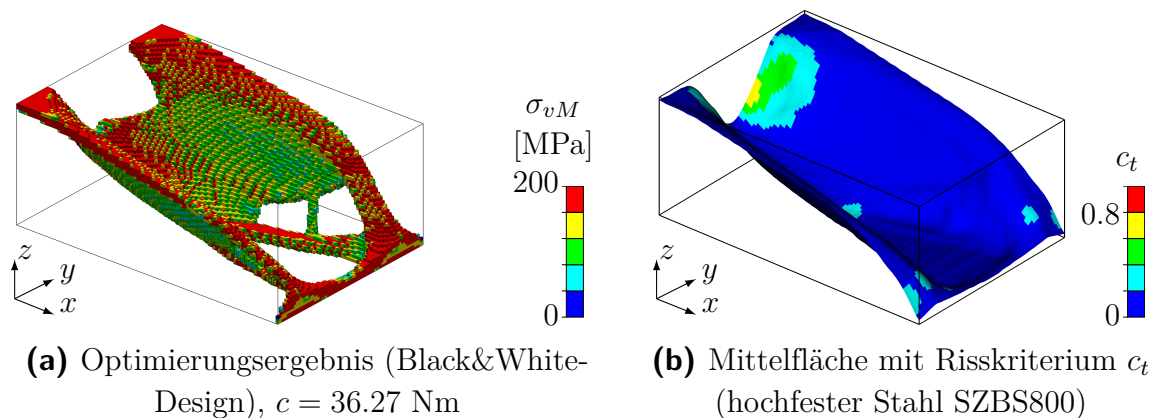


Abbildung 6–13: Optimierungsergebnis Kragbalken mit Risskriterium, mit Startdesign

Dieses Beispiel zeigt, dass mit größerer Anzahl und Komplexität der Restriktionen schlechte lokale Minima als Optimierungsergebnis auftreten können. Eine Möglichkeit diese zu umgehen ist die Wahl eines Startdesigns, das mit weniger komplexen Restriktionen optimiert wurde.

7 Erhöhung der Effizienz des Optimierungsalgorithmus

7.1 Elementdeaktivierung für Verkürzung der FE-Simulationszeit

Den größten Teil der Rechenzeit bei der Topologieoptimierung machen die FE-Rechnungen aus. Die Deaktivierung von Design-Elementen mit geringem mechanischem Einfluss sorgt für eine signifikante Beschleunigung der Rechenzeit des FE-Solvers.

Wenn die Elementdichten die Mindestdichte erreichen, ist deren mechanischer Einfluss vernachlässigbar und für viele Struktureigenschaften (z.B. Compliance, Spannung, Knotenverschiebung, Eigenfrequenz) sind auch die Sensitivitäten von mindestdichten Elementen beim SIMP-Ansatz nahezu null. Aus Optimierungssicht können diese mindestdichten Elemente vernachlässigt werden und dadurch kann die Rechenzeit für jede FEA reduziert werden.

Dies wurde bereits von Bruns und Tortorelli (2003) untersucht, wobei deren Ansatz nur für den Dichtefilter gültig ist. Durch die Elementdeaktivierung können zusätzliche Herausforderungen für die Optimierung auftreten, da es zu einer Aufteilung des Entwurfsraums in mehrere unverbundene Teile kommen kann, wobei auch die Verbindung zwischen Lagerung und Last verloren gehen kann. Damit kann die FEA nicht konvergieren und die Optimierung kann nicht weiter geführt werden. Für Optimierungsaufgaben unter Berücksichtigung der Eigenfrequenz können durch nicht verbundene Elemente Probleme auftreten, da diese zu Starrkörpermoden mit den Eigenfrequenzen $f_i = 0$ führen.

Für die Elementdeaktivierung wird $x_{min,i} = 0$ als untere Grenze der Entwurfsvariablen \mathbf{x} genutzt. Wenn die Elementdichte \tilde{x}_i eines Elements kleiner wird als die Mindestdichte \tilde{x}_{min} , wird dieses Element deaktiviert und daher nicht in die folgende FEA einbezogen.

Die Sensitivitäten der deaktivierten Elemente können nicht berechnet werden, da deren Knotenverschiebungen nicht bekannt sind. Für die gefilterten Sensitivitäten (Gleichung 3–5 bzw. 3–9) werden die aktiven Designelemente N_A anstelle aller Designelemente N_D verwendet. Dadurch können die gefilterten Sensitivitäten von deaktivierten Elementen nicht berechnet werden und daher können deaktivierte Elemente nicht für die Aktualisierung der Elementdichten berücksichtigt werden. Als Konsequenz können keine Elemente reaktiviert werden (außer für den Dichtefilter, bei dem Elemente durch das Verschmieren der Entwurfsvariablen reaktiviert werden können). Daher ist es nicht empfehlenswert nur Elemente mit einer Elementdichte $\tilde{x}_i > \tilde{x}_{min}$ für die FEA zu nutzen (diese Elemente werden im Weiteren „innere Elemente“ genannt).

Aus diesem Grund werden zusätzliche Randelemente in die FEA einbezogen, welche Elemente innerhalb des Filterradius R um die inneren Elemente sind. Dies wird exemplarisch in Abbildung 7–1 gezeigt. Die Randelemente werden mit der Mindestdichte $\tilde{x}_i = \tilde{x}_{min}$ berechnet, um eine gut konditionierte Systemsteifigkeitsmatrix zu erhalten. Die Entwurfsvariablen der Randelemente können während des Design-Updates vergrößert werden. Dadurch werden zusätzliche Elemente um diese Randelemente herum reaktiviert.

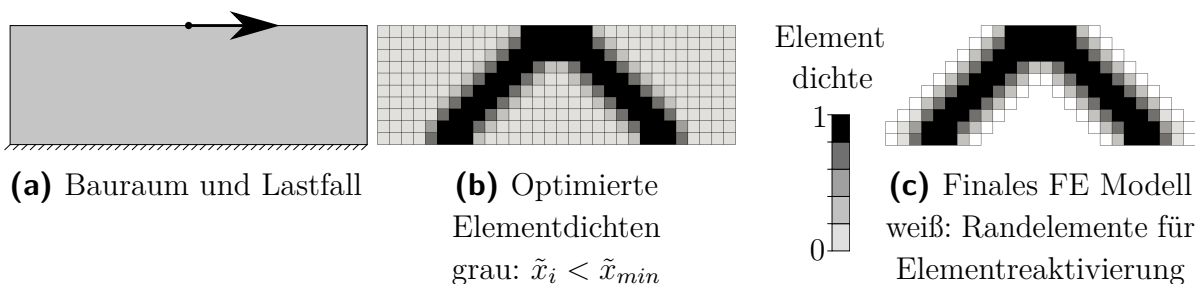


Abbildung 7–1: Exemplarisches Optimierungsergebnis mit Elementdeaktivierung, Filterradius $R = 1.4w$

Durch die Nutzung der Randelemente bleibt der Filterbereich für die Sensitivitäten (Gleichung 3–5 bzw. 3–9) der inneren Elemente gleich und wird reduziert auf die aktiven Elemente für die Randelemente. Für den Dichtefilter (Gleichung 3–7) werden weiterhin alle Designelemente berücksichtigt.

Da Elementreaktivierung ein essentieller Teil der Topologieoptimierung ist, können Optimierungsverfahren nicht empfohlen werden, die den Entwurfsraum ausschließlich durch eine Deaktivierung von Elementen reduzieren (z.B. ESO). Im Folgenden wird das beschriebene Verfahren Elementdeaktivierung genannt, wobei die Möglichkeit zur Elementreaktivierung immer gegeben ist.

Vergleiche mit und ohne Elementdeaktivierung für Optimierungsprobleme unter Berücksichtigung der Compliance, Knotenverschiebungen, Spannung und Eigenfrequenz werden in Dienemann et al. (2018) gezeigt. Aus dieser Studie und aus Erfahrung mit der Elementdeaktivierung wird im Folgenden für die Initialisierung der MMA-Asymptoten ohne Fertigungsrestriktion

$$\gamma_0 = \min(0.2, 0.5 [v_{f,initial} - \tilde{x}_{min}]) \quad (7-1)$$

genutzt (siehe Gleichung 3–15).

Unverbundene Elemente sind eine ernsthafte Herausforderung für die Elementdeaktivierung bei Eigenfrequenzproblemen, da unverbundene Elemente Starrkörpermoden aufweisen (6 Starrkörpermoden in 3D) mit dem Eigenwert $\lambda_j = 0$. Da üblicherweise der kleinste Eigenwert maximiert wird, sorgen Starrkörpermoden für unerwünschte Diskontinuitäten in der Optimierung. Daher wird nach Elementgruppen gesucht, die wenigstens über eine Elementkante (2D) bzw. eine Elementfläche (3D) verbunden sind. Wenn eine dieser Elementgruppen nicht mit Lagerbedingungen verbunden ist, werden diese Elemente deaktiviert und deren Entwurfsvariablen und Elementdichten werden zu $x_i = \tilde{x}_i = 0$ gesetzt.

Durch die Elementdeaktivierung kann die Rechenzeit der Optimierung aus Abbildung 5–4 bis 5–6 um 85 % reduziert werden. Auf einem Rechenknoten mit zwei Intel Xeon E5-2650 8-Kern CPUs und 32 GB Arbeitsspeicher bedeutet dies eine Verringerung der Rechenzeit von ca. 40 auf 5.7 Stunden. Aufgrund der Elementdeaktivierung wird ein anderes lokales Minimum gefunden, mit dem die Compliance des Black&White-Designs um 4 % verbessert wurde. Dieser Unterschied kann durch die Deaktivierung von Elementen mit Mindestdichte verursacht sein, die in den Optimierungen ohne Elementdeaktivierung in der FE-Rechnung eine Stützwirkung besaßen. Abbildung 7–2 zeigt das Ergebnis der Optimierung zusammen mit dem Verlauf der Anzahl aktiver Elemente N_A . Die Anzahl aktiver Elemente sinkt bis Iteration 7 von 460 560 auf ca. 120 000. Nach dem Erhöhen des Penaltyexponenten auf $s = 3$ in Iteration 217 sinkt die Anzahl aktiver Elemente kontinuierlich auf unter 100 000.

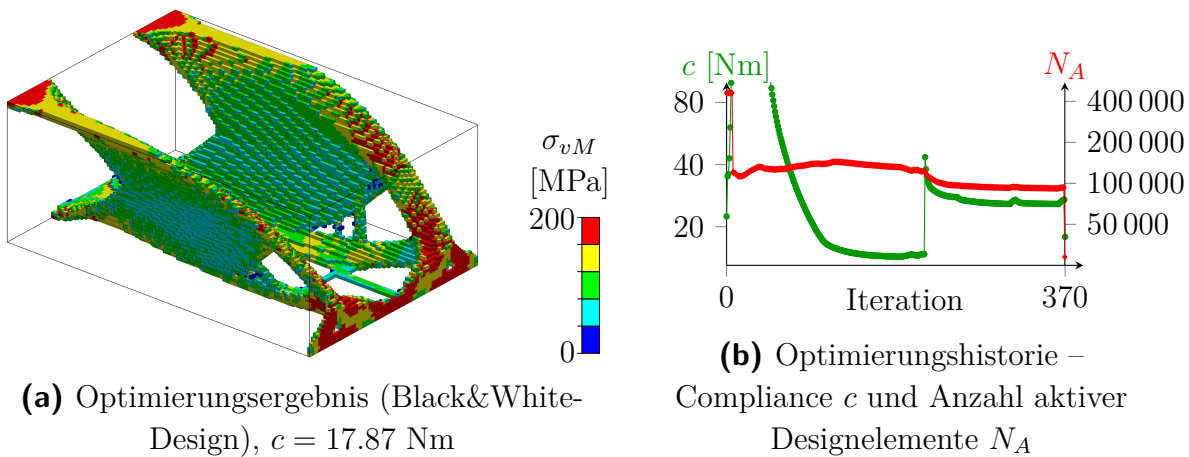


Abbildung 7–2: Kragbalken mit Fertigungsrestriktion und Elementdeaktivierung

7.2 Aktive Steuerung der Schalenmittelfläche für schnellere Konvergenz

Die Verlagerung der Mittelfläche durch eine allmähliche Veränderung der Elementdichten erfordert viele Iterationen. Um diesen Prozess zu beschleunigen, wird in diesem Abschnitt eine aktive Verlagerung der Mittelfläche eingeführt.

Dazu wird die Historie der Mittelfläche einbezogen. Ist die Verlagerung eines Mittelflächenpunktes in einer Richtung monoton, so wird dieser ab der Iteration $d = 3$ um einen Faktor j zusätzlich in diese Richtung verschoben:

$$\xi_{m_i}^{(d)} = \xi_{m_i}^{(d)} + j \left(\xi_{m_i}^{(d)} - \xi_{m_i}^{(d-1)} \right), \text{ wenn } \left(\xi_{m_i}^{(d)} - \xi_{m_i}^{(d-1)} \right) \cdot \left(\xi_{m_i}^{(d-1)} - \xi_{m_i}^{(d-2)} \right) > 0. \quad (7-2)$$

In dieser Arbeit wird $j = 0.5$ verwendet. Da die Elementdichten sich bevorzugt in Richtung der aktiv verschobenen Mittelfläche umlagern, verlagert sich die Mittelfläche der nächsten Iteration wiederum in die gleiche Richtung. So kann die aktive Steuerung der Mittelfläche den Effekt der Sensitivitäten überlagern. Um diesen Effekt der sukzessiven Umlagerung in eine Richtung zu überprüfen, wird die aktive Verlagerung der Mittelfläche nur jede zweite Iteration durchgeführt.

8 Praktische Anwendungen

In diesem Kapitel wird die bis hierhin vorgestellte Methode an mehreren akademischen Beispielen und einer Industrieanwendung demonstriert. Dabei wird die Plausibilität der Optimierungsergebnisse überprüft und auch mit Ergebnissen aus der Formoptimierung verglichen.

Alle Optimierungen in diesem Kapitel werden mit Elementdeaktivierung, aktiver Steuerung der Mittelfläche und OptiStruct[®] Analyse 2017 als FE-Solver gerechnet. Die Modelle werden auf zwei Intel Xeon E5-2650 8-Kern CPUs mit 32 GB Arbeitsspeicher berechnet, worauf sich die angegebenen Rechenzeiten beziehen.

8.1 Kragbalken

Der Kragbalken in Abbildung 8–1 wurde bereits in den vergangenen Kapiteln als Beispiel genutzt. Das Material ist Stahl mit dem Elastizitätsmodul $E = 210$ GPa und der Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$. Minimiert wurde die Compliance mit einer begrenzten Volumenfällung $v_f \leq 6.25$ %. Der Bauraum wird mit einer Elementkantenlänge von $w = 2.5$ mm diskretisiert. Der Filtrerradius beträgt $R = 1.8w$. Für die Fertigungsrestriktion wird die Zielwandstärke als $b_f = 3w$ gewählt. Drei Elementreihen über der Linienlast werden als Non-Design-Bereich definiert.

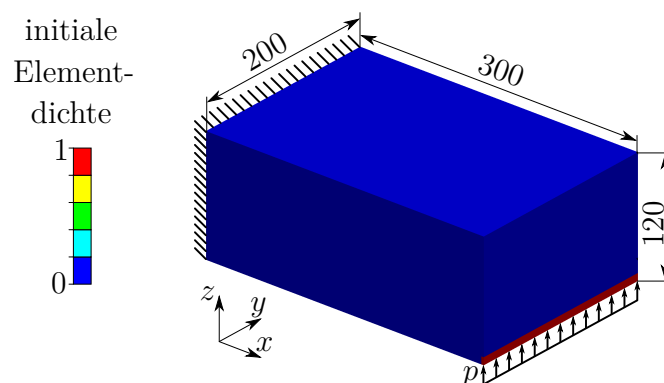


Abbildung 8–1: Bauraum, Lastfall und initiales Design, $p = 200$ N/mm, Maße in mm

Die bisherigen Ergebnisse werden in Tabelle 8–1 zusammengefasst. Je mehr Fertigungsrestriktionen berücksichtigt werden, desto schlechter wird die Compliance des optimierten Designs. Die Elementdeaktivierung sorgt für ein anderes lokales Minimum.

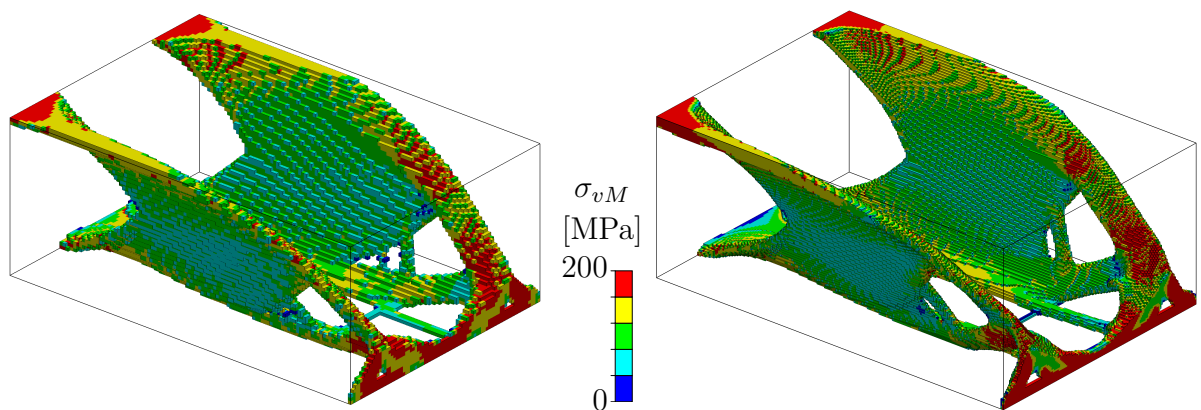
Tabelle 8–1: Kragbalken – Optimierungsergebnisse (Black&White-Design)

Fertigungsrestriktion	ohne Fertigungsrestriktion	mit Fertigungsrestriktion für Schalensstruktur		mit Berücksichtigung minimaler Umformradien	mit Berücksichtigung der Risskriterien
Elementdeaktivierung	nein	nein	ja	nein	nein
Abbildung	5–4b	5–4d	7–2a	6–8b	6–13a
Compliance [Nm]	15.77	18.60	17.87	20.20	36.27
Anzahl Funktionsaufrufe	200	586	369	441	538
Rechenzeit [h]	9	40	5	34	143

8.1.1 Netzkonvergenzstudie

Anhand des Kragbalkens wird eine Netzkonvergenzstudie durchgeführt. Dazu wird die Kantenlänge des Voxelnetzes von $w = 2.5$ mm auf $w = 1.25$ mm verringert. Die Zahl der Finiten Elemente verachtachtet sich auf 3.7 Millionen. Die Zielwandstärke bleibt bei $b_f = 7.5$ mm und der Filterradius bei $R = 4.5$ mm. Auch die Optimierung auf dem verfeinerten Designraum startet mit einer uniformen initialen Dichte von $\tilde{x}_i = 0.0625$. Beide Optimierungen werden mit Elementdeaktivierung durchgeführt.

Die optimierten Kragbalken mit unterschiedlicher Diskretisierung sind sehr ähnlich. Die Form der Mittelfläche ist nahezu identisch, die Aussparungen unterscheiden sich etwas. Diese Netzabhängigkeit zeigt sich auch ohne Fertigungsrestriktion, da eine feinere Diskretisierung immer für eine detaillierte Abbildung des realen Spannungszustands sorgt. Gleichzeitig kann die optimierte Struktur feiner aufgelöst werden. Die resultierende Compliance ist fast identisch. Zum einen ist eine gröbere Diskretisierung zunächst steifer, zum anderen wird dies kompensiert durch das gröbere Black&White-Design, bei dem grobe Kerben und unbelastete Ecken zwischen den Voxeln auftreten.



(a) Grobe Diskretisierung, $c = 17.87 \text{ Nm}$ (b) Feine Diskretisierung, $c = 17.85 \text{ Nm}$

Abbildung 8–2: Netzkonvergenzstudie am Kragbalken, Black&White-Design

Die Optimierung mit feiner Diskretisierung benötigt mit 954 Iterationen fast die dreifache Anzahl an Iterationen wie die Optimierung mit grobem Netz (369 Iterationen). Dies liegt daran, dass die initiale Zielwandstärke $b_c = 10 \text{ mm}$ kleiner gewählt wurde als bei der Optimierung mit grobem Netz ($b_c = 12.5 \text{ mm}$). Dadurch braucht die Mittelfläche länger, um sich in bzw. entgegen der Stempelrichtung zum Bauraumrand zu verschieben. Außerdem greift das Konvergenzkriterium $\max_i |x_i^{(d)} - x_i^{(d-1)}| < 0.19$ bei steigender Anzahl an Entwurfsvariablen später.

8.1.2 Netz- und Strukturverfeinerung

Anhand des Kragbalkens wird nun während der Netzverfeinerung von $w = 2.5 \text{ mm}$ auf $w = 1.25 \text{ mm}$ und $w = 0.625 \text{ mm}$ gleichermaßen die finale Wandstärke $b_f = 3w$ und der Filterradius $R = 1.8w$ reduziert. Außerdem wird die Volumenrestriktion so gesetzt, dass das Gesamtvolumen aus Designbereich und Non-Design-Bereich jeweils halbiert wird. Bei Netzstufe 3 wird zur Optimierung nur ein Halbmodell genutzt. Alle angegebenen Ergebnisse beziehen sich aber auf das gesamte Modell. Als Startdesign für Netzstufe 2 und 3 wird das Optimierungsergebnis mit dem jeweils größeren Netz genutzt.

Tabelle 8–2 zeigt einen nahezu reziproken Zusammenhang zwischen der Wandstärke und der Compliance sowie der mittleren Spannung (vgl. Abbildung 8–3). Dies ist typisch für Strukturen unter Zug/Druck-Belastung, da während der Verfeinerung ein dominierender Membranspannungszustand beibehalten wird.

Je geringer die Wandstärke wird, desto mehr Stützstrukturen werden um die eigentliche Schale herum erstellt. Von Netzstufe 1 zu 2 kommt eine stabartige Stützstruktur an den Seitenflächen nahe der Lastaufbringung hinzu. Von Netzstufe

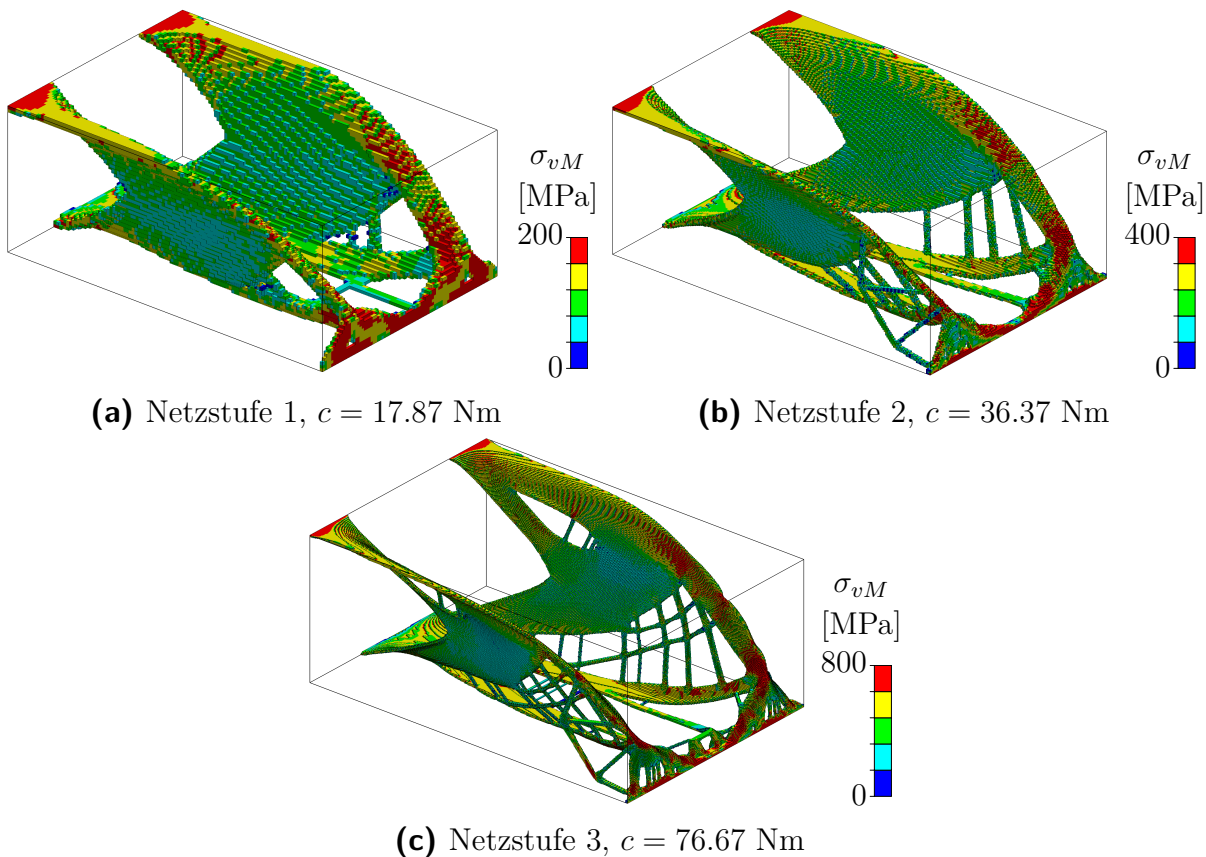


Abbildung 8–3: Netz- und Struktur-Verfeinerung am Kragbalken, Black&White-Design

Tabelle 8–2: Netz- und Struktur-Verfeinerung – Optimierungsergebnisse
(Black&White-Design)

Netz- stufe	Element- kanten- länge w [mm]	Wand- stärke b_f [mm]	Gesamt- volumen [mm ³]	Anzahl Elemente N_E	Anzahl Ite- rationen	Rechen- zeit [h]	Compli- ance c [Nm]
1	2.5	7.5	453 516	460 800	369	5.7	17.87
2	1.25	3.75	226 758	3 686 400	345	36.7	36.37
3	0.625	1.875	113 379	29 491 200	542	188.8	76.67

2 zu 3 wird eine Momentenabstützung erzeugt, indem sich nahe der Mitte der Lastaufbringung eine Aufwölbung bildet. Diese stützt Momente um die x -Achse an der Symmetrieebene ab. Diese Strukturänderungen sind bedingt durch die deutlich geringere Biegesteifigkeit bei dünner werdenden Schalen. Ist die Biegesteifigkeit dickwandiger Schalen noch groß genug, um geringe Biegeanteile aufzunehmen, so ist es die dünnwandige Schale nicht mehr. Daher wird der Biegung entgegengewirkt, indem die auf Zug und Druck beanspruchten Stützstrukturen erzeugt werden.

Netzstufe 1 benötigt viele Iterationen, da hier kein Startdesign gewählt wird und die Mittelfläche über viele Iterationen von der Bauraummitte zum Bauraumrand wandert. Netzstufe 2 und 3 benötigen mehrere hundert Iterationen, da das Konvergenzkriterium $\max_i |x_i^{(d)} - x_i^{(d-1)}| < 0.19$ (vgl. Kapitel 5.1.5) bei einer höheren Elementanzahl mehr Iterationen bis zur Erfüllung benötigt. Bei diesen Optimierungen verändert sich während der Iterationen hauptsächlich die Stützstruktur. Das Verschieben der Mittelfläche an diesen Stellen sorgt dafür, dass auch dort mehrere hundert Iterationen benötigt werden.

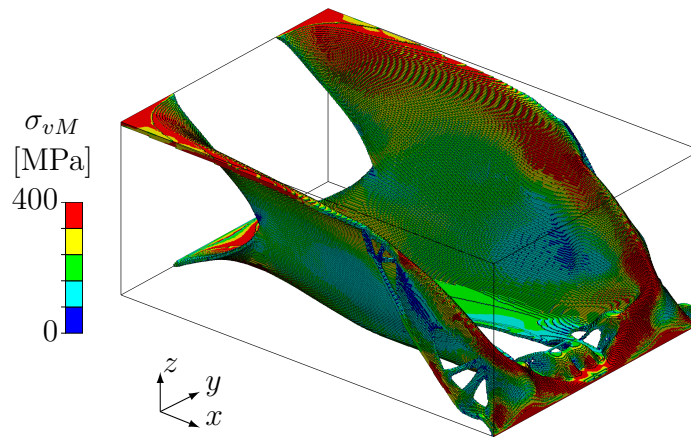
Die Optimierung mit Netzstufe 3 ist auf der verwendeten Hardware nur möglich, da die Elementdeaktivierung verwendet wird. So sind bei der Optimierung von Netzstufe 3 maximal 1.1 Millionen Elemente aktiv. Eine FE-Berechnung mit 14.7 Millionen Elementen des gesamten Bauraums des Halbmodells wäre aufgrund der benötigten Rechenkapazitäten nicht möglich.

8.1.3 Wandstärkenvariation

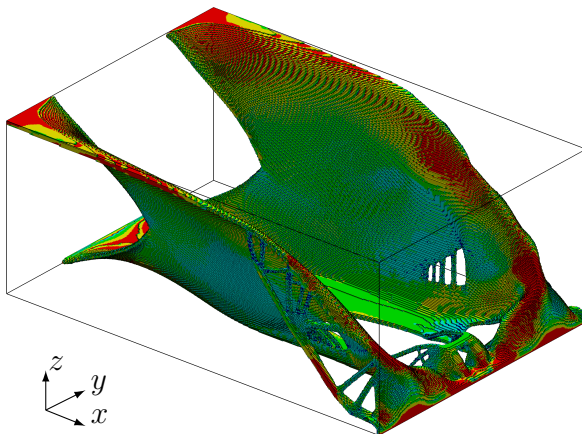
Auf Netzstufe 3 wird nun bei gleichbleibender Volumenrestriktion eine Variation der Zielwandstärke b_f durchgeführt. Der Filterradius wird jeweils angepasst, so dass $R = 0.6b_f$. Durch Vorgabe des Volumens und der Wandstärke ist die Größe der Schalenfläche vorgegeben. So kann untersucht werden, welche Wandstärke die beste ist und ob eine geschlossene Schale oder eine Schale mit dominanten Aussparungen besser ist. Alle Optimierungen starten mit dem Optimierungsergebnis aus Netzstufe 2 (Abbildung 8–3b), da hier das gleiche Gesamtvolumen vorgegeben wurde. Tabelle 8–3 und Abbildung 8–4 geben einen Überblick über die Optimierungsergebnisse mit unterschiedlichen Wandstärken.

Tabelle 8–3: Wandstärkenvariation – Optimierungsergebnisse (Black&White-Design)

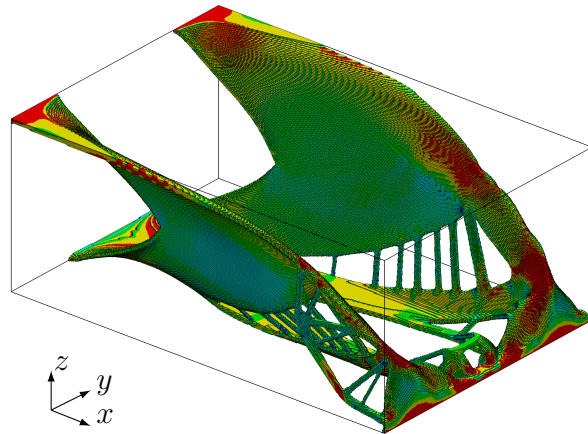
Wandstärke b_f [mm]	Filterradius R [mm]	Gesamtvolumen [mm ³]	Anzahl Iterationen	Rechenzeit [h]	Compliance c [Nm]
1.875	1.125	226 758	257	127	43.78
2.5	1.5	226 758	320	169	39.38
3.125	1.875	226 758	296	208	37.44
3.75	2.25	226 758	354	287	36.42
4.375	2.625	226 758	362	290	35.91



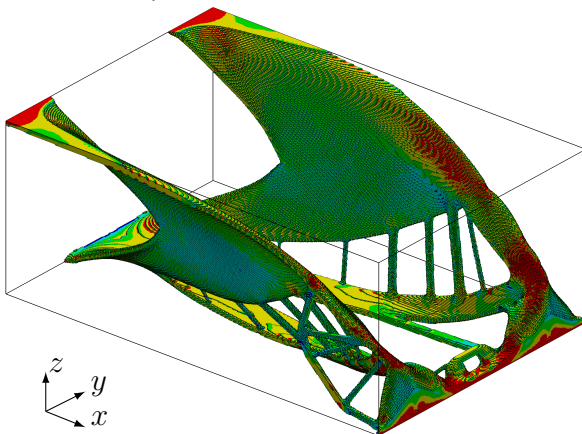
(a) $b_f = 1.875$ mm, $c = 43.78$ Nm



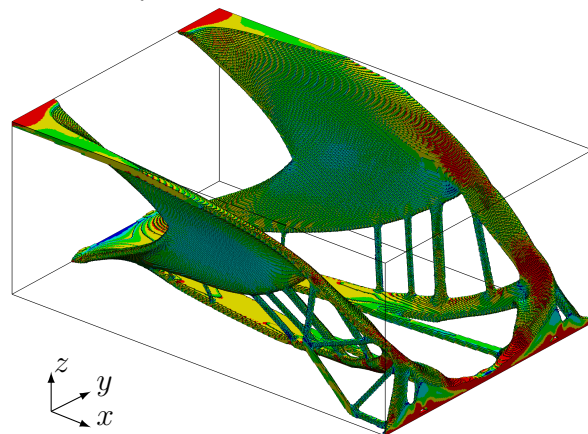
(b) $b_f = 2.5$ mm, $c = 39.38$ Nm



(c) $b_f = 3.125$ mm, $c = 37.44$ Nm



(d) $b_f = 3.75$ mm, $c = 36.42$ Nm



(e) $b_f = 4.375$ mm, $c = 35.91$ Nm

Abbildung 8-4: Wandstärkenvariation – Optimierungsergebnisse (Black&White-Design)

Abbildung 8–4 zeigt, dass die Vergrößerung der Wandstärke das optimierte Design von einer dünnwandigen Schalenstruktur mit wenigen kleinen Aussparungen zu einer dickwandigen Struktur mit großen Aussparungen ändert. Die dickwandige Struktur ähnelt fachwerkartigen Optimierungsergebnissen, wie sie häufig ohne Fertigungsrestriktion entstehen.

In diesem Beispiel ist die Compliance der dickwandigsten Struktur 22 % besser als die Compliance der dünnwandigsten. Eine Tendenz der Verbesserung der Struktur durch das Einbringen von Aussparungen ist erkennbar, da durch mehr Aussparungen bei konstanter Masse die Wandstärke vergrößert werden kann. Die Herstellbarkeit der Strukturen wird durch mehr Aussparungen komplizierter, sodass in industriellen Anwendungen zwischen günstiger Fertigung und gutem Bauteilverhalten abgewogen werden muss.

Nachrechnung mit Schalenelementen

Da die Genauigkeit der Berechnungen auf dem Voxel-Netz von der Anzahl der Elemente über die Wandstärke abhängt, werden die Optimierungsergebnisse mit unterschiedlichen Wandstärken mit Schalenelementen nach Reissner-Mindlin nachgerechnet (vgl. Kapitel 2.2.2). Abbildung 8–5 zeigt, dass die Compliance der Strukturen mit Schalenelementen etwas schlechter ist. Dies liegt an der halbautomatischen Interpretation der Optimierungsergebnisse und daran, dass leichte Dickenunterschiede innerhalb einer Struktur nun vereinheitlicht wurden.

Bei der dünnwandigsten Struktur entsteht der Unterschied zwischen Schalen- und Voxel-elementen auch wegen der groben Diskretisierung mit drei Voxeln über die Wandstärke, was für eine künstliche Steifigkeit sorgt.

Die Nachrechnung zeigt, dass die Strukturen mit großen Aussparungen denen mit wenigen kleinen Aussparungen hinsichtlich der Steifigkeit überlegen sind. Sigmund et al. (2016) zeigen, dass geschlossene Strukturen mit variabler Wandstärke steifer sind als Fachwerkstrukturen, wie sie von Michell (1904) als optimal postuliert wurden. Dieses Beispiel zeigt, dass bei Strukturen mit konstanter Wandstärke Aussparungen bei einer gleichzeitigen Vergrößerung der Wandstärke zu einer höheren Steifigkeit führen.

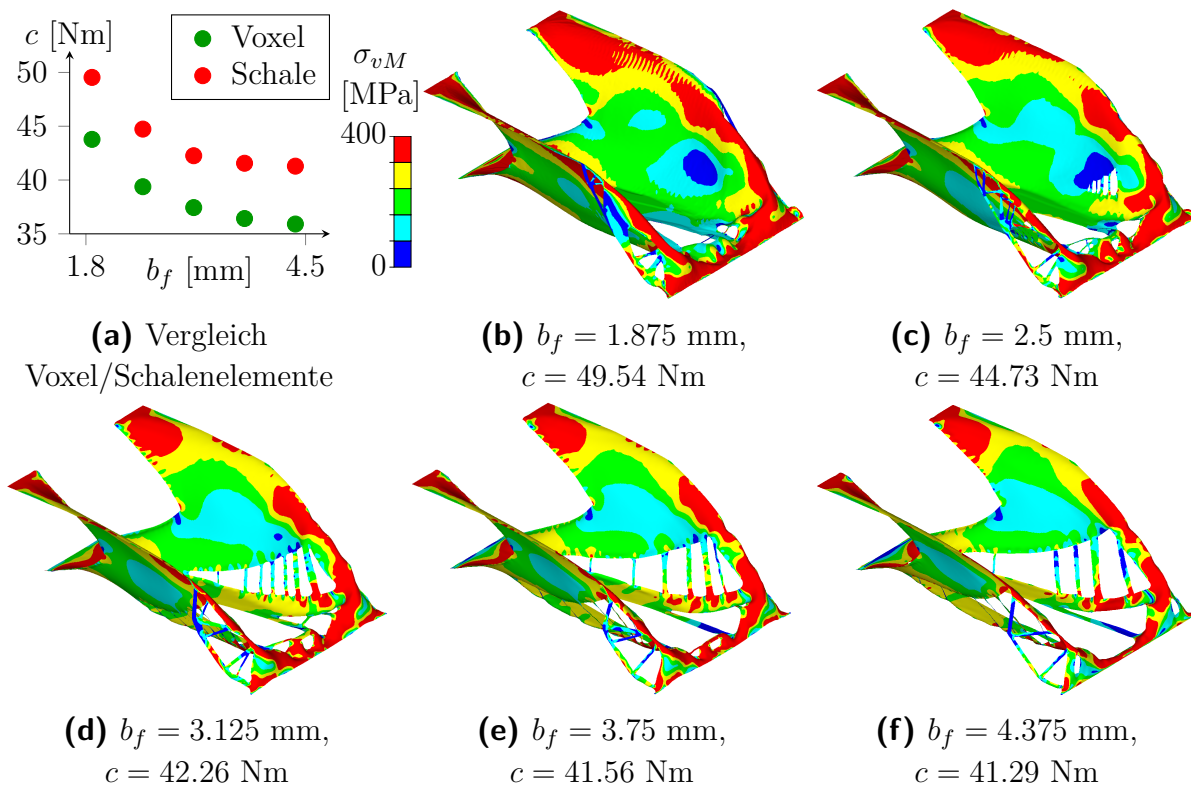


Abbildung 8-5: Schalennachrechnung der Optimierungen mit Wandstärkenvariation

8.1.4 Variation der Stempelrichtung

Für die Variation der Stempelrichtung wird der Lastfall abgeändert. Anstelle der Linienlast greift nun eine Punktlast mit $F = 10$ kN exzentrisch auf der Stirnseite des Bauraums an, wie in Abbildung 8-6 gezeigt wird. Um den Lastangriff sind $4 \times 4 \times 2$ Elemente als Non-Design-Bereich definiert. Auch hier wird zunächst die Compliance bei der Volumenrestriktion $v_f \leq 6.25$ % minimiert. Der Filterradius beträgt $R = 1.8w$.

Ohne Fertigungsrestriktion

Ohne Fertigungsrestriktion werden 200 Iterationen gerechnet, wobei der Penaltyexponent während der ersten 150 Iterationen linear von $s = 1$ auf $s = 3$ steigt, d.h. die Continuation Method aus Kapitel 3.8 wird angewendet. Es entwickelt sich ein Schubfeldträger (vgl. Abbildung 8-7). Das Ergebnis ist nahezu symmetrisch bezüglich einer Ebene parallel zur x - z -Ebene durch den Lastangriffspunkt.

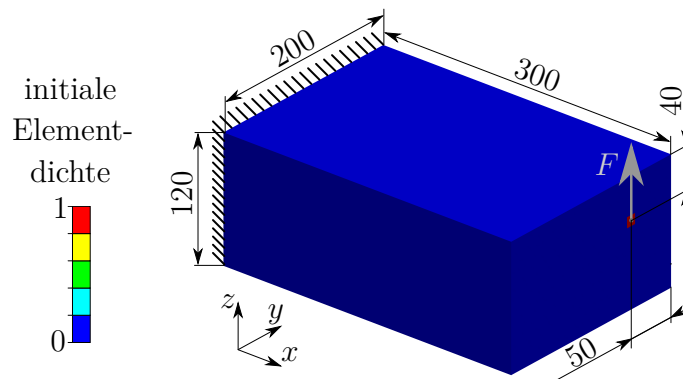


Abbildung 8–6: Kragbalken mit Punktlast – Bauraum, Lastfall und initiales Design (rot – Non-Design), $F = 10$ kN, Maße in mm

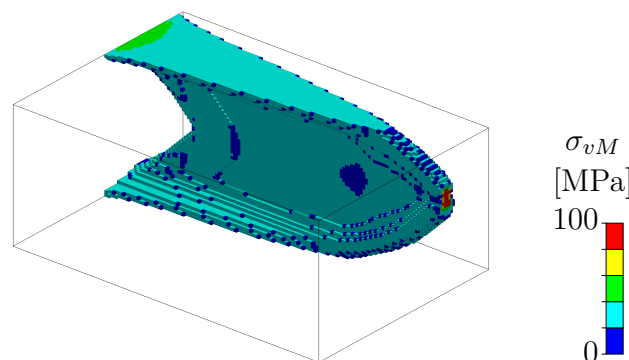


Abbildung 8–7: Kragbalken mit Punktlast ohne Fertigungsrestriktion, Black&White-Design, $c = 934.03$ Nmm

Mit Fertigungsrestriktion

Die Zielwandstärke wird als $b_f = 3w = 7.5$ mm gewählt. Als Startdesign wird das optimierte Design ohne Fertigungsrestriktion genutzt. Als Stempelrichtung wird je Optimierung eine andere Koordinatenrichtung gewählt. Prinzipiell kann jede beliebige Richtung vorgegeben werden.

Abhängig von der Stempelrichtung entstehen sehr unterschiedliche optimierte Strukturen. Mit den Stempelrichtungen x und z wird eine deutlich bessere Compliance erreicht als mit Stempelrichtung y . Dies liegt daran, dass bei Stempelrichtung y das initiale Design, der genutzte Bauraum und der Lastfall nahezu symmetrisch sind und so die Sensitivitäten auf der Schalenunterseite und Schalenoberseite gleich sind. Dadurch ändert sich die Lage der Mittelfläche während der Optimierung nicht.

Um eine Vorzugsrichtung vorzugeben, werden einige Non-Design-Elemente am Bauraumrand hinzugefügt (vgl. Abbildung 8–9b). Diese sind nicht verbunden mit den Design-Elementen und tragen so nicht zur Steifigkeit bei. Diese sorgen dafür,

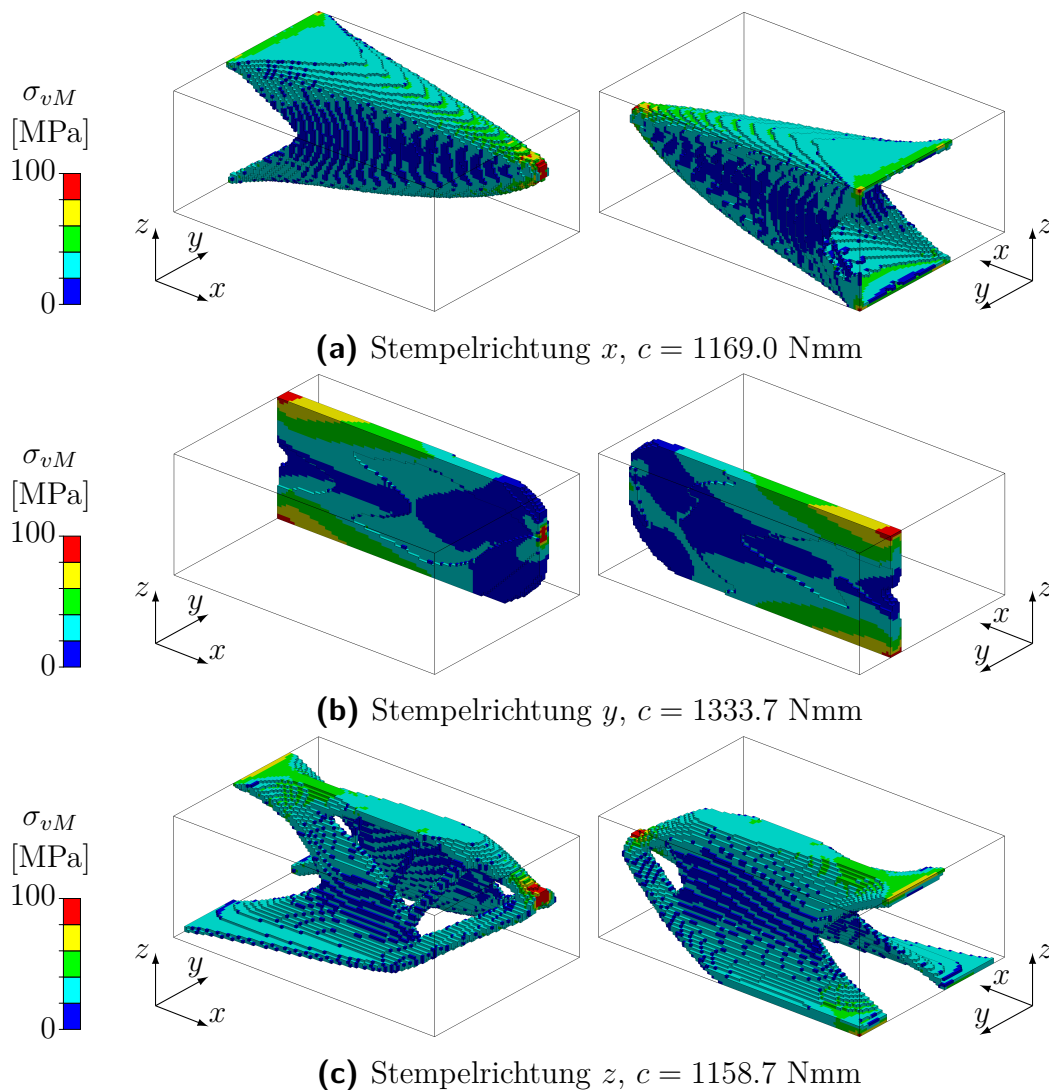


Abbildung 8–8: Optimierungsergebnisse Kragbalken mit Punktlast für verschiedene Stempelrichtungen, Black&White-Design

dass die Mittelfläche in Richtung der zusätzlichen Non-Design-Elemente gekrümmt ist. Dadurch werden die Sensitivitäten der Zielfunktion auf dieser Seite weniger bestraft und die Enden der Schale verschieben sich während der Optimierung in y -Richtung. Dadurch wird die Compliance bei der Stempelrichtung y um 10 % im Vergleich zu Abbildung 8–8b gesenkt.

Die Ergebnisse des Kragbalkens mit Punktlast sind in Tabelle 8–4 zusammengefasst. Die Optimierungsergebnisse mit Fertigungsrestriktion sind 24 % bis 29 % schlechter als ohne Fertigungsrestriktion. Die Compliance der Optimierungsergebnisse mit Fertigungsrestriktion sind ähnlich. In der tatsächlichen Anwendung würde eines dieser Designs anhand der Herstellbarkeit ausgewählt werden.

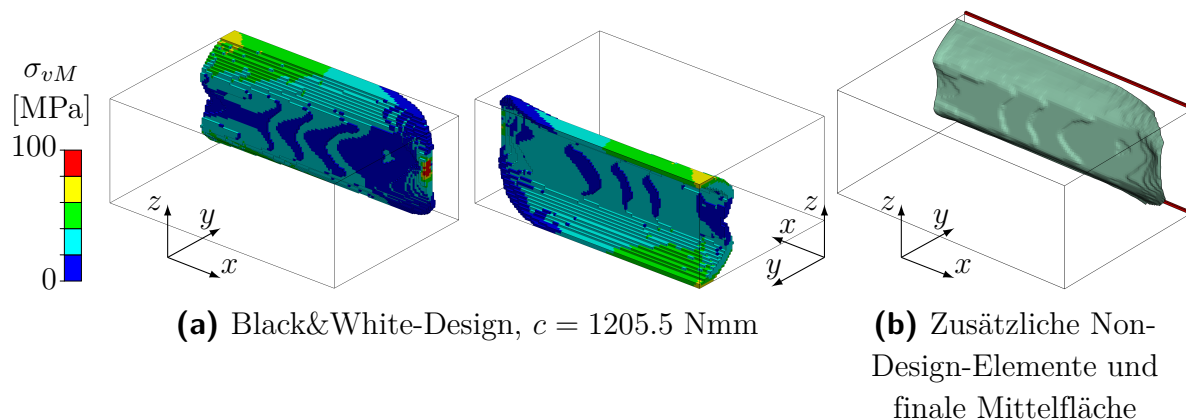


Abbildung 8–9: Optimierungsergebnisse Kragbalken mit Punktlast für Stempelrichtung y mit Vorzugsrichtung

Tabelle 8–4: Kragbalken mit Punktlast, verschiedene Stempelrichtungen

	ohne Fertigungsrestriktion	mit Fertigungsrestriktion für Schalenstruktur		
Stempelrichtung	-	x	y	z
Abbildung	8–7	8–8a	8–9a	8–8c
Compliance c [Nmm]	934.0	1169.0	1205.5	1158.7

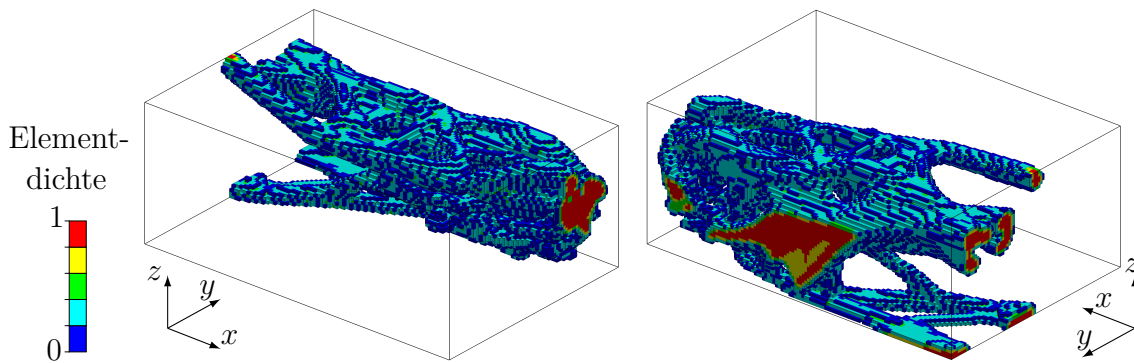
8.1.5 Variation der Optimierungsaufgabe

Anstelle der Compliance wird nun die Beulsicherheit als Struktureigenschaft genutzt. Als Beispiel dient der Kragbalken mit Punktlast aus Abbildung 8–6. Der Filterradius beträgt weiterhin $R = 1.8w$.

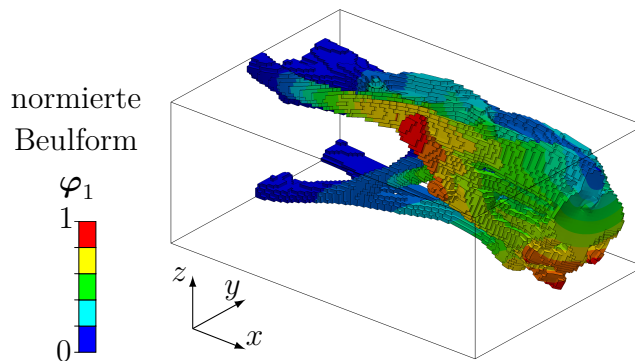
Ohne Fertigungsrestriktion

Ohne Fertigungsrestriktion wird die Beulsicherheit $T_k = \left[\sum_{j=1}^{50} T_j^{-k} \right]^{-1/k}$ mit $k = 12$ bei einer Volumenrestriktion von $v_f \leq 6.25$ % maximiert.

Nach 200 Iterationen hat sich die Struktur in Abbildung 8–10 mit dem Beulkriterium $T_k = 255.3$ und der ersten Beulsicherheit $T_1 = 277.2$ gebildet. Die Struktur besteht aus einer Vielzahl von Streben, die sich gegenseitig abstützen und so ein frühzeitiges Beulen verhindern. Die erste Beuleigenform ist ein Biegedrillknicken um die x -Achse. Die auf Compliance optimierte Struktur in Abbildung 8–7 erreicht nur eine Beulsicherheit von $T_1 = 45.4$. Die Erhöhung auf $T_k = 255.3$ gelingt beispielsweise durch die Vermeidung von flächigen Strukturen, die ausbeulen können. Die Compliance verschlechtert sich jedoch von 934 Nmm auf 26 424 Nmm.



(a) Elementdichten, nur Elemente mit $\tilde{x}_i > 0.1$ abgebildet



(b) Erste Beulform φ_1 , deformiert, nur Elemente mit $\tilde{x}_i > 0.1$ abgebildet

Abbildung 8–10: Optimierungsergebnisse Kragbalken mit Punktlast, Zielfunktion Beulsicherheit, ohne Fertigungsrestriktion, Iteration 200

Mit Fertigungsrestriktion

Für die Fertigungsrestriktion wird als Stempelrichtung z gewählt. Die Zielwandstärke beträgt $b_f = 3w = 7.5$ mm. Das Volumen v wird minimiert bei einer Restriktion $T_1 \geq 277.2$. Zur Initialisierung der Entwurfsvariablen wird das optimierte Design aus der Minimierung der Compliance in Abbildung 8–8c genutzt.

222 Iterationen werden für die Optimierung mit Fertigungsrestriktion benötigt. Die Lage der Mittelfläche bleibt ähnlich zum initialen Design, die Topologie ändert sich jedoch wie in Abbildung 8–11 gezeigt wird. Dadurch erhöht sich die Beulsicherheit von $T_1 = 85.4$ im initialen Design auf $T_1 = 277.6$, sodass die Restriktion eingehalten wird. Die erste Beulform des Optimierungsergebnisses ist ein Kippen am Lastangriffspunkt um die y -Achse. Die benötigte Volumenfüllung steigt geringfügig von $v_f = 6.25$ % auf $v_f = 6.35$ %. Damit weist das optimierte Design mit Fertigungsrestriktion auch nur eine um 1.5 % größere Masse auf als das optimierte Design ohne Fertigungsrestriktion in Abbildung 8–10.

In Tabelle 8–5 werden die Ergebnisse für den Kragbalken mit Punktlast unter Berücksichtigung des linearen Beulens zusammengefasst.

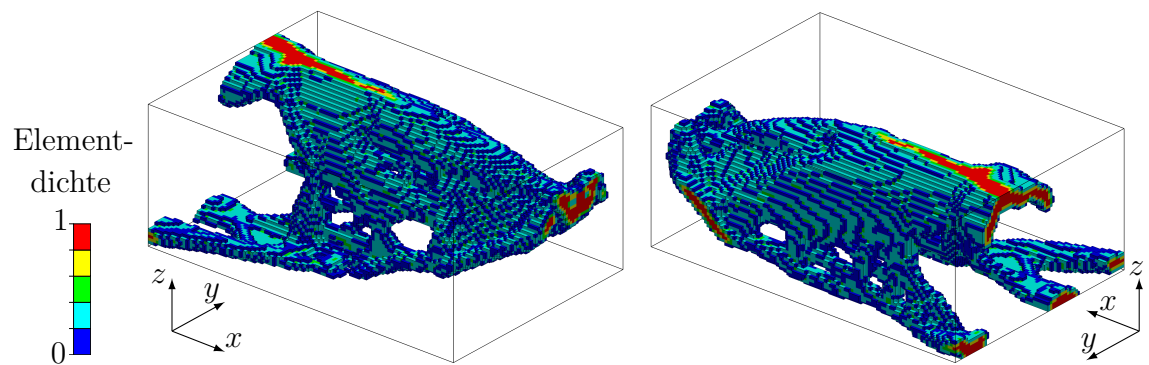
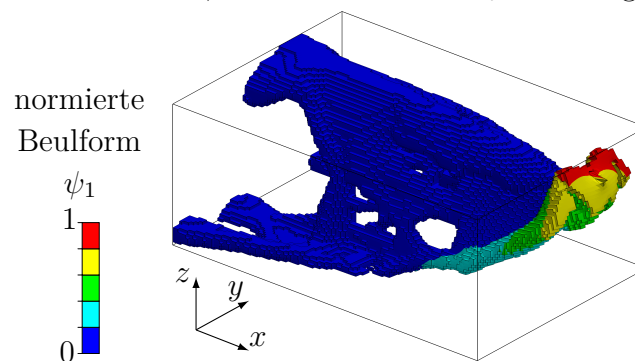
(a) Elementdichten, nur Elemente mit $\tilde{x}_i > 0.1$ abgebildet(b) Erste Beulform ψ_1 , deformiert, nur Elemente mit $\tilde{x}_i > 0.1$ abgebildet**Abbildung 8–11:** Optimierungsergebnisse Kragbalken mit Punktlast, Zielfunktion Beulsicherheit, mit Fertigungsrestriktion für Schalenstrukturen, Iteration 222**Tabelle 8–5:** Kragbalken mit Punktlast unter Berücksichtigung des linearen Beulens

	Abbildung	erste Beul- sicherheit T_1	Volumen- füllung v_f [%]	Compli- ance c [Nmm]
Ohne Fertigungsrestriktion	8–10	277.2	6.25	14 651
Mit Fertigungsrestriktion	8–11	277.6	6.35	8 103

8.2 Quadratische Platte

Dieses Beispiel ist angelehnt an eine Formoptimierungsaufgabe aus Bletzinger (2014). Im quaderförmigen Bauraum greift zentral eine Kraft mit $F = 4$ kN an (siehe Abbildung 8–12). Die Ecken sind in z -Richtung mittig fest gelagert. Dies wird bei der Voxeldiskretisierung durch die Fixierung von drei übereinander liegenden Knotenreihen realisiert. Auch hier wird als Material Stahl ($E = 210$ GPa, $\nu = 0.3$) genutzt.

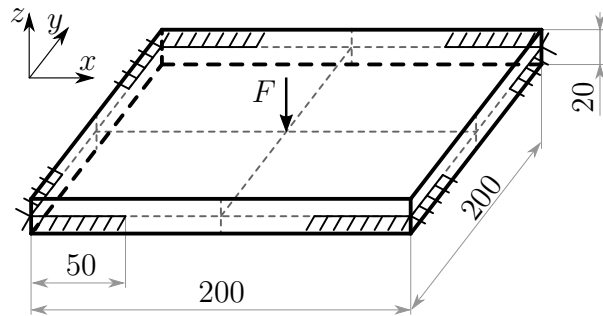


Abbildung 8–12: Quadratische Platte – Lastfall und Bauraum, Maße in mm

In diesem Beispiel wird die Compliance bei einer Volumenrestriktion von $v_f \leq 7.5\%$ minimiert. Dabei wird ein Filterradius von $R = 2.4w = 1.2$ mm verwendet. Für die Optimierung wird, wenn möglich, mithilfe von Symmetriebedingungen nur ein Viertel des Bauraums berücksichtigt. Alle angegebenen Ergebnisse beziehen sich aber auf das gesamte Modell.

8.2.1 Ohne Fertigungsrestriktion

Ohne Fertigungsrestriktion entsteht eine Struktur, die mittig ebene Platten auf der Ober- und Unterseite aufweist, die durch Rippen verbunden sind (vgl. Abbildung 8–13). Auch in den gelagerten Ecken entstehen biegesteife Teilstrukturen mit Ober- und Untergurt, die an der Lagerung aufeinander treffen.

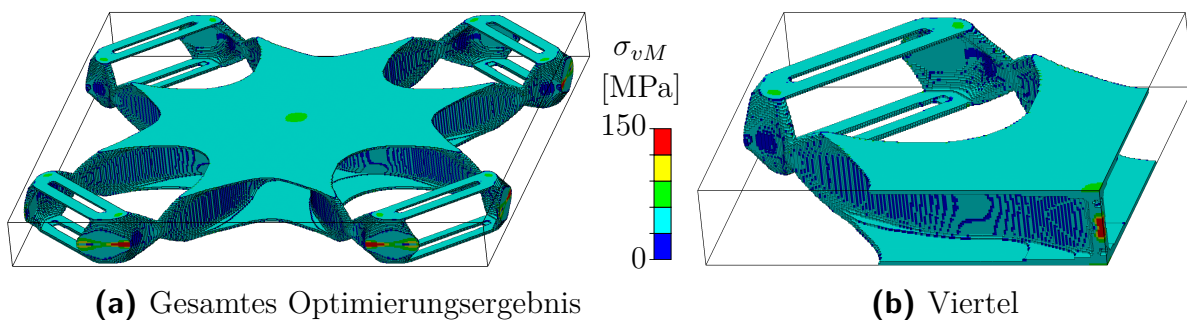


Abbildung 8–13: Optimierungsergebnis quadratische Platte ohne Fertigungsrestriktion, Black&White-Design, $c = 329.15$ Nmm

8.2.2 Mit Fertigungsrestriktion für Schalenstruktur

Für die Fertigungsrestriktion wird eine Wandstärke von $b_f = 4w = 2$ mm und als Stempelrichtung z vorgegeben. Da der Bauraum und der Lastfall für symmetrische

Sensitivitäten zur x - y -Ebene sorgen, würde das Design bei einer uniformen initialen Elementdichteverteilung symmetrisch sein. Für eine Schale wäre dies eine ebene Platte, was aber ein lokales Maximum ist, also ein extrem schlechtes Design. Daher wird als initiales Design eine außermittig liegende ebene Platte genutzt, wie in Abbildung 8–14 gezeigt wird.



Abbildung 8–14: Initiales Design für quadratische Platte mit Fertigungsrestriktion (Viertel)

Das Optimierungsergebnis in Abbildung 8–15 weist mittig ein ringförmiges Sickenmuster auf. In den gelagerten Ecken entstehen gekrümmte Näpfe. Damit wird nahezu ein Membranspannungszustand erreicht.

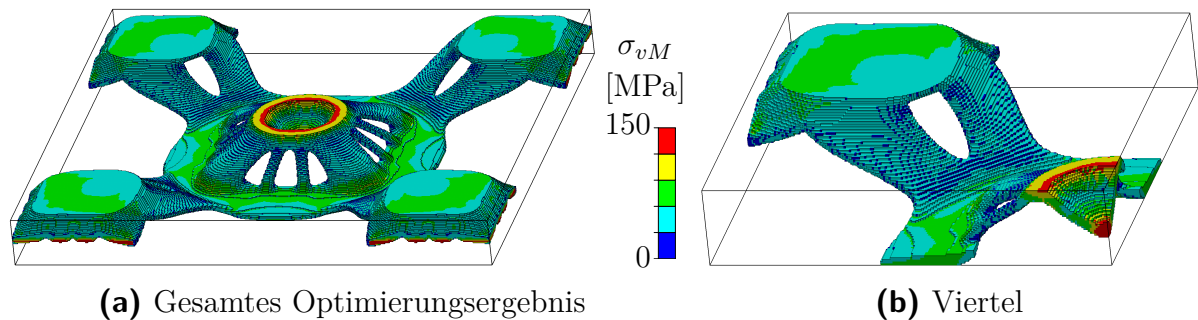


Abbildung 8–15: Optimierungsergebnis quadratische Platte mit Fertigungsrestriktion für Schalenstrukturen, Black&White-Design, $c = 542.15$ Nmm

8.2.3 Mit Berücksichtigung minimaler Umformradien

Zusätzlich wird ein minimaler Umformradius von $r_{c,min} = 6w = 3$ mm vorgegeben. Die Compliance des Optimierungsergebnisses in Abbildung 8–16 verschlechtert sich aufgrund der zusätzlichen Restriktion um 9 %. Die prinzipielle Mittelflächenform des Optimierungsergebnisses bleibt gleich, die Topologie ändert sich jedoch. Insbesondere kommen Druckstäbe zwischen den Näpfen nahe der Lagerungen hinzu.

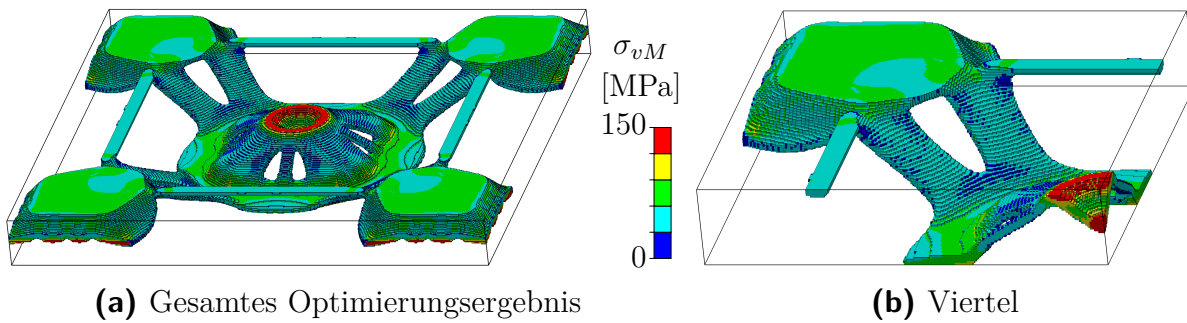


Abbildung 8–16: Optimierungsergebnis quadratische Platte mit minimalem Umformradius, Black&White-Design, $c = 589.68$ Nmm

8.2.4 Mit Berücksichtigung der Risskriterien

Zusätzlich wird die Restriktion des Risskriteriums $\tilde{c}_{ti} \leq c_{t,max} = 0.8$ vorgegeben. Eine konstante Rückhaltung von 0.25 wird am gesamten Bauteilrand festgelegt. Der Reibungskoeffizient zwischen Platine und Matrize beträgt $\mu_0 = 0.15$. Als Material wird der hochfeste Stahl SZBS800 verwendet. Das Spannungs-Dehnungs-Diagramm und die Grenzformänderungskurve sind in Abbildung 6–11 auf Seite 96 dargestellt. Der Stempel bewegt sich entgegen der z -Richtung.

Durch die Restriktion des Risskriteriums entsteht eine andere Geometrie (vgl. Abbildung 8–17). Beispielsweise ist der Flankenwinkel am Lastangriffspunkt kleiner. Daher verschlechtert sich die Compliance im Vergleich zur Optimierung mit restringiertem minimalem Umformradius um 15 %.

8.2.5 Vergleich mit Ergebnissen der Formoptimierung

Zur Validierung der Optimierungsergebnisse werden die Ergebnisse der quadratischen Platte mit Formoptimierungsergebnissen aus der Vertex Morphing Method (VMM) verglichen. Die VMM dient, wie in Kapitel 2.4.1 gezeigt, der Sensitivitätenbasierten Formoptimierung und kann für Schalenbauteile angewendet werden. Sie wurde an der Technischen Universität München (Bletzinger 2014, Hojjat et al. 2014) entwickelt.

Für diesen Vergleich kommt die Implementierung der VMM im Open-Source-Code Kratos¹ zum Einsatz. Zur Diskretisierung werden Tria-Elemente mit der initialen Elementkantenlänge $w = 2$ mm bei einem Filterradius $R = 15$ mm verwendet. Zunächst wird die Compliance ohne eine Volumenrestriktion minimiert.

¹www.github.com/KratosMultiphysics/Kratos, Stand: Februar 2018

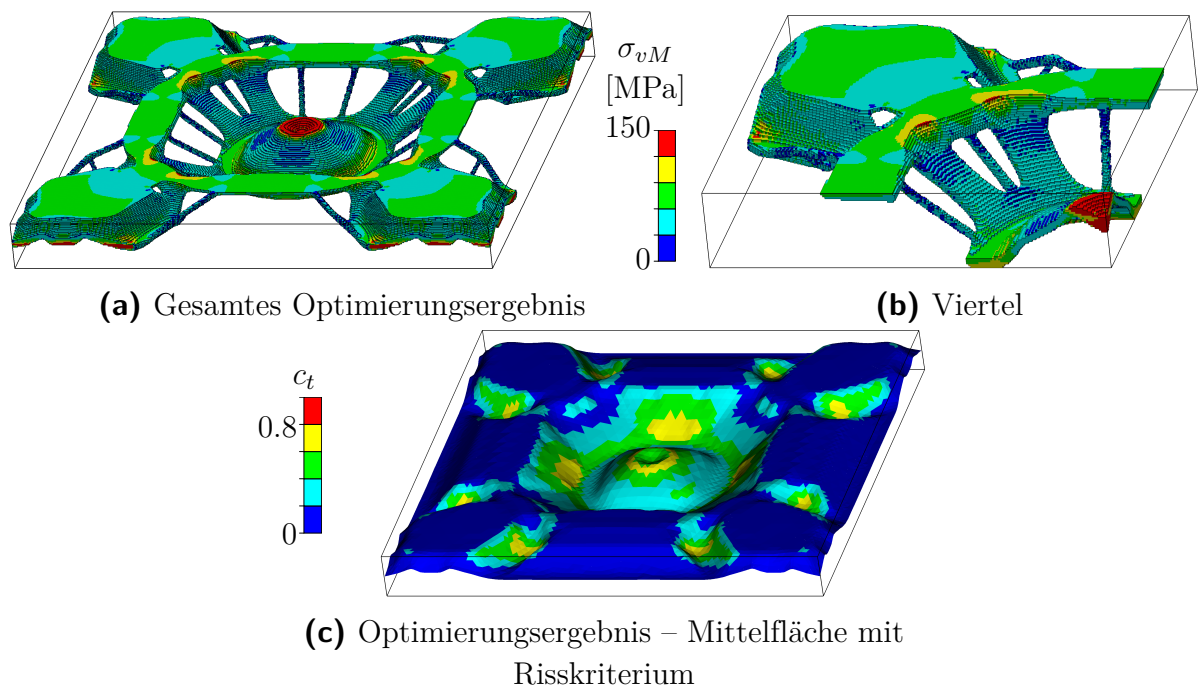


Abbildung 8–17: Optimierungsergebnis quadratische Platte mit Risskriterium, Black&White-Design, $c = 675.19$ Nmm

Das Ergebnis ist in Abbildung 8–18b dargestellt und weist eine Volumenfüllung von $v_f = 10.97$ % auf. Die Optimierung wird außerdem jeweils für die Volumenrestriktionen $v_f \leq 8.75$ % und $v_f \leq 7.5$ % durchgeführt (vgl. Abbildungen 8–18d und 8–18f). Diese Ergebnisse sind in Tabelle 8–6 (Spalte: Optimierungsergebnis Schale Kratos) zusammengefasst. Durch die unterschiedlichen Volumenrestriktionen verändert sich auch bei der VMM die Kontur des Randes, wobei es zu starken Verzerrungen der Finiten Elemente kommt.

Die aufgeführten Volumenfüllungen werden als Restriktion für FET genutzt, wobei nur die Schalenrestriktion aktiv ist (keine Berücksichtigung minimaler Radien oder der Umformung). Die Ergebnisse der Black&White-Designs werden in Tabelle 8–6 (Spalte: Optimierungsergebnis Voxel OptiStruct®) aufgeführt.

Der Vergleich zwischen den Optimierungsergebnissen aus FET und der VMM erfolgt auf Schalenmodellen, die hauptsächlich aus Quads und nur wenigen Trias mit einer Elementkantenlänge $w = 0.5$ mm bestehen. Die Schalenmodelle werden mit OptiStruct® nachgerechnet, wobei der Schalenansatz nach Reissner und Mindlin verwendet wird. Dazu werden die Ergebnisse der VMM neu vernetzt, um Ungenauigkeiten durch Elementverzerrungen vorzubeugen. Die Ergebnisse aus FET werden händisch in Schalenmodelle umgewandelt, die die gleichen Netzparameter aufweisen. Alle Ergebnisse werden in Abbildung 8–18 gezeigt und sind in Tabelle 8–6 aufgeführt.

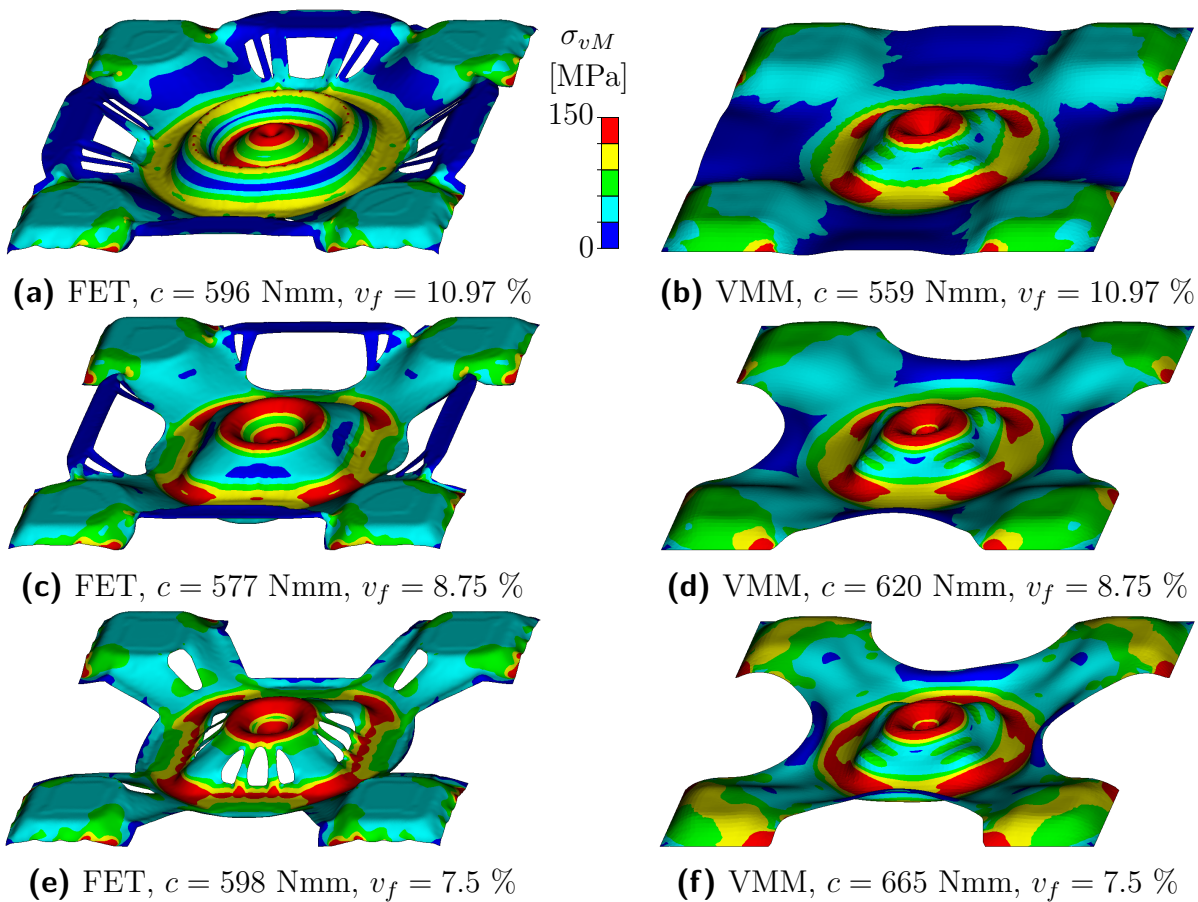


Abbildung 8–18: Quadratische Platte – Optimierungsergebnisse mit FET (links) und der Vertex Morphing Method (VMM, rechts), jeweils Nachrechnung als Schale in OptiStruct®

Auffällig ist die Abweichung zwischen Voxelergebnis und Schalennachrechnung bei FET und $v_f \leq 10.97$ %. Im Bereich um die Lasteinleitung weist die Voxelstruktur eine größere Dicke auf als die vorgegebenen $b = 2$ mm. Dies liegt daran, dass einige wenig belastete Strukturbereiche einen sehr geringen Beitrag zur Compliance

Tabelle 8–6: Quadratische Platte – Vergleich der optimierten Compliance [Nmm] in FET/SheetMetal mit der Formoptimierung der Vertex Morphing Method

Volumen- füllung [%]	Form- & Topologieoptimierung (FET)		Formoptimierung (Kratos)	
	Optimierungs- ergebnis Voxel OptiStruct®	Nachrechnung Schale OptiStruct®	Optimierungs- ergebnis Schale Kratos	Nachrechnung Schale OptiStruct®
10.97	486	596	523	559
8.75	500	577	584	620
7.5	542	598	631	665

leisten. Dadurch sind deren Sensitivitäten betragsmäßig kleiner als die bestrafte Sensitivitäten von Elementen nahe der Lasteinleitung, auch wenn deren Abstand zur Mittelfläche etwas größer als $\frac{b}{2} = 1$ mm ist. Durch die Umwandlung in eine Schalenstruktur mit konstanter Dicke $b = 2$ mm kommt es so zu einem abweichenden Strukturverhalten. Eine stärkere Bestrafung der Sensitivitäten der Zielfunktion durch eine Erhöhung des Bestrafungsfaktors a (vgl. Abbildung 5–2) kann hier Abhilfe schaffen.

Bei den geringeren Volumenrestriktionen weisen die Ergebnisse aus FET und der VMM ähnliche Formen der Mittelflächen auf. Durch die Möglichkeit der Topologieoptimierung, ist die Compliance der FET-Ergebnisse um 7-10 % besser. Abschließend werden die Methodiken aus FET und der VMM in Tabelle 8–7 verglichen. Sind geschlossene Strukturen gewünscht oder ist der Rechenaufwand beschränkt, ist die VMM die bessere Lösung. Für eine Iteration der quadratischen Platte werden mit FET 5-8 Minuten benötigt, mit der VMM nur eine Minute. Außerdem werden bei der VMM nur 50-65 Iterationen durchgeführt, bei FET zehn bis zwanzig mal so viele. Insbesondere bei sehr dünnwandigen Strukturen sorgt eine Voxeldiskretisierung für einen enormen Anstieg der Rechenzeit, da mindestens drei Elemente über die Wandstärke benötigt werden. In allen anderen Fällen kann FET aufgrund der Möglichkeit der Topologieänderung bessere Optimierungsergebnisse erreichen. Bei großen Formveränderungen kann es bei der VMM aufgrund von Elementverzerrungen zu Problemen kommen. Auch dann ist FET besser geeignet.

8.3 Querlenker

Als reale Anwendung wird ein Querlenker optimiert. Dieser ist ein Teil des Fahrwerks und führt den Radträger in nahezu vertikaler Richtung. Der Querlenker überträgt somit Querkräfte zwischen Rad und Karosserie. Dabei müssen die Betriebslasten ohne Überschreitung der Streckgrenze übertragen werden. Außerdem soll der Querlenker bei Missbrauchslasten in einem vorgegebenen Kraftkorridor ausbeulen. Die Beullast darf nicht zu hoch liegen, um die Karosserie nicht zu beschädigen, und nicht zu niedrig, um möglichst spät zu versagen.

Der aktuelle Entwicklungsstand des Querlenkers für die Vorderachse ist in Abbildung 8–19 dargestellt. Das Bauteil wiegt $m = 2.66$ kg. Das Lagerauge wird angeschweißt, daher ist es in der Optimierung als Non-Design-Bereich berücksichtigt. Zur Auslegung wurden die Beullastfälle mit nichtlinearen FE-Analysen berechnet. Dabei wurden auch nichtlineares Material und nichtlineare Gummilager

Tabelle 8–7: Vergleich der Optimierungsmethodik in FET/SheetMetal mit der Formoptimierung der Vertex Morphing Method

	FET/SheetMetal	Vertex Morphing Method
Optimierungspotential	großes Potential durch simultane Form- und Topologieoptimierung	geringeres Potential, da Topologie nicht geändert werden kann
Netzverzerrung	nicht relevant, da sich FE-Netz nicht ändert	Veränderung der Knotenkoordinaten kann zu verzerrten Elementen führen, dies kann in ungenauen oder nicht mehr rechenbaren FE-Modellen resultieren, ggf. Neuvernetzung nötig
Rechenzeit	große Rechenzeit einer FE-Rechnung aufgrund der vielen Freiheitsgrade des Voxelmodells	geringere Rechenzeit aufgrund der Schalendiskretisierung
Schalendicke	ungefähre Schalendicke wird vorgegeben	exakte Schalendicke wird vorgegeben
Diskretisierung	geringe Schalendicken bedingen feinere Diskretisierung und somit mehr Rechenzeit	Diskretisierung unabhängig von der Schalendicke
Interpretation	Elementdichten müssen als Schalenbauteil interpretiert werden	optimierte Schale kann direkt in CAD-Bauteil überführt werden
Herstellbarkeit	Tiefziehbarkeit kann berücksichtigt werden	keine Fertigungsrestriktion implementiert, da keine Einschränkung auf Fertigungsverfahren; maximale Krümmung durch Filterradius wählbar

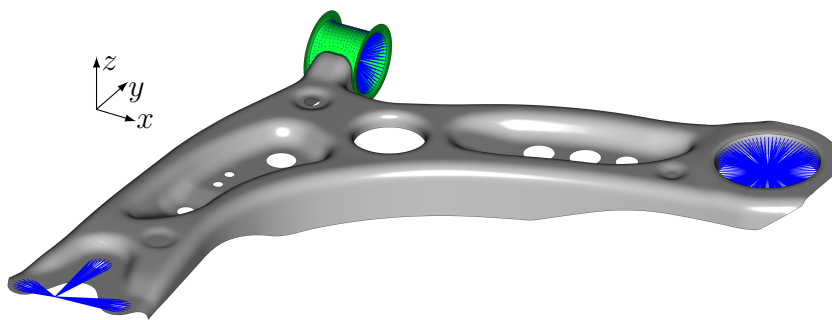


Abbildung 8–19: Querlenker – aktuelle Struktur, grün: angeschweißtes Lagerauge

berücksichtigt. Somit sind die Optimierungsergebnisse mit linearer Beulanalyse nicht exakt mit dem aktuellen Querlenker vergleichbar.

Der Bauraum ist in Abbildung 8–20 dargestellt. Die Bereiche um die Anbindungen der Starrkörperelemente und das Lagerauge werden als Non-Design-Bereiche definiert. Ziel der Optimierungen ist die Minimierung der Masse bei einer Restriktion der Spannung in sechs Betriebslastfällen und der Vorgabe einer minimalen Beullast in drei linearen Beullastfällen.

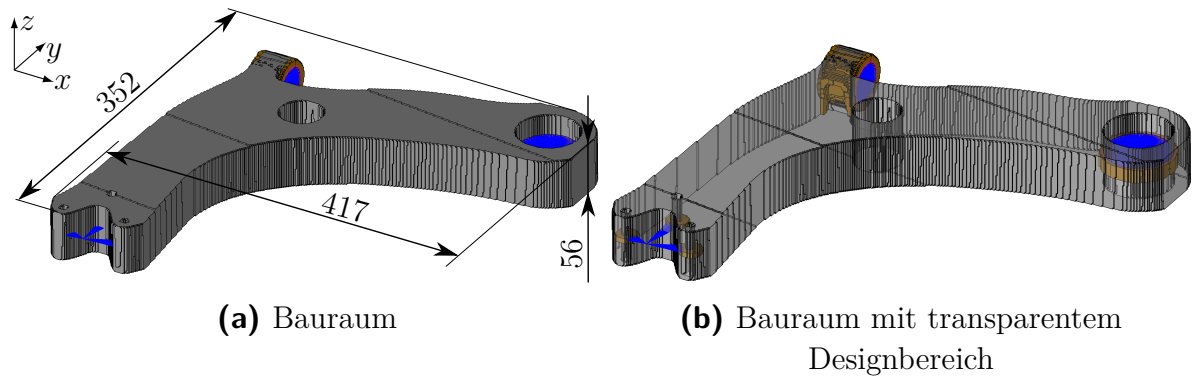


Abbildung 8–20: Querlenker – Bauraum und Lastangriffspunkte, blau: Starrkörperelemente (RBE2), grau: Designbereich, orange: Non-Design-Bereich

Der Querlenker besteht aus Stahl ($E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 7.85 \text{ gcm}^{-3}$). Die Elementkantenlänge wird als $w = 1.267 \text{ mm}$ gewählt, was zu 1.55 Mio. Voxeln führt, und der Filterradius beträgt $R = 1.8w$. Als Spannungsexponent wird $k = 10$ verwendet, als Exponent für die Norm der Beulsicherheiten $k = 12$. Es werden je Lastfall die 40 niedrigsten Beulsicherheiten berechnet.

Parallelisierung

Da die Beulanalysen eine große Rechenzeit benötigen und diese als Eigenwertprobleme separat voneinander berechnet werden müssen, werden die drei Beulanalysen simultan auf drei Rechenknoten mit jeweils zwei Intel Xeon E5-2650 8-Kern CPUs und 32 GB Arbeitsspeicher durchgeführt. Der Optimierungsablauf und die Dauer der einzelnen Optimierungsschritte sind anhand einer exemplarischen Iteration in Abbildung 8–21 gezeigt.

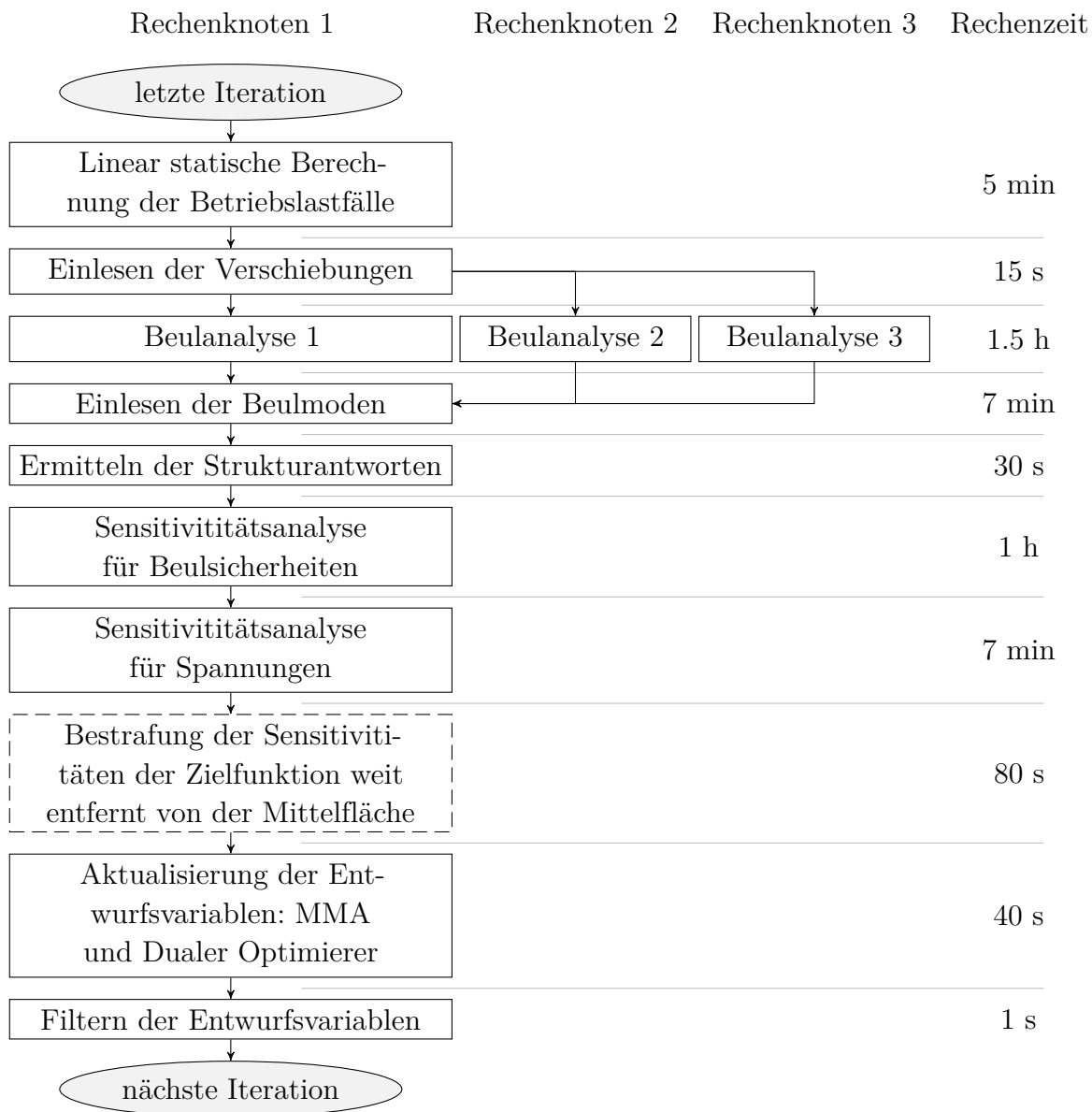


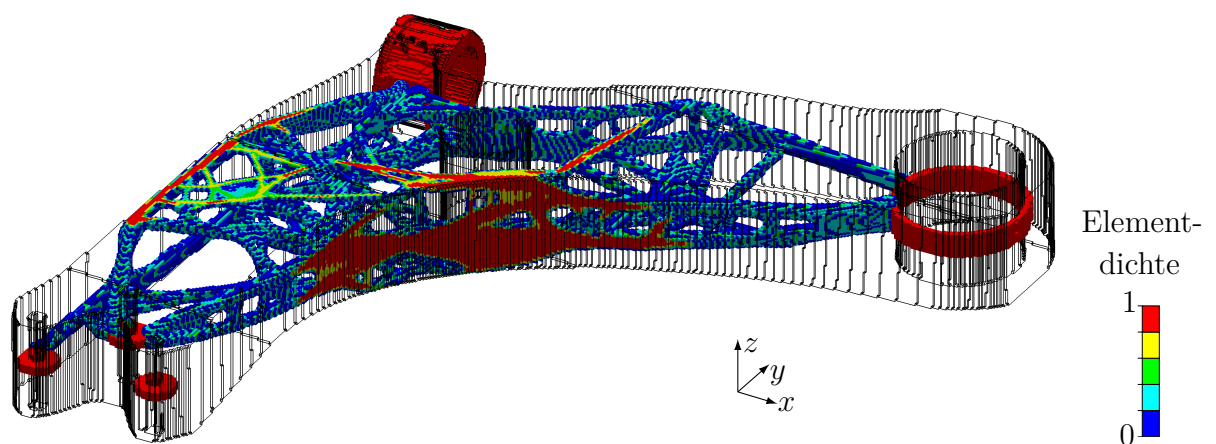
Abbildung 8–21: Querlenker – Parallelisierung der Optimierung, Iteration mit ca. 600 000 aktiven Elementen, Gesamtdauer der Iteration: 2.8 Stunden, nur für Schalenrestriktion: – –

8.3.1 Ohne Fertigungsrestriktion

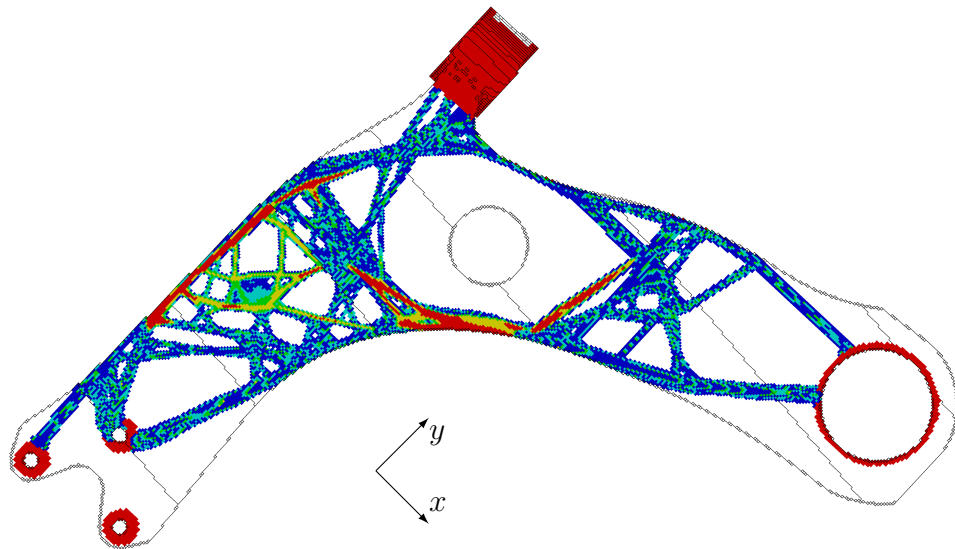
Die Optimierung wird mit uniformer Elementdichteverteilung $\tilde{x}_i = 0.2$ gestartet. Zunächst werden 120 Iterationen ohne Beulanalysen durchgeführt, um Rechenzeit zu sparen. Abbildung 8–21 zeigt, dass bei 600 000 Elementen eine Iteration mit Berücksichtigung des Beulens 2.8 Stunden dauert. Ohne Beulanalyse und Sensitivitätsanalyse für das Beulen reduziert sich die Rechenzeit auf 0.3 Stunden.

Die Anzahl aktiver Design-Elemente wird so in 120 Iterationen und 130 Stunden Rechenzeit von 1.52 Millionen auf 600 000 reduziert. Anschließend werden auch die Beulrestriktionen berücksichtigt.

Das Optimierungsergebnis wird in Abbildung 8–22 gezeigt. Nach weiteren 130 Iterationen und 80 Stunden Rechenzeit sind fünf Restriktionen aktiv. Dies sind drei Spannungsrestriktionen und zwei Beulrestriktionen. Die Masse des optimierten Bauteils beträgt $m = 1.09$ kg (Design- und Non-Design-Bereich). Ein Befestigungspunkt (in Abbildung 8–22b links unten) weist keine Verbindung mehr zur Struktur auf. Damit ist diese Verschraubung aus mechanischer Sicht nicht notwendig.



(a) Elementdichten,
nur Elemente mit $\tilde{x}_i > 0.1$ und Bauraumkontur abgebildet



(b) Draufsicht,
nur Elemente mit $\tilde{x}_i > 0.1$ und Bauraumkontur abgebildet

Abbildung 8–22: Optimierungsergebnis – Querlenker ohne Schalenrestriktion

8.3.2 Mit Fertigungsrestriktion für Schalenstruktur

Für die Fertigungsrestriktion wird eine Wandstärke von $b_f = 3w = 3.8$ mm und als Stempelrichtung z vorgegeben. Der aktuelle Querlenker wird entgegen der z -Richtung abgekantet, d.h. der Bauteilrand wird mit geringem Umformradius gebogen. Um dies zu berücksichtigen, werden analog zu Abbildung 8–9 zusätzliche Non-Design-Elemente am Bauraumrand hinzugefügt, die eine Vorzugsrichtung vorgeben. Als Startdesign wird der aktuelle Querlenker verwendet. Dies zeigt Abbildung 8–23.

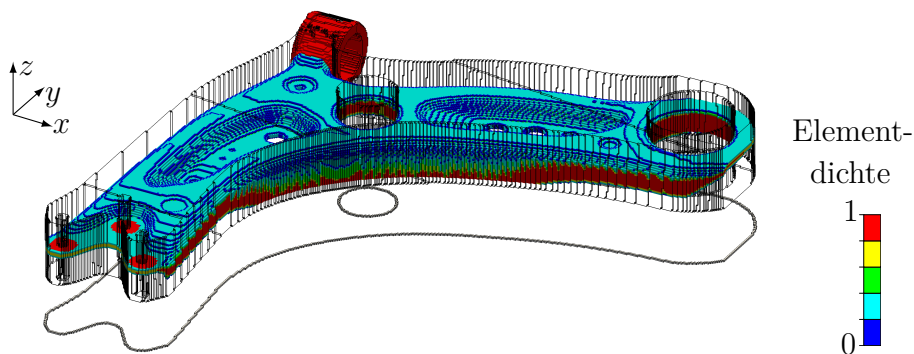
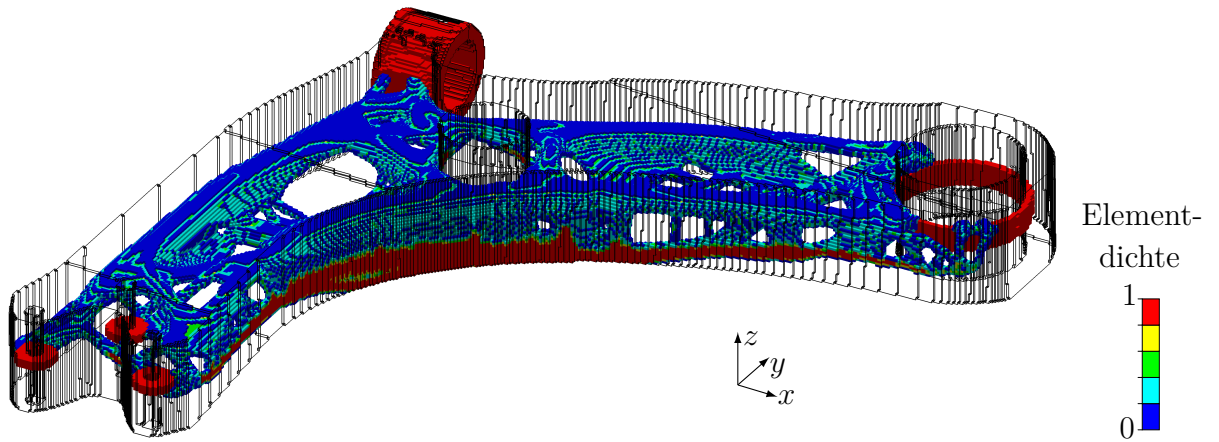


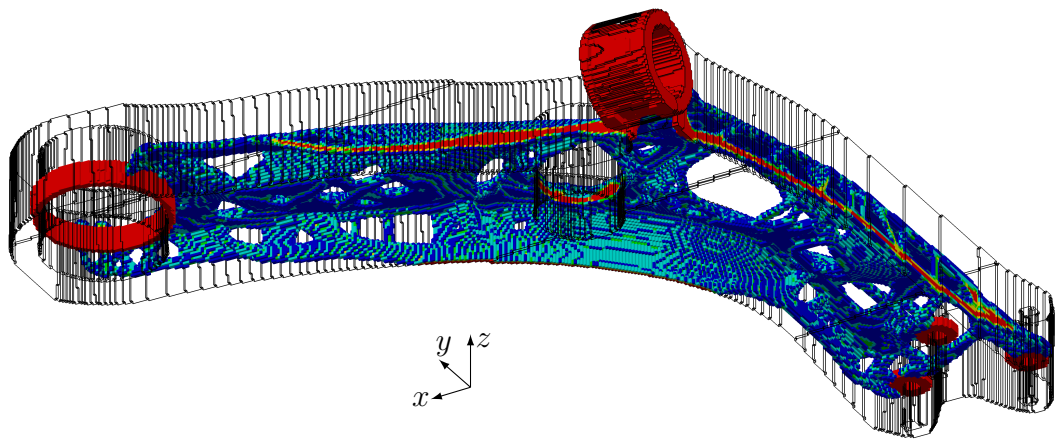
Abbildung 8–23: Initiales Design für Optimierung mit Schalenrestriktion, nur Elemente mit $\tilde{x}_i > 0.1$ und Bauraumkontur abgebildet, grau: zusätzliche Non-Design-Elemente am Bauraumrand für Vorzugsrichtung

Abbildung 8–24 zeigt das Optimierungsergebnis mit aktiver Schalenrestriktion. In diesem Ergebnis sind in zwei Lastfällen die Spannungsrestriktionen aktiv sowie in einer Beulanalyse die Beulrestriktionen. Die Masse aus Design- und Non-Design-Bereich beträgt $m = 1.55$ kg. 193 Iterationen wurden berechnet. Die gesamte Optimierung benötigte 165 Stunden.

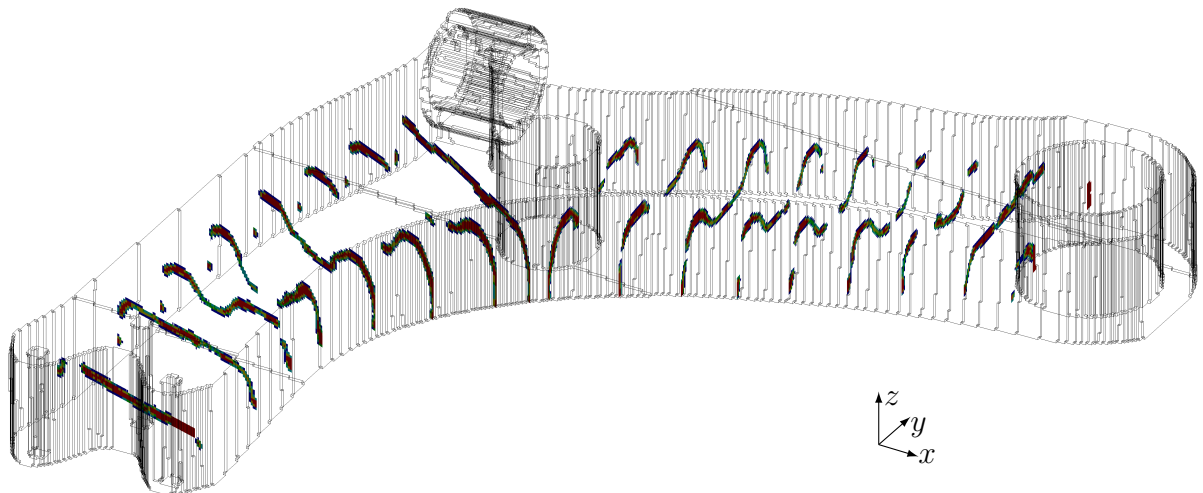
Im Vergleich zum initialen Design haben sich sowohl Topologie als auch Form des Querlenkers so verändert, dass sich die Masse im Vergleich zum aktuellen Querlenker um 41 % verringert hat. Im Vergleich zum Optimierungsergebnis ohne Schalenrestriktion hat sich die Masse um 42 % erhöht.



(a) Elementdichten, nur Elemente mit $\tilde{x}_i > 0.1$ abgebildet



(b) Elementdichten, nur Elemente mit $\tilde{x}_i > 0.1$ abgebildet, rotiert



(c) Schnitte, nur Elemente mit $\tilde{x}_i > 0.1$ abgebildet

Abbildung 8–24: Optimierungsergebnis – Querlenker mit Schalenrestriktion

9 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Dissertation wurde eine neue Optimierungsmethodik für die simultane Form- und Topologieoptimierung von tiefziehbaren Blechstrukturen vorgestellt. Dabei können Schalenbauteile hinsichtlich ihrer Masse, Volumen, Steifigkeit, Verschiebung an ausgewählten Punkten, Festigkeit, Eigenfrequenz und linearer Beulsicherheit optimiert werden. Die Herstellbarkeit kann berücksichtigt werden, sodass eine einstufige Tiefziehbarkeit gewährleistet ist. Dabei kann der minimale Umformradius vorgegeben werden und auch die zulässige Wahrscheinlichkeit, dass beim Tiefziehen Reißen auftreten. Zur Berechnung des Risskriteriums wurde eine Tiefziehsimulation in die Optimierung integriert. Auch die Optimierung von mehrschaligen Bauteilen wurde ermöglicht.

Als Optimierungsansatz wurde die gradientenbasierte Dichtemethode gewählt. Zur Reduktion des Berechnungsaufwandes wurde u.a. eine Elementdeaktivierung implementiert. Die Umsetzung der Fertigungsrestriktionen erfolgte durch die heuristische Manipulation der Sensitivitäten der Zielfunktion. Diese Optimierungsmethodik kann neben dem Tiefziehen auch auf ähnliche Fertigungsverfahren wie das Streckziehen und das Prägen angewendet werden.

Durch die frühzeitige Berücksichtigung der Bauteilperformance und der Herstellbarkeit müssen keine weiteren händischen Bauteilanpassungen nach der Optimierung durchgeführt werden, die in einem suboptimalen Design enden würden. Dadurch wird auch die Zeit für den Entwicklungszyklus drastisch verringert.

Die Umsetzung der Optimierungsmethodik erfolgte als C++-Programm *FET* (Finite Element based Topology optimization) mit dem Modul *FET/SheetMetal* für die Fertigungsrestriktionen. Der gesamte Programmcode wurde im Rahmen der Dissertation entwickelt. Zur Struktursimulation können gebräuchliche externe FE-Solver verwendet werden. Für die Tiefziehsimulation wurde der kommerzielle Solver AutoForm-OneStep[®] verwendet. Außer der Tiefziehsimulation sind alle Funktionalitäten im eigenen Programmcode enthalten.

Im letzten Kapitel wurde die effiziente Anwendbarkeit der Methode auf einige akademische und ein reales Beispiel gezeigt. In allen Beispielen entstehen optimierte Strukturen, deren Tragprinzip nachvollziehbar ist und die die mechanischen

Restriktionen und Fertigungsrestriktionen erfüllen. Im Vergleich zur Optimierung ohne Fertigungsrestriktion steigt der Rechenaufwand durch eine größere Anzahl an Iterationen und ggf. zusätzliche Tiefziehsimulationen, sodass eine bis zu 10-fache Rechenzeit erforderlich ist.

Eine Möglichkeit zur Effizienzsteigerung ist die Verwendung eines möglichst guten initialen Designs, das beispielsweise aus einer Formoptimierung mit der Vertex Morphing Method stammt.

Vielfältige Erweiterungen erscheinen zielführend. Die Fertigungsrestriktion kann auf ähnliche Umformverfahren wie Innenhochdruckumformen erweitert werden. Des Weiteren kann die Bestrafungsfunktion für Schalenstrukturen ohne Hinterschnitte auf beliebige Zielfunktionen angepasst werden. Auch die Erweiterung auf Blechkonstruktionen mit mehr als zwei Schalen ist analog zur Optimierung zweischaliger Strukturen möglich. Für die Tiefziehbarkeit ist eine weitere Heuristik für die Vermeidung von Faltenbildung wünschenswert, die mit einer realitätsnäheren inkrementellen Tiefziehsimulation vorhersagbar ist. Die Fertigungsrestriktion kann analog zum Risskriterium auch auf andere Tiefziehergebnisse wie die Ausdünnung des Bleches übertragen werden.

Prinzipielle Verbesserungen sind durch einen automatisierten Aufbau eines CAD-Modells aus dem Optimierungsergebnis möglich. Dieses CAD-Modell wird für die abschließende Werkzeugsimulation und Konstruktion benötigt. Eine automatisierte Anpassung der Herstellungsparameter, der finalen Wandstärke und der Auszugsrichtung während der Optimierung kann zu verbesserten Optimierungsergebnissen führen bzw. verringert den Optimierungsaufwand. Aktuell bedingt ein veränderter Herstellungsparameter eine neue Optimierung.

Eine weitere Verbesserung kann durch die Berücksichtigung der Ausdünnung, Verfestigung und Eigenspannung infolge der Umformung im Strukturverhalten des Bauteils erreicht werden.

Die in dieser Arbeit vorgestellte Methodik erlaubt die Optimierung von Blechbauteilen inklusive Aussparungen. Die industrielle Anwendung ist bereits in der Optimierungsumgebung der Volkswagen AG möglich. Die in diesem Kapitel aufgeführten Erweiterungsmöglichkeiten können die praktische Anwendung im industriellen Umfeld noch attraktiver machen.

Literaturverzeichnis

- Allaire G, Jouve F, Michailidis G (2013) Casting constraints in structural optimization via a level-set method. In: *Proceedings of the 10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*. Orlando, Florida
- Ansola R, Canales J, Tarrago JA, Rasmussen J (2002) On simultaneous shape and material layout optimization of shell structures. *Struct Multidiscip Optim* 24: 175–184
- Bathe KJ (2014) *Finite element procedures*. 2. Aufl. K.J. Bathe, Watertown, MA
- Baumgartner A, Harzheim L, Mattheck C (1992) SKO (soft kill option): the biological way to find an optimum structure topology. *Int J Fatigue* 14: 387–393
- Bendsøe MP (1989) Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural optimization* 1: 193–202
- Bendsøe MP, Kikuchi N (1988) Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method. *Comput Methods Appl Mech Eng* 71: 197–224
- Bendsøe MP, Sigmund O (2004) *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Springer, Berlin Heidelberg New York
- Bletzinger K-U (2014) A consistent frame for sensitivity filtering and the vertex assigned morphing of optimal shape. *Struct Multidiscip Optim* 49: 873–895
- Bletzinger K-U, Hojjat M, Stavropoulou E (2015) Form finding by shape optimization with the Vertex Morphing Method – About the equivalence of sensitivity filtering and standard spline models. In: *Proceedings of the 11th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*. Sydney, Australia
- Bourdin B (2001) Filters in topology optimization. *Int J Numer Methods Eng* 50: 2143–2158

- Braibant V, Fleury C, Beckers P (1983) *Shape Optimal Design: An approach matching C.A.D. and optimization concepts*. Report SA 109. Liege, Belgium: Aerospace Laboratory
- Browne PA (2013) *Topology Optimization of Linear Elastic Structures*. Diss. University of Bath
- Bruns TE, Tortorelli DA (2001) Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. *Comput Methods Appl Mech Eng* 190: 3443–3459
- Bruns TE, Tortorelli DA (2003) An element removal and reintroduction strategy for the topology optimization of structures and compliant mechanisms. *Int J Numer Methods Eng* 57: 1413–1430
- Dems K (1991) First- and second-order shape sensitivity analysis of structures. *Struct Optim* 3: 79–88
- Dienemann R, Schumacher A, Fiebig S (2015) Topology optimization considering the requirements of deepdrawn sheet metals. In: *Proceedings of the 11th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*. Sydney, Australia
- Dienemann R, Schumacher A, Fiebig S (2016) Topology and Shape Optimization of Sheet Metals with integrated Deep-Drawing-Simulation. In: *Proceedings of the 12th World Congress on Computational Mechanics*. Seoul, Korea
- Dienemann R, Schumacher A, Fiebig S (2017) Topology optimization for finding shell structures manufactured by deep drawing. *Struct Multidiscip Optim* 56: 473–485
- Dienemann R, Schumacher A (2016) An efficient optimization method for mechanical shells considering cut-outs. *Proc Appl Math Mech* 16: 713–714
- Dienemann R, Schumacher A, Fiebig S (2018) An Element Deactivation and Reactivation Scheme for the Topology Optimization Based on the Density Method. In: *Advances in Structural and Multidisciplinary Optimization: Proceedings of the 12th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO12)*. Hrsg. von A Schumacher, T Vietor, S Fiebig, K-U Bletzinger, K Maute. Springer International Publishing: 1127–1142.
- DIN 8584 (2003) *Fertigungsverfahren Zugdruckumformen - Teil 3: Tiefziehen; Einordnung, Unterteilung, Begriffe*.

- Du J, Olhoff N (2007) Topological design of freely vibrating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps. *Struct Multidiscip Optim* 34: 91–110
- Eschenauer HA, Kobelev VV, Schumacher A (1994) Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Struct Optim* 8: 42–51
- Fiebig S (2016) Form- und Topologieoptimierung mittels Evolutionärer Algorithmen und heuristischer Strategien. Diss. TU Braunschweig, Logos Verlag
- Fleury C (1989) CONLIN: An efficient dual optimizer based on convex approximation concepts. *Struct Optim* 1: 81–89
- Franke T (2018) Fertigungsgerechte Bauteilgestaltung in der Topologieoptimierung auf Grundlage einer integrierten Gießsimulation. Diss. TU Braunschweig
- Guest JK, Prévost JH, Belytschko T (2004) Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. *Int J Numer Methods Eng* 61: 238–254
- Guo YQ, Batoz JL, Detraux JM, Duroux P (1990) Finite element procedures for strain estimations of sheet metal forming parts. *Int J Numer Methods Eng* 30: 1385–1401
- Harzheim L (2014) *Strukturoptimierung: Grundlagen und Anwendungen*. 2. Aufl. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten
- Harzheim L, Graf G (2005) A review of optimization of cast parts using topology optimization. *Struct Multidiscip Optim* 30: 491–497
- Hassani B, Tavakkoli SM, Ghasemnejad H (2013) Simultaneous shape and topology optimization of shell structures. *Struct Multidiscip Optim* 48: 221–233
- Hojjat M, Stavropoulou E, Bletzinger K-U (2014) The Vertex Morphing method for node-based shape optimization. *Comput Methods Appl Mech Eng* 268: 494–513
- Hosford WF, Caddell RM (2007) *Metal Forming - Mechanics and Metallurgy*. Cambridge University Press, Cambridge New York Melbourne Madrid Cape Town Singapore São Paulo
- Kennedy GJ (2015) Large-scale Multi-material Topology Optimization for Additive Manufacturing. In: *Proceedings of the 56th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. Kissimmee, Florida

- Kreisselmeier G, Steinhauser R (1979) Systematic Control Design by Optimizing a Vector Performance Index. *IFAC Proceedings Volumes* 12: 113–117
- Kubli W, Anderheggen E, Reissner J (1991) Nonlinear solver with uncoupled bending and stretching deformation for simulating thin sheet metal forming. *VDI-Bericht* 894: 325–343
- Kuhn HW, Tucker AW (1951) Nonlinear Programming. In: *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. University of California Press, Berkeley, Calif.: 481–492
- Lazarov BS, Sigmund O (2011) Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations. *Int J Numer Methods Eng* 86: 765–781
- Le C, Norato J, Bruns T, Ha C, Tortorelli D (2010) Stress-based topology optimization for continua. *Struct Multidiscip Optim* 41: 605–620
- Lochner-Aldinger I (2009) Entwurfsstrategien - Formentwicklungskonzepte im konstruktiven Ingenieurbau des 20. Jahrhunderts. Diss. Universität Stuttgart
- Lochner-Aldinger I, Schumacher A (2014) Homogenization method. Hrsg. von S Adriaenssens, P Block, D Veenendaal, C Williams. *Shell Structures for Architecture: Form Finding and Optimization*. Taylor & Francis - Routledge, London
- Love AEH (1888) XVI. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. *Philos Trans R Soc London, Ser A* 179: 491–546
- Michell A (1904) The limits of economy of material in frame-structures. *Philos Mag, Series 6*, 8: 589–597
- Mindlin RD (1951) Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J Appl Mech* 18: 31–38
- Neugebauer R, Herfurth K (2001) Near-Net-Shape Processes. Hrsg. von G Salvendy. *Handbook of Industrial Engineering - Technology and Operations Management*. John Wiley & Sons, New York Chichester Weinheim Brisbane Singapore Toronto
- Neves MM, Rodrigues H, Guedes JM (1995) Generalized topology design of structures with a buckling load criterion. *Struct Optim* 10: 71–78
- Ortmann C (2015) Entwicklung eines graphen- und heuristikbasierten Verfahrens zur Topologieoptimierung von Profilquerschnitten für Crashlastfälle. Diss. Bergische Universität Wuppertal, Shaker Verlag

- Osher S, Sethian JA (1988) Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J Comp Phys* 79: 12–49
- Petersen C (2013) *Stahlbau: Grundlagen der Berechnung und baulichen Ausbildung von Stahlbauten*. Springer Fachmedien, Wiesbaden
- Rahmatalla S, Swan CC (2003) Form Finding of Sparse Structures with Continuum Topology Optimization. *J Struct Eng* 129: 1707–1716
- Reissner E (1945) The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J Appl Mech* 12: A68–A77
- Rojas-Labanda S, Stolpe M (2015) Benchmarking optimization solvers for structural topology optimization. *Struct Multidiscip Optim* 52: 527–547
- Roll K, Wiegand K, Hora P (2008) Benchmark 2 – Influence of Drawbeads on the Springback Behaviour («S-RAIL-08»). Hrsg. von IfVP Eidgenössische Technische Hochschule Zürich. *Numisheet 2008*. Taylor & Francis - Routledge, Zürich
- Schumacher A (2013) *Optimierung mechanischer Strukturen - Grundlagen und industrielle Anwendungen*. 2. Aufl. Springer, Berlin Heidelberg New York
- Sethian J, Wiegmann A (2000) Structural Boundary Design via Level Set and Immersed Interface Methods. *J Comp Phys* 163: 489–528
- Shimoda M, Liu Y (2014) A non-parametric free-form optimization method for shell structures. *Struct Multidiscip Optim* 50: 409–423
- Siegert K (2015) *Blechumformung - Verfahren, Werkzeuge und Maschinen*. Springer, Berlin Heidelberg
- Sigmund O (2001) A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Struct Multidiscip Optim* 21: 120–127
- Sigmund O (2007) Morphology-based black and white filters for topology optimization. *Struct Multidiscip Optim* 33: 401–424
- Sigmund O, Maute K (2013) Topology optimization approaches. *Struct Multidiscip Optim* 48: 1031–1055
- Sigmund O, Aage N, Andreassen E (2016) On the (non-)optimality of Michell structures. *Struct Multidiscip Optim* 54: 361–373

- Sokołowski J, Żochowski A (1999) On the Topological Derivative in Shape Optimization. *SIAM J Control Optim* 37: 1251–1272
- Steinbeck-Behrens C, Menke T, Steinbeck J, Schroeder M, Duan H, Hoffmann A, Brylla U, Kulp S, Pinner S, Rambke M, Leck L, Awiszus B, Bolick S, Katzenberger J, Schulz M, Runde C, Czaykowska A, Mager K (2012) *Durchgängige Virtualisierung der Entwicklung und Produktion von Fahrzeugen (VIPROF)*. BMBF Bericht. Karlsruhe, Deutschland: Projektträger Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
- Stolpe M, Svanberg K (2001) An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. *Struct Multidiscip Optim* 22: 116–124
- Svanberg K (1987) The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *Int J Numer Methods Eng* 24: 359–373
- Svanberg K (2002) A Class of Globally Convergent Optimization Methods Based on Conservative Convex Separable Approximations. *SIAM J Optim* 12: 555–573
- Wifi A, Abdelmaguid T, El-Ghandour A (2007) A review of the optimization techniques applied to the Deep Drawing process. In: *Proceedings of the 37th International Conference on Computers and Industrial Engineering*. Alexandria, Egypt
- Wong L (1999) Assessment of Forming Strains in a Sheet Metal Component. In: *HyperWorks Technology Showcase Conference Proceedings*. London, UK
- Wriggers P (2001) *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer, Berlin Heidelberg
- Xia Q, Shi T, Wang MY, Liu S (2010) A level set based method for the optimization of cast part. *Struct Multidiscip Optim* 41: 735–747
- Xie Y, Steven G (1993) A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Comput Struct* 49: 885–896
- Young V, Querin OM, Steven GP, Xie YM (1999) 3D and multiple load case bi-directional evolutionary structural optimization (BESO). *Struct Optim* 18: 183–192
- Zhou M, Rozvany G (1991) The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization. *Comput Methods Appl Mech Eng* 89: 309–336

-
- Zhou M, Fleury R, Patten S, Stannard N, Mylett D, Gardner S (2011) Topology Optimization - Practical Aspects for Industrial Applications. In: *Proceedings of the 9th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*. Shizuoka, Japan
- Zienkiewicz OC, Campbell JS (1973) Shape optimization and sequential linear programming. Hrsg. von RH Gallagher, OC Zienkiewicz. *Optimum structural design*. John Wiley & Sons, London

Anhang A

Herleitung der Sensitivitäten

A.1 Compliance

Die Compliance ist gleich der Dehnungsenergie

$$c = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{u}. \quad (\text{A-1})$$

Die Sensitivität der Compliance ergibt unter Anwendung der Kettenregel

$$\frac{\partial c}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \frac{\partial c}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{u}. \quad (\text{A-2})$$

Das statische Gleichgewicht ist entsprechend Gleichung 2-8

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{p}. \quad (\text{A-3})$$

Die Differentiation des statischen Gleichgewichts $\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}$ ergibt

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}. \quad (\text{A-4})$$

Damit ist

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{u} \right). \quad (\text{A-5})$$

Einsetzen der Gleichungen A-3 und A-5 in Gleichung A-2 ergibt

$$\frac{\partial c}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K}^T \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{u} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{u}. \quad (\text{A-6})$$

Da die Steifigkeitsmatrix symmetrisch ist ($\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$) gilt

$$\frac{\partial c}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{u} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{u} \right). \quad (\text{A-7})$$

Beim SIMP-Ansatz gilt für die Assemblierung analog zu Gleichung 2–7

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N_E} \tilde{x}_i^s \mathbf{A}_{Ei}^T \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{A}_{Ei} \quad (\text{A-8})$$

und mit $\mathbf{u}_{Ei} = \mathbf{A}_{Ei} \mathbf{u}$ ergibt sich

$$\frac{\partial c}{\partial \tilde{x}_i} = \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tilde{x}_i} - \frac{1}{2} s \tilde{x}_i^{s-1} \mathbf{u}_{Ei}^T \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{u}_{Ei}. \quad (\text{A-9})$$

Bei konstantem Lastvektor $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{0}$ gilt

$$\frac{\partial c}{\partial \tilde{x}_i} = -\frac{1}{2} s \tilde{x}_i^{s-1} \mathbf{u}_{Ei}^T \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{u}_{Ei}. \quad (\text{A-10})$$

A.2 Knotenverschiebung

Die Verschiebung eines Knotens in eine Koordinatenrichtung wird geschrieben als

$$u_j = \mathbf{e}_j^T \mathbf{u} \quad (\text{A-11})$$

mit dem Einheitsvektor \mathbf{e}_j , der den einzigen Eintrag am betrachteten Freiheitsgrad j hat. Die Sensitivität ergibt sich als

$$\frac{\partial u_j}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{e}_j^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}. \quad (\text{A-12})$$

Einsetzen von Gleichung A–5 ergibt

$$\frac{\partial u_j}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{e}_j^T \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{u} \right). \quad (\text{A-13})$$

Mit der Abkürzung $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{e}_j$, die eine zusätzliche Lösung des FE-Gleichungssystems bedeutet, erhält man

$$\frac{\partial u_j}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \boldsymbol{\kappa}^T \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{u} \right). \quad (\text{A-14})$$

Mit dem SIMP-Ansatz aus Gleichung A–8 ergibt sich

$$\frac{\partial u_j}{\partial \tilde{x}_i} = \boldsymbol{\kappa}^T \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tilde{x}_i} - s \tilde{x}_i^{s-1} (\mathbf{A}_{Ei} \boldsymbol{\kappa})^T \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{u}_{Ei}. \quad (\text{A-15})$$

Bei konstantem Lastvektor $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{0}$ gilt

$$\frac{\partial u_j}{\partial \tilde{x}_i} = -s \tilde{x}_i^{s-1} (\mathbf{A}_{Ei} \boldsymbol{\kappa})^T \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{u}_{Ei} \quad (\text{A-16})$$

mit $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{e}_j$.

A.3 Vergleichsspannung

Die Norm für die von-Mises-Spannungen in einer beliebigen Menge an Elementen N_S lautet

$$\sigma_k = \left[\sum_{j=1}^{N_S} \sigma_{vM_j}^{rel\ k} \right]^{1/k} \quad (\text{A-17})$$

mit der relaxierten Spannung $\sigma_{vM_j}^{rel} = \tilde{x}_j^{-q} \sigma_{vM_j}$. Die Kettenregel liefert für die Sensitivitäten

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial \tilde{x}_i} = \left[\sum_{j=1}^{N_S} \sigma_{vM_j}^{rel\ k} \right]^{1/k-1} \left[\sum_{j=1}^{N_S} \sigma_{vM_j}^{rel\ k-1} \frac{\partial \sigma_{vM_j}^{rel}}{\partial \tilde{x}_i} \right] = \sigma_k^{1-k} \left[\sum_{j=1}^{N_S} \sigma_{vM_j}^{rel\ k-1} \frac{\partial \sigma_{vM_j}^{rel}}{\partial \tilde{x}_i} \right] \quad (\text{A-18})$$

Die von-Mises-Spannung ergibt sich aus $\sigma_{vM_j}(\tilde{x}_j, \mathbf{u}_{Ej}(\tilde{\mathbf{x}})) = \tilde{x}_j^s \sqrt{\mathbf{u}_{Ej}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_{Ej}}$. Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{vM_j}^{rel}}{\partial \tilde{x}_i} &= -\delta_{ij} q \tilde{x}_j^{-q-1} \sigma_{vM_j} + \tilde{x}_j^{-q} \left(\frac{\partial \sigma_{vM_j}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{\partial \sigma_{vM_j}}{\partial \mathbf{u}_{Ei}} \frac{\partial \mathbf{u}_{Ei}}{\partial \tilde{x}_i} \right) \\ &= -\delta_{ij} q \tilde{x}_j^{-q-1} \sigma_{vM_j} + \tilde{x}_j^{-q} \left(\delta_{ij} s \tilde{x}_j^{s-1} \sqrt{\mathbf{u}_{Ei}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_{Ei}} + \frac{\partial \sigma_{vM_j}}{\partial \mathbf{u}_{Ej}} \frac{\partial \mathbf{u}_{Ej}}{\partial \tilde{x}_i} \right) \\ &= \delta_{ij} (s - q) \frac{\sigma_{vM_j}^{rel}}{\tilde{x}_j} + \tilde{x}_j^{s-q} \frac{\mathbf{u}_{Ej}^T \mathbf{M}_0}{\sqrt{\mathbf{u}_{Ej}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_{Ej}}} \mathbf{A}_{Ej} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tilde{x}_i} \\ &= \delta_{ij} (s - q) \frac{\sigma_{vM_j}^{rel}}{\tilde{x}_j} + \tilde{x}_j^{2(s-q)} \frac{\mathbf{u}_{Ej}^T \mathbf{M}_0}{\sigma_{vM_j}^{rel}} \mathbf{A}_{Ej} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tilde{x}_i} \end{aligned} \quad (\text{A-19})$$

mit dem Kronecker-Delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Durch Einsetzen von Gleichung A-5 erhält man

$$\frac{\partial \sigma_{vM_j}^{rel}}{\partial \tilde{x}_i} = \delta_{ij} (s - q) \frac{\sigma_{vM_j}^{rel}}{\tilde{x}_j} + \tilde{x}_j^{2(s-q)} \frac{\mathbf{u}_{Ej}^T \mathbf{M}_0}{\sigma_{vM_j}^{rel}} \mathbf{A}_{Ej} \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tilde{x}_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{x}_i} \mathbf{u} \right). \quad (\text{A-20})$$

Mit dem SIMP-Ansatz aus Gleichung A-8 ergibt sich

$$\frac{\partial \sigma_{vM_j}^{rel}}{\partial \tilde{x}_i} = \delta_{ij} (s - q) \frac{\sigma_{vM_j}^{rel}}{\tilde{x}_j} + \tilde{x}_j^{2(s-q)} \frac{\mathbf{u}_{Ej}^T \mathbf{M}_0}{\sigma_{vM_j}^{rel}} \mathbf{A}_{Ej} \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tilde{x}_i} - s \tilde{x}_i^{s-1} \mathbf{A}_{Ei}^T \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{u}_{Ei} \right)$$

$$(A-21)$$

und unter der Annahme eines konstanten Lastvektors vereinfacht sich dies zu

$$\frac{\partial \sigma_{vM_j}^{rel}}{\partial \tilde{x}_i} = \delta_{ij} (s - q) \frac{\sigma_{vM_j}^{rel}}{\tilde{x}_j} - s \tilde{x}_i^{s-1} \tilde{x}_j^{2(s-q)} \frac{\mathbf{u}_{Ej}^T \mathbf{M}_0}{\sigma_{vM_j}^{rel}} \mathbf{A}_{Ej} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}_{Ei}^T \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{u}_{Ei}. \quad (A-22)$$

Durch Einsetzen in Gleichung A-18 folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_k}{\partial \tilde{x}_i} = \sigma_k^{1-k} \cdot & \left[\delta_{is} (s - q) \frac{\sigma_{vM_i}^{rel \ k}}{\tilde{x}_i} \right. \\ & \left. - s \tilde{x}_i^{s-1} \sum_{j=1}^{N_S} \left(\tilde{x}_j^{2(s-q)} \sigma_{vM_j}^{rel \ k-2} \mathbf{u}_{Ej}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{A}_{Ej} \right) \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}_{Ei}^T \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{u}_{Ei} \right] \end{aligned} \quad (A-23)$$

mit dem Kronecker-Delta

$$\delta_{is} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \in N_S, \text{ also wenn } i \text{ ein Element der Spannungsnorm ist.} \\ 0 & \text{falls } i \notin N_S, \text{ also wenn } i \text{ kein Element der Spannungsnorm ist.} \end{cases}$$

Somit kann dies zusammengefasst werden zu

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial \tilde{x}_i} = \sigma_k^{1-k} \left[\delta_{is} (s - q) \frac{\sigma_{vM_i}^{rel \ k}}{\tilde{x}_i} - \tilde{x}_i^{s-1} (\mathbf{A}_{Ei} \boldsymbol{\kappa})^T \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{u}_{Ei} \right] \quad (A-24)$$

mit dem Pseudolastfall

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa} &= s \mathbf{K}^{-1} \sum_{j=1}^{N_S} \left(\tilde{x}_j^{2(s-q)} \sigma_{vM_j}^{rel \ k-2} \mathbf{u}_{Ej}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{A}_{Ej} \right)^T \\ &= s \mathbf{K}^{-1} \sum_{j=1}^{N_S} \left(\tilde{x}_j^{2(s-q)} \sigma_{vM_j}^{rel \ k-2} \mathbf{A}_{Ej}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{u}_{Ej} \right). \end{aligned} \quad (A-25)$$

Umfasst die Norm der von-Mises-Spannungen genau den Bauraum ($N_S = N_D$), so sind alle $\delta_{is} = 1$ und somit

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial \tilde{x}_i} = \sigma_k^{1-k} \left((s - q) \frac{\sigma_{vM_i}^{rel \ k}}{\tilde{x}_i} - \tilde{x}_i^{s-1} (\mathbf{A}_{Ei} \boldsymbol{\kappa})^T \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{u}_{Ei} \right). \quad (A-26)$$

A.4 Eigenfrequenz

Bei der Modalanalyse

$$(\mathbf{K} - \psi_j \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi}_j = \mathbf{0} \quad (\text{A-27})$$

werden die Eigenwerte ψ_j und die Eigenformen $\boldsymbol{\varphi}_j$ ermittelt. Die Sensitivitäten der Eigenwerte ergeben sich aus der Differentiation der Modalanalyse

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} [\mathbf{K} - \psi_j \mathbf{M}] \boldsymbol{\varphi}_j + [\mathbf{K} - \psi_j \mathbf{M}] \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j}{\partial \tilde{x}_i} &= \mathbf{0} \\ &= \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{x}_i} - \frac{\partial \psi_j}{\partial \tilde{x}_i} \mathbf{M} - \psi_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \tilde{x}_i} \right] \boldsymbol{\varphi}_j + [\mathbf{K} - \psi_j \mathbf{M}] \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j}{\partial \tilde{x}_i} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (\text{A-28})$$

Die Multiplikation mit $\boldsymbol{\varphi}_j^T$ ergibt

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{x}_i} - \frac{\partial \psi_j}{\partial \tilde{x}_i} \mathbf{M} - \psi_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \tilde{x}_i} \right] \boldsymbol{\varphi}_j + \boldsymbol{\varphi}_j^T [\mathbf{K} - \psi_j \mathbf{M}] \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j}{\partial \tilde{x}_i} = \mathbf{0}. \quad (\text{A-29})$$

Der zweite Summand verschwindet, da $\boldsymbol{\varphi}_j^T [\mathbf{K} - \psi_j \mathbf{M}] = [(\mathbf{K} - \psi_j \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi}_j]^T = \mathbf{0}^T$. Umstellen nach der Sensitivität $\frac{\partial \psi_j}{\partial \tilde{x}_i}$ liefert

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_j^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{x}_i} - \psi_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \tilde{x}_i} \right] \boldsymbol{\varphi}_j}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j}. \quad (\text{A-30})$$

Mit dem SIMP-Ansatz aus Gleichung A-8 und der Materialinterpolation aus Gleichung 4-10 sowie der Assemblierung $\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{N_E} \rho_i \mathbf{A}_{Ei}^T \mathbf{M}_{Ei} \mathbf{A}_{Ei}$ folgt für die Sensitivitäten

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial \tilde{x}_i} = \begin{cases} \frac{\boldsymbol{\varphi}_{Ei,j}^T [s \tilde{x}_i^{s-1} \mathbf{K}_{Ei} - \psi_j \mathbf{M}_{Ei}] \boldsymbol{\varphi}_{Ei,j}}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j}, & \text{wenn } \tilde{x}_i > 0.1, \\ \frac{\boldsymbol{\varphi}_{Ei,j}^T [s \tilde{x}_i^{s-1} \mathbf{K}_{Ei} - \psi_j (36 \cdot 10^5 \tilde{x}_i^5 - 35 \cdot 10^6 \tilde{x}_i^6) \mathbf{M}_{Ei}] \boldsymbol{\varphi}_{Ei,j}}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j}, & \text{wenn } \tilde{x}_i \leq 0.1. \end{cases} \quad (\text{A-31})$$

A.5 Beulen

Das Eigenwertproblem für das lineare Beulen lautet

$$(\mathbf{G} + \psi_j \mathbf{K}) \boldsymbol{\varphi}_j = \mathbf{0}. \quad (\text{A-32})$$

Die Sensitivitäten der Eigenwerte ergeben sich aus der Differentiation der linearen Beulanalyse nach den Elementdichten $\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}$ unter der Beachtung dass die geometrische Steifigkeitsmatrix $\mathbf{G}(\tilde{x}_j, \mathbf{u}_{Ej}(\tilde{\mathbf{x}}))$ von den Elementdichten und den Verschiebungen abhängig ist

$$\left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} + \frac{\partial \psi_j}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{K} + \psi_j \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right] \boldsymbol{\varphi}_j + (\mathbf{G} + \psi_j \mathbf{K}) \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{0}. \quad (\text{A-33})$$

Die Multiplikation mit $\boldsymbol{\varphi}_j^T$ ergibt

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T \left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} + \frac{\partial \psi_j}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{K} + \psi_j \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right] \boldsymbol{\varphi}_j + \boldsymbol{\varphi}_j^T (\mathbf{G} + \psi_j \mathbf{K}) \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_j}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{0}. \quad (\text{A-34})$$

Der zweite Summand verschwindet, da $\boldsymbol{\varphi}_j^T [\mathbf{G} - \psi_j \mathbf{K}] = [(\mathbf{G} - \psi_j \mathbf{K}) \boldsymbol{\varphi}_j]^T = \mathbf{0}^T$. Umstellen nach der Sensitivität $\frac{\partial \psi_j}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}$ liefert

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = -\frac{1}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j} \boldsymbol{\varphi}_j^T \left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} + \psi_j \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right] \boldsymbol{\varphi}_j. \quad (\text{A-35})$$

Durch Einsetzen von Gleichung A-5 erhält man

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = -\frac{1}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j} \boldsymbol{\varphi}_j^T \left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \left(\mathbf{K}^{-1} \left\{ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{u} \right\} \right) + \psi_j \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right] \boldsymbol{\varphi}_j. \quad (\text{A-36})$$

Bei konstantem Lastvektor $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{0}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_j}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} &= \frac{1}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j} \left[-\boldsymbol{\varphi}_j^T \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} + \psi_j \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right) \boldsymbol{\varphi}_j + \boldsymbol{\varphi}_j^T \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{u} \boldsymbol{\varphi}_j \right] \\ &= \frac{1}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j} \left[-\boldsymbol{\varphi}_j^T \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} + \psi_j \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right) \boldsymbol{\varphi}_j + \boldsymbol{\kappa}_j^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{u} \right] \end{aligned} \quad (\text{A-37})$$

mit der Abkürzung

$$\boldsymbol{\kappa}_j = \mathbf{K}^{-1} \left(\boldsymbol{\varphi}_j^T \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\varphi}_j \right). \quad (\text{A-38})$$

Da die geometrische Elementsteifigkeitsmatrix aus Gleichung 2-12 linear in den Spannungen ist, kann sie alternativ geschrieben werden als

$$\mathbf{G}_{Ei} = \sum_{h=1}^6 \sigma_h \mathbf{G}_h = \sum_{h=1}^6 \left(\mathbf{e}_h^T \mathbf{E}_{Ei} \mathbf{B} \mathbf{u}_{Ei} \right) \mathbf{G}_h \quad (\text{A-39})$$

mit $h = 1, \dots, 6$ als Komponenten des Spannungsvektors. Somit ist

$$\frac{\partial \mathbf{G}_{Ei}}{\partial u_{Ei,l}} = \sum_{h=1}^6 (\mathbf{e}_h^T \mathbf{E}_{Ei} \mathbf{B}_{Ei}) \mathbf{G}_h, \quad (\text{A-40})$$

mit $l = 1, \dots, 24$. Dies ergibt für Voxel 24 Matrizen, die für alle Elemente identisch sind. Damit ist in Gleichung A-38

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\varphi}_j = \sum_{i=1}^{N_E} \left[\tilde{x}_i^s \mathbf{A}_{Ei}^T \left(\boldsymbol{\varphi}_{j,Ei}^T \sum_{l=1}^{24} \left\{ \frac{\partial \mathbf{G}_{Ei}}{\partial u_{Ei,l}} \otimes \mathbf{e}_l \right\} \boldsymbol{\varphi}_{j,Ei} \right) \right]. \quad (\text{A-41})$$

Mit der Materialinterpolation aus Gleichung 4-14 folgt die Assemblierung

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_{i=1}^{N_E} [x_B + (1 - x_B) \tilde{x}_i^s] \mathbf{A}_{Ei}^T \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{A}_{Ei} \\ \mathbf{G} &= \sum_{i=1}^{N_E} \tilde{x}_i^s \mathbf{A}_{Ei}^T \mathbf{G}_{Ei} \mathbf{A}_{Ei} \end{aligned} \quad (\text{A-42})$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_j}{\partial \tilde{x}_i} &= \frac{1}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j} \cdot \left[-\boldsymbol{\varphi}_{j,Ei}^T (s \tilde{x}_i^{s-1} \mathbf{G}_{Ei} + \psi_j (1 - x_B) s \tilde{x}_i^{s-1} \mathbf{K}_{Ei}) \boldsymbol{\varphi}_{j,Ei} \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{A}_{Ei} \boldsymbol{\kappa}_j)^T (1 - x_B) s \tilde{x}_i^{s-1} \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{u}_{Ei} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A-43})$$

Da die Beulsicherheit $T_j = \psi_j^{-1}$ ist, folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_j}{\partial \tilde{x}_i} &= \frac{T_j^2}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j} \cdot \left[\boldsymbol{\varphi}_{j,Ei}^T \left(s \tilde{x}_i^{s-1} \mathbf{G}_{Ei} + \frac{1}{T_j} (1 - x_B) s \tilde{x}_i^{s-1} \mathbf{K}_{Ei} \right) \boldsymbol{\varphi}_{j,Ei} \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{A}_{Ei} \boldsymbol{\kappa}_j)^T (1 - x_B) s \tilde{x}_i^{s-1} \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{u}_{Ei} \right] \end{aligned} \quad (\text{A-44})$$

oder kurz

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_j}{\partial \tilde{x}_i} &= \frac{T_j^2 / E_{0i}}{\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j} \left[\boldsymbol{\varphi}_{j,Ei}^T \left(\frac{\partial E_{Gi}}{\partial \tilde{x}_i} \mathbf{G}_{Ei} + \frac{1}{T_j} \frac{\partial E_{Ki}}{\partial \tilde{x}_i} \mathbf{K}_{Ei} \right) \boldsymbol{\varphi}_{j,Ei} - (\mathbf{A}_{Ei} \boldsymbol{\kappa}_j)^T \frac{\partial E_{Ki}}{\partial \tilde{x}_i} \mathbf{K}_{Ei} \mathbf{u}_{Ei} \right] \\ \text{mit } \boldsymbol{\kappa}_j &= \mathbf{K}^{-1} \left(\boldsymbol{\varphi}_j^T \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\varphi}_j \right). \end{aligned} \quad (\text{A-45})$$

Anhang B

Sensitivitäten für Level-Set-Optimierung

Eine Struktureigenschaft $f(\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x})))$ kann vom Strukturmodell $\tilde{\mathbf{x}}$ sowie den Verschiebungen \mathbf{u} abhängen. Diese sind jeweils von den Entwurfsvariablen \mathbf{x} abhängig.

Als Ableitung nach $\tilde{\mathbf{x}}$ ergibt sich somit

$$\frac{\partial f(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}}))}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}. \quad (\text{B-1})$$

Das Strukturmodell $\tilde{\mathbf{x}}$ ist von der Level-Set-Funktion $\phi(\mathbf{x})$ abhängig. Somit berechnet sich die Ableitung bezüglich der Entwurfsvariablen \mathbf{x} als

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}. \quad (\text{B-2})$$

Als Sensitivität erhält man

$$\frac{\partial f(\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x})))}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \right) \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \quad (\text{B-3})$$

und kann in der linearen Statik $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}}$ aus Gleichung A-5 einsetzen, sodass

$$\frac{\partial f(\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x})))}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{u} \right) \right) \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \quad (\text{B-4})$$

entsteht. Mit dem adjungierten Lastfall

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\kappa} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \quad (\text{B-5})$$

kann man dies schreiben als

$$\frac{\partial f(\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x})))}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} + \boldsymbol{\kappa}^T \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{u} \right) \right) \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}. \quad (\text{B-6})$$

Lebenslauf

Persönliche Daten

Robert Dienemann

Geburtsdatum 25.02.1990

Geburtsort Weimar

Schulausbildung

1996 bis 2000 Staatliche Grundschule Großbrennbach

2000 bis 2004 Staatliches Gymnasium Prof. Fritz Hofmann in Kölleda

2004 bis 2008 Spezialschulteil am Albert-Schweitzer-Gymnasium in Erfurt

Studium

10/2008 bis 08/2011 Maschinenbau (Bachelor of Science) an der *Otto-von-Guericke-Universität* in Magdeburg,
in dieser Zeit: Tutor für Informatik für Ingenieure und studentische Hilfskraft zur Unterstützung von Forschungsvorhaben am *Lehrstuhl für Maschinenbauinformatik*,
Bachelorarbeit „Auslegung einer Dieselmotorkraftstoffverteilerleiste unter Anwendung der statistischen Versuchsplanung und der Finite-Elemente-Methode“ bei der *Volkswagen AG* in Salzgitter

10/2011 bis 04/2014 Maschinenbau, Studienrichtung Produktentwicklung - Berechnung und Konstruktion (Master of Science) an der *Otto-von-Guericke-Universität* in Magdeburg,
in dieser Zeit: Tutor für CAx-Anwendungen und studentische Hilfskraft zur Unterstützung von Forschungsvorhaben am *Lehrstuhl für Maschinenbauinformatik* sowie am *Lehrstuhl für Numerische Mechanik*,
Masterarbeit „Betriebsfestigkeits- und Crashberechnung eines Rennmotors auf Grundlage von Belastungen am Gesamtfahrzeug“ bei der *Audi AG* in Neckarsulm

Berufstätigkeit

seit 05/2014 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am *Lehrstuhl für Optimierung mechanischer Strukturen* an der *Bergischen Universität Wuppertal*